49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Comparer deux nombres par leur différence

À retenir : Pour comparer A et B, calcule $A - B$, simplifie (même dénominateur, carré), puis conclus : $A - B < 0$ donc $A < B$. Un carré est $\geqslant 0$, pas forcément > 0 : $(x-1)^2 = 0$ pour $x = 1$. Tester des valeurs ne prouve rien.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : comparer deux nombres** — Sans calculatrice. Compare les deux nombres en étudiant le signe de leur différence, sans arrondir.

(a) Compare $\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{7}{8}$.

(b) Compare $0{,}333$ et $\dfrac{1}{3}$.

(c) Compare $\dfrac{11}{4}$ et $2{,}7$.

(d) On sait que $A - B = -\dfrac{2}{7}$. Compare A et B.

(e) Compare $0{,}4^2$ et $0{,}4$.

(f) On sait que $B - A = 0{,}5$. Compare A et B.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : différence de deux expressions** — Sans calculatrice. Pour tout réel x, calcule et réduis $A - B$ (attention aux parenthèses), puis compare A et B.

(a) $A = 2x + 7$ et $B = 2x - 1$.

(b) $A = 3 - x$ et $B = 5 - x$.

(c) $A = x^2 + 2x$ et $B = (x+1)^2$.

(d) $A = 3(x-1) + 5$ et $B = 3x + 1$.

(e) $A = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}$ et $B = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$.

Ex. 3 ★★☆ **Un carré caché dans la différence** — Pour tout réel x, on pose $A = x^2 + 16$, $B = 8x$ et $C = x^2 + 17$.

(a) Calcule $A - B$ et écris le résultat sous la forme d'un carré.

(b) Déduis-en la comparaison de A et B pour tout réel x.

(c) Noé affirme : « Pour tout réel x, $A > B$, car un carré est positif. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Démontre que, pour tout réel x, $C > B$ (inégalité stricte).

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux sur les comparaisons** — Sans calculatrice. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie (calcul de différence ou contre-exemple).

(a) « Pour tout réel a, $a^2 \geqslant a$. »

(b) « Pour tout réel x, $(x+5)^2 > x^2 + 10x$. » Léa l'a testée pour $x = 0$ et $x = 1$: est-ce une preuve ?

(c) « $0{,}142 < \dfrac{1}{7}$. »

(d) « Si $B - A = -3$, alors $A < B$. »

(e) « Le prix d'un casque passe de $54{,}90$ € à $49{,}50$ € : la variation absolue du prix est de $+5{,}40$ €. »

Ex. 5 ★★★ **Corriger la copie de Lucas** — Pour tout réel x, on pose $A = x^2 + 8$ et $B = (5x+3) - (x-1)$. Voici la copie de Lucas : « $B = 5x + 3 - x - 1 = 4x + 2$, puis $B - A = -x^2 + 4x - 6$. Pour $x = 0$ et $x = 3$, je trouve $B - A < 0$, donc $B > A$ pour tout réel x. »

(a) Repère l'erreur de Lucas dans le calcul de B, puis donne la forme réduite correcte de B.

(b) Lucas déduit « $B > A$ » de « $B - A < 0$ ». Explique son erreur de conclusion.

(c) Avec la bonne forme de B, calcule $A - B$ et écris le résultat sous la forme d'un carré.

(d) Démontre que, pour tout réel x, $A \geqslant B$.

(e) Lucas affirme maintenant : « $A > B$ pour tout réel x, mes deux tests le prouvent. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Comparer sans jamais arrondir** — Sans calculatrice. Chaque comparaison se fait par le signe d'une différence exacte, sans remplacer une fraction par une valeur arrondie.

(a) Compare $\dfrac{2}{3}$ et $0{,}6667$.

(b) Compare $\dfrac{13}{14}$ et $\dfrac{14}{15}$.

(c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, compare $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{n+1}{n+2}$. Justifie le signe de la différence.

(d) Déduis-en, sans calcul supplémentaire, la comparaison de $\dfrac{2025}{2026}$ et $\dfrac{2026}{2027}$.

Ex. 7 ★★★ **Jardin partagé : périmètres et aires** — Au jardin partagé de Rennes, x est une longueur en mètres, avec $x > 0$. P est un rectangle de côtés $x + 1$ et $x + 5$. Q est un carré de côté $x + 3$. R a pour aire $x^2 + 12$ (un carré de côté x plus une bande de 12 m²). T est un rectangle de côtés 6 et x.

(a) Compare les périmètres de P et de Q.

Ex. 7 **(suite)**

(b) Calcule l'aire de Q moins l'aire de P, puis interprète cet écart avec son unité.

(c) Écris l'aire de R moins l'aire de T sous la forme $(x-a)^2+b$.

(d) Démontre que, pour tout $x>0$, l'aire de R est strictement supérieure à celle de T.

(e) Quel est le plus petit écart possible entre les aires de R et de T ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

2. *Comparer deux nombres positifs par leur quotient*

À retenir : Si $a>0$ et $b>0$: $\frac{a}{b}>1 \iff a>b$ et $\frac{a}{b}<1 \iff a<b$ (on compare à 1, pas à 0). Ex. : $\frac{2^9}{3\times 2^7}=\frac{4}{3}>1$. Rapport 1,25 : +25 % ; rapport 0,8 : −20 %. Jamais avec des négatifs.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : puissances et quotient** — Sans calculatrice. Les nombres A et B sont strictement positifs. Calcule $\frac{A}{B}$, simplifie, compare le résultat à 1 et conclus.

(a) $A=5^{12}$ et $B=4\times 5^{11}$.

(b) $A=3\times 2^{20}$ et $B=2^{22}$.

(c) $A=6^{10}$ et $B=2^{10}\times 3^9$.

(d) $A=9^5$ et $B=3^{11}$.

(e) $A=\left(\frac{2}{3}\right)^4$ et $B=\frac{2^5}{3^4}$.

(f) $A=2^{15}\times 5^3$ et $B=2^{13}\times 5^4$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : lire un rapport** — Sans calculatrice. Dans les questions c) à f), a et b sont des réels strictement positifs.

(a) Un ticket de bus passe de 5 € à 8 €. Par quel nombre son prix est-il multiplié ? Donne le pourcentage de hausse.

(b) Un abonnement passe de 50 € à 35 €. Par quel nombre son prix est-il multiplié ? Donne le pourcentage de baisse.

(c) a est 15 % plus grand que b. Donne le rapport $\frac{a}{b}$ et compare-le à 1.

(d) On sait que $\frac{a}{b}=0{,}6$. Compare a et b, puis traduis ce rapport par un pourcentage.

(e) On sait que $\frac{a}{b}=2$. Calcule $\frac{b}{a}$ et traduis-le par un pourcentage.

(f) a est 60 % plus petit que b. Écris $\frac{a}{b}$, puis calcule $\frac{b}{a}$: de quel pourcentage b est-il plus grand que a ?

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur la règle du quotient** — Vrai ou faux ? Justifie. Si c'est faux, donne un contre-exemple ou corrige le raisonnement.

(a) « Pour tous réels a et b non nuls, si $\frac{a}{b}>1$, alors $a>b$. »

(b) « Si $a>0$, $b>0$ et $\frac{a}{b}=0{,}9$, alors $a>b$, car $\frac{a}{b}>0$. »

(c) « Pour comparer $A=11^8+1$ et $B=11^8$, il faut calculer $\frac{A}{B}$: la différence ne permet pas de conclure. »

(d) « Si $a>0$, $b>0$ et $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$, alors b est 25 % plus petit que a. »

Ex. 11 ★★☆ **Démontrer la règle, puis comparer de grandes puissances** — Sans calculatrice : ces puissances sont trop grandes pour être calculées, tu vas les comparer avec un quotient.

(a) Soit a et b deux réels strictement positifs. Démontre que $\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$, puis déduis-en que $\frac{a}{b}>1$ équivaut à $a>b$.

(b) Écris 2^{100} sous la forme n^{20} et 3^{60} sous la forme m^{20}, avec n et m des entiers.

(c) Déduis-en $\frac{2^{100}}{3^{60}}$ sous la forme de la puissance d'une fraction, puis compare 2^{100} et 3^{60}.

(d) Compare de la même façon 5^{30} et 2^{70} (écris-les sous la forme n^{10}).

Ex. 12 ★★★ **Puissances : bien lire le quotient** — Sans calculatrice. Dans la première question, n désigne un entier naturel quelconque.

(a) Soit $A=2^{n+3}\times 3^n$ et $B=7\times 6^n$. Justifie que A et B sont strictement positifs, puis compare-les avec le quotient $\frac{A}{B}$.

(b) Soit $E=3^{20}-3^{18}$ et $F=25\times 3^{17}$. Factorise E par 3^{18}, justifie que $E>0$, puis compare E et F avec un quotient.

(c) Compare $G=4^{15}$ et $H=8^{10}$ à l'aide de leur quotient.

(d) Ali affirme : « 3^{20} est le triple de 3^{19}, donc 3^{20} est 300 % plus grand que 3^{19} ». A-t-il raison ? Justifie.

(e) Range dans l'ordre croissant $R=2^{40}$, $S=9\times 2^{37}$ et $T=5\times 2^{38}$ en calculant deux quotients.

Ex. 13 ★★★ **Le prix d'un vélo électrique** — Sans calculatrice. À Annecy, un vélo électrique coûtait 1 600 € en 2024. Il est passé à 2 400 € en 2025, puis il est revenu à 1 600 € pendant les soldes de 2026.

(a) Calcule le rapport entre le prix de 2025 et le prix de 2024, puis traduis-le en pourcentage d'évolution.

(b) Pour les soldes de 2026, le vendeur affiche une remise égale au pourcentage de hausse de 2025. A-t-il raison ? Justifie avec un quotient.

(c) Un second vélo passe de 2 000 € à 2 800 €. Les deux hausses sont-elles égales ? Compare d'abord les écarts, puis les rapports.

Ex. 13 **(suite)**

(d) Le prix d'un casque augmente de 10 %, puis baisse de 10 %. Compare le prix final au prix initial à l'aide d'un quotient.

Ex. 14 ★★★ **Et si les nombres sont négatifs ?** — La règle du quotient a été vue pour des nombres strictement positifs. Tu vas voir ce qu'elle devient pour des nombres strictement négatifs.

(a) Avec $a = -5$ et $b = -20$, calcule $\frac{a}{b}$ et compare-le à 1, puis compare a et b. Que constates-tu ?

(b) Soit a et b deux réels strictement négatifs. Démontre que $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$, puis que $\frac{a}{b} > 1$ entraîne $a < b$.

(c) Sans calculatrice, compare $A = -2^{31}$ et $B = -5 \times 2^{28}$ à l'aide de leur quotient.

(d) Pour $C = 7^8$ et $D = -7^9$, un élève écrit : « $\frac{C}{D} = -\frac{1}{7} < 1$, donc $C < D$ ». Corrige ce raisonnement.

3. *Opérations sur les inégalités*

À retenir : Ajouter ou soustraire un nombre, même négatif, garde le sens. Multiplier ou diviser par $k > 0$ garde le sens ; par $k < 0$, le sens change : $-2x < 8 \iff x > -4$. On ne soustrait ni ne multiplie deux inégalités membre à membre.

Ex. 15 ★☆☆ **Appliquer une règle sur une inégalité** — Sans calculatrice. Compare les deux nombres en écrivant le bon symbole ($<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ ou $=$). Donne la règle utilisée.

(a) On sait que $x < 5$. Compare $x + (-9)$ et -4.

(b) On sait que $a \leqslant b$. Compare $(-3) \times a$ et $(-3) \times b$.

(c) On sait que $y > -2$. Compare $\frac{y}{4}$ et $-\frac{1}{2}$.

(d) On sait que $t \geqslant 6$. Compare $\frac{t}{-2}$ et -3.

(e) On sait que $a < b$. Compare $0 \times a$ et $0 \times b$.

(f) On sait que $x < 3$. Compare $2 - x$ et -1.

Ex. 16 ★☆☆ **Résoudre une inéquation simple** — Sans calculatrice. Résous dans $\mathbb{R}$ et donne l'ensemble S des solutions sous forme d'intervalle (ou $S = \varnothing$).

(a) $-4x < 20$ (b) $5x \geqslant -35$ (c) $x - 6 > -8$

(d) $7 - 2x \leqslant 13$ (e) $-\frac{x}{3} > 2$ (f) $4x + 1 < 4x - 2$

Ex. 17 ★★☆ **Vrai ou faux sur les inégalités** — a, b, c, d et k sont des réels. Vrai ou faux ? Justifie : par la différence si c'est vrai, par un contre-exemple numérique si c'est faux.

(a) Si $a < b$ et $c < d$, alors $a - c < b - d$.

(b) Si $a < b$ et $c < d$, alors $a \times c < b \times d$.

(c) Si $0 < a < b$, alors $\frac{a}{b} < 1$.

(d) Si $a < b$, alors $ka < kb$ pour tout réel k.

(e) Si $a < b$, alors $a^2 < b^2$.

Ex. 18 ★★☆ **Encadrer des expressions** — On sait que $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $-2 \leqslant y \leqslant 3$.

(a) Encadre $5x - 3$.

(b) Encadre $6 - 2x$.

(c) Lina écrit : « $x - y$ est compris entre $1 - (-2) = 3$ et $4 - 3 = 1$ ». Repère son erreur, puis encadre $x - y$ correctement.

(d) Encadre $\frac{x + y}{2}$.

Ex. 19 ★★★ **Démontrer les règles par la différence** — a, b, c, d et k sont des réels avec $a < b$. Rédige chaque démonstration en étudiant le signe d'une différence.

(a) On suppose $k > 0$. Démontre que $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$.

(b) On suppose $k < 0$. Démontre que $ka > kb$.

(c) On suppose $c < d$. Démontre que $a + c < b + d$.

(d) Démontre que $a < \frac{a + b}{2} < b$.

(e) On suppose $0 < a < b$ et $0 < c < d$. Vérifie que $bd - ac = b(d - c) + c(b - a)$, puis déduis-en que $ac < bd$.

Ex. 20 ★★★ **Clôturer un jardin partagé** — À Rennes, un jardin partagé est rectangulaire. Sa longueur L et sa largeur ℓ (en m) vérifient $12{,}4 \leqslant L \leqslant 12{,}6$ et $7{,}8 \leqslant \ell \leqslant 8{,}1$. La calculatrice est permise.

(a) Encadre le périmètre $P = 2(L + \ell)$ du jardin.

(b) Zoé affirme : « La longueur dépasse la largeur d'au moins 4,5 m. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) Justifie que l'aire $A = L \times \ell$ vérifie $12{,}4 \times 7{,}8 \leqslant A \leqslant 12{,}6 \times 8{,}1$, puis encadre A.

(d) La clôture coûte 15 € par mètre de périmètre, plus 40 € de livraison. Encadre son coût C en euros.

(e) Le club a un budget de 650 €. Peut-on être sûr qu'il suffit ? Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Une fonction affine décroissante** — f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 9$. On sait que $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 2$.

(a) Inès écrit : « $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 2$, donc $6 \leqslant -4x \leqslant -8$ ». Explique son erreur et écris l'encadrement correct de $-4x$.

(b) Déduis-en un encadrement de $f(x)$.

(c) Pour quelles valeurs de x a-t-on $3 \leqslant f(x) \leqslant 5$? Donne la réponse sous forme d'intervalle.

(d) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 2x - 6$ et donne S sous forme d'intervalle.

(e) Léo affirme : « Pour tout x de $[-1{,}5\,;2]$, on a $f(x) \geqslant 2x - 6$. » Vrai ou faux ? Justifie.

4. Encadrements

À retenir : J'applique les opérations une par une aux bornes. Si le facteur est négatif, le sens change et je remets dans l'ordre : $-1 < x \leqslant 2$ donne $-4 \leqslant -2x < 2$. Pour une somme, j'ajoute les bornes. Pour $a - b$, j'encadre $-b$, puis j'additionne.

Ex. 22 ★☆☆ **Une opération à la fois** — Sans calculatrice. On sait que $-3 < x \leqslant 2$.

(a) Encadre $x - 4$.

(b) Inès écrit : « $12 < (-4) \times x \leqslant -8$ ». Corrige son erreur.

(c) Encadre $2 - 3x$.

(d) L'amplitude d'un encadrement est l'écart entre ses bornes. Donne celle de l'encadrement de x, puis celle de l'encadrement de $2 - 3x$ obtenu à la question précédente.

(e) Vrai ou faux : « $\frac{x}{2} > -1$ ». Justifie.

Ex. 23 ★☆☆ **Somme et différence de deux encadrements** — Sans calculatrice. On sait que $2 \leqslant a \leqslant 5$ et $-1 < b < 3$.

(a) Encadre $a + b$.

(b) Encadre $-b$.

(c) Déduis-en un encadrement de $a - b$.

(d) Vrai ou faux : « $a - b$ peut être égal à -1 ». Justifie.

(e) Encadre $2a - 3b$.

Ex. 24 ★★☆ **Un rectangle mesuré à la règle** — Calculatrice permise. Lucas mesure un rectangle de longueur L et de largeur ℓ. Il trouve 6,4 cm et 2,8 cm, valeurs arrondies au mm près.

(a) Encadre L, puis ℓ.

(b) Encadre le périmètre $P = 2(L + \ell)$ du rectangle.

(c) Justifie que l'on peut multiplier les encadrements de L et de ℓ, puis encadre l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle.

(d) Encadre l'écart $L - \ell$ entre la longueur et la largeur.

Ex. 25 ★★☆ **Image d'un encadrement par une fonction affine** — On considère les fonctions affines $f : x \mapsto 7 - 4x$ et $g : x \mapsto 3x + 1$, et un réel x tel que $-1 \leqslant x < 2{,}5$.

(a) Donne le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Justifie.

(b) Léo écrit : « $f(-1) \leqslant f(x) < f(2{,}5)$, soit $11 \leqslant f(x) < -3$ ». A-t-il raison ? Justifie et corrige.

(c) Encadre $g(x)$.

(d) Encadre $f(x) + g(x)$ en additionnant les deux encadrements, puis en réduisant d'abord $f(x) + g(x)$. Quel encadrement est le plus précis ?

Ex. 26 ★★★ **Une différence mal encadrée** — Sans calculatrice. On sait que $1 \leqslant x < 4$ et $-2 < y \leqslant 3$. Yanis veut encadrer $x - y$. Il écrit : « $1 - (-2) \leqslant x - y < 4 - 3$ ».

(a) Calcule les bornes obtenues par Inès. Explique pourquoi son résultat est forcément faux, puis trouve son erreur.

(b) Encadre $-y$. Justifie le sens de chaque inégalité, et pourquoi chacune est stricte ou large.

(c) Déduis-en un encadrement de $x - y$. Compare son amplitude à la somme des amplitudes des encadrements de x et de y.

(d) Démontre, en étudiant le signe de $6 - (x - y)$, que $x - y < 6$.

Ex. 27 ★★★ **Une frise de carreaux** — Calculatrice permise. À Annecy, Maëlle pose une frise de 15 carreaux carrés, alignés bout à bout et sans joint. Le côté c d'un carreau mesure 3,7 cm, valeur arrondie au mm près.

(a) Encadre c. Explique pourquoi une des inégalités est large et l'autre stricte.

(b) Déduis-en un encadrement de la longueur totale F de la frise, puis donne son amplitude.

(c) La frise doit tenir sur un rebord de 56 cm. Maëlle peut-elle en être sûre ? Justifie.

(d) Encadre l'aire A d'un carreau. Justifie chaque multiplication par le signe du facteur utilisé.

Ex. 28 ★★★ **La cuve qui se vide** — Calculatrice permise. À Rodez, une cuve d'eau de pluie se vide. Après t minutes, avec $0 \leqslant t \leqslant 8$, elle contient $V(t) = 120 - 15t$ litres. Une alarme a sonné à un instant t tel que $2 < t \leqslant 5{,}5$.

(a) Démontre, en étudiant le signe d'une différence, que si $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 8$, alors $V(t_1) > V(t_2)$.

(b) Encadre $V(t)$ à l'instant de l'alarme, en détaillant chaque opération.

(c) Vrai ou faux : « à l'alarme, la cuve contenait plus du quart de son contenu initial $V(0)$ ». Justifie.

(d) Détermine les instants t pour lesquels $48 \leqslant V(t) \leqslant 75$, en transformant cet encadrement.

(e) Compare l'amplitude de l'encadrement de $V(t)$ obtenu plus haut à celle de l'encadrement de t. Explique le lien avec le coefficient -15.

5. Résoudre une inéquation du premier degré

À retenir : Termes en x d'un côté, nombres de l'autre. Diviser par un négatif change le sens : $-2x < 6 \iff x > -3$. Fractions : on multiplie TOUS les termes. Crochet ouvert si l'inégalité est stricte, et toujours en $\pm\infty$; S peut être $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.

Ex. 29 ★☆☆ **Isoler x : attention au signe du coefficient** — Sans calculatrice. Résous dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation et donne S sous forme d'intervalle, avec des bornes exactes.

(a) $2x + 9 < 14$ (b) $-5x \geqslant 15$ (c) $3x - 4 \leqslant 3$

(d) $8 - 6x > 11$ (e) $7 - x \leqslant 0$ (f) $-\dfrac{x}{4} < 2$

Ex. 30 ★☆☆ **Des x dans les deux membres** — Sans calculatrice. Résous dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation en regroupant les termes en x d'un côté et les nombres de l'autre. Donne S (intervalle, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$).

(a) $8x - 5 > 3x + 10$ (b) $x + 8 \leqslant 4x - 3$

(c) $2 - 7x < 3x + 6$ (d) $3x + 5 \geqslant 3x - 1$

(e) $6x - 4 > 6x + 2$ (f) $9x + 1 \leqslant 2x + 1$

Ex. 31 ★★☆ **Trouve l'erreur** — Sans calculatrice. Chaque élève a résolu une inéquation dans $\mathbb{R}$. Repère son erreur, explique-la, puis donne le bon ensemble S.

(a) Inès résout $-2(x-4) \geqslant 3x$: « $-2x - 8 \geqslant 3x \iff -5x \geqslant 8 \iff x \leqslant -\frac{8}{5}$ ».

(b) Malik résout $5 - 3x < 17$: « $-3x < 12 \iff x < -4$, donc $S =]-\infty\,;-4[$ ». Teste $x = -5$ avant de corriger.

(c) Chloé résout $\frac{x}{4} - 2 \leqslant \frac{x}{6}$: « je multiplie par 12 : $3x - 2 \leqslant 2x \iff x \leqslant 2$ ».

(d) Hugo résout $7x - 1 > 3x + 4$: « $4x > 5 \iff x > \frac{5}{4}$, donc $S = \left[\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$ ».

Ex. 32 ★★☆ **Fractions, borne et vérification** — Sans calculatrice. On considère l'inéquation (I) : $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \geqslant 2$.

(a) Multiplie tous les termes de (I) par 6, puis développe et réduis chaque membre.

(b) Déduis-en l'ensemble S des solutions de (I), sous forme d'intervalle.

(c) Résous l'équation $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} = 2$. Explique la différence entre sa solution et l'ensemble S.

(d) La borne de S est-elle solution de (I) ? Est-elle solution de $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} > 2$? Justifie.

(e) Vérifie ton résultat : teste dans (I) une valeur de S, puis une valeur hors de S.

Ex. 33 ★★★ **Aucune solution, ou toutes ?** — Sans calculatrice. On considère les inéquations (A) : $3(2x-1) - 2(x+4) \leqslant 4x - 11$ et (B) : $-3(x-2) + 7x > 4(x+1) + 2$, d'inconnue x réelle.

(a) Développe et réduis le membre de gauche de (A), puis résous (A) dans $\mathbb{R}$.

(b) Développe et réduis chaque membre de (B), puis résous (B) dans $\mathbb{R}$.

(c) Lina écrit : « Pour (B), j'obtiens $0 > 0$, donc la solution est $x = 0$. » A-t-elle raison ? Justifie, en testant aussi $x = 0$ dans (B).

Ex. 33 (suite)

(d) Détermine tous les réels k pour lesquels l'inéquation $-3(x-2) + 7x > 4x + k$ a pour ensemble des solutions $\mathbb{R}$, puis ceux pour lesquels c'est $\varnothing$.

Ex. 34 ★★★ **Sweats de l'association : deux fournisseurs** — Calculatrice autorisée. L'association sportive d'un lycée de Colmar commande n sweats brodés (n entier naturel). Deux fournisseurs proposent :

Fournisseur	Frais fixes (€)	Prix par sweat (€)
A	80	8
B	0	14

(a) Écris une inéquation d'inconnue n traduisant « l'offre A est strictement moins chère que l'offre B », puis résous-la dans $\mathbb{R}$ avec une borne exacte.

(b) Malo conclut de la question précédente : « A est moins chère dès 13 sweats. » A-t-il raison ? Justifie par un calcul de prix, puis donne le nombre minimal de sweats pour lequel A est strictement moins chère.

(c) Elle choisit A, offre 6 sweats aux entraîneurs et vend les autres 19 € pièce. Combien en commander au minimum pour un bénéfice (recette − coût) d'au moins 200 € ?

(d) B accorde finalement une remise d'un quart sur son prix total. À partir de combien de sweats l'offre A est-elle alors strictement moins chère ? Justifie.

Ex. 35 ★★★ **Une inéquation qui dépend d'un réel m** — Sans calculatrice. Pour tout réel m, on note (I_m) l'inéquation $mx + 3 \leqslant 2x + 7$, d'inconnue x réelle.

(a) Montre que (I_m) équivaut à une inéquation de la forme $(m-2)x \leqslant c$, où c est un réel à déterminer.

(b) Résous (I_5). Nora répond $S =]-\infty\,;1{,}33]$. A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Résous (I_{-2}) et donne S sous forme d'intervalle.

(d) Résous (I_2). Existe-t-il un réel m pour lequel l'ensemble des solutions de (I_m) est $\varnothing$? Justifie.

(e) Détermine le réel m pour lequel l'ensemble des solutions de (I_m) est $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$. Justifie.

6. *Écrire l'ensemble des solutions avec un intervalle*

À retenir : Inégalité large ($\leqslant$, $\geqslant$) : crochet fermé. Inégalité stricte ($<$, $>$) : crochet ouvert, et toujours ouvert en $\pm\infty$: $x \leqslant 2 \iff x \in]-\infty\,;2]$. Si les termes en x disparaissent : $S = \mathbb{R}$ (vrai) ou $S = \varnothing$ (faux).

Ex. 36 ★☆☆ **De l'inégalité à l'intervalle, et retour** — Sans calculatrice.

(a) Écris avec un intervalle l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant -4$.

(b) Écris avec un intervalle l'ensemble des réels x tels que $x > \frac{3}{5}$.

(c) Traduis $x \in [-2{,}5\,;+\infty[$ par une inégalité.

(d) Traduis $x \in]-\infty\,;7[$ par une inégalité.

(e) Maëlle écrit : « $x \geqslant 1$, donc $S = [1\,;+\infty]$ ». Corrige son erreur.

(f) Tom écrit : « $x < -6$, donc $S =]-6\,;-\infty[$ ». Corrige son erreur.

Ex. 37 ★☆☆ **Résoudre et conclure par un intervalle** — Sans calculatrice, résous dans $\mathbb{R}$ et donne S sous forme d'intervalle (ou $S = \mathbb{R}$, $S = \varnothing$).

(a) $4x - 3 < 17$ (b) $-2x + 5 \leqslant 11$

(c) $3x + 9 > 4$ (d) $13 - x \geqslant 4x - 2$

(e) $6x + 2 \leqslant 6x - 1$ (f) $2(x + 3) > 2x - 1$

Ex. 38 ★★☆ **Une borne ouverte et des entiers** — On considère l'inéquation (I) : $\frac{x}{4} - \frac{2x-1}{6} < 1$.

(a) Résous (I) et écris son ensemble de solutions S avec un intervalle.

(b) Le réel -10 appartient-il à S ? Justifie par un calcul.

(c) Quel est le plus petit entier solution de (I) ? Justifie.

(d) (I) a-t-elle un plus grand entier solution ? Justifie.

Ex. 39 ★★☆ **Même ensemble de solutions ?** — On considère quatre inéquations : (A) $-3x + 4 < 10$; (B) $2x + 1 > -3$; (C) $5 - x \leqslant 7$; (D) $3(x - 2) \geqslant 3x + 1$.

(a) Résous (A) et (B). Ont-elles le même ensemble de solutions ? Justifie.

(b) Inès affirme : « (A) et (C) ont le même ensemble de solutions, car la borne est la même. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Résous (D), puis l'inéquation $3(x - 2) \geqslant 3x - 7$. Ont-elles le même ensemble de solutions ? Justifie.

(d) Trouve le réel c tel que l'inéquation $6x + c > 0$ ait le même ensemble de solutions que (B).

Ex. 40 ★★★ **La copie de Lina** — Lina a résolu trois inéquations dans $\mathbb{R}$. Voici ses réponses. Sans calculatrice, corrige sa copie.

N°	Inéquation	Réponse de Lina
(1)	$-4x + 9 \geqslant 2x - 7$	$S = \left[\frac{8}{3}\,;+\infty\right[$
(2)	$2(3x - 1) \geqslant 6x + 1$	$S = 0$
(3)	$4(x + 2) - x > 3x + 5$	$S = \varnothing$

(a) Teste $x = 0$ dans (1). Déduis-en que la réponse de Lina est fausse, puis trouve son erreur et donne le bon ensemble S.

(b) Explique pourquoi l'écriture « $S = 0$ » ne convient pas, puis résous (2).

(c) Lina pense : « Quand les termes en x disparaissent, il n'y a jamais de solution. » Résous (3). A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Le nombre $\frac{8}{3}$ est-il solution de (1) ? Justifie, puis donne le plus grand entier solution de (1).

Ex. 41 ★★★ **Une inéquation qui dépend de m** — Pour tout réel m, on considère l'inéquation (E_m) : $mx + 3 \leqslant 2x + 7$, d'inconnue x. Par exemple, (E_5) s'écrit $5x + 3 \leqslant 2x + 7$. Sans calculatrice.

(a) Résous (E_5), puis (E_{-1}). Écris chaque ensemble de solutions avec un intervalle.

(b) Résous (E_2). Combien de réels sont solutions ? Justifie.

(c) Démontre que (E_m) équivaut à $(m - 2)x \leqslant 4$, puis détermine m pour que $S = [-1\,;+\infty[$.

(d) Existe-t-il un réel m tel que l'ensemble des solutions de (E_m) soit $[4\,;+\infty[$? Justifie.

Ex. 42 ★★★ **Carte ou entrée à l'unité ?** — Une salle d'escalade de Grenoble propose deux formules : l'entrée à l'unité, à 11 € la séance, ou une carte annuelle à 60 €, puis 6 € par séance. On note x le nombre de séances dans l'année. Calculatrice inutile.

(a) Exprime en fonction de x le prix payé avec chaque formule. Écris l'inéquation qui traduit « la carte coûte strictement moins cher que l'entrée à l'unité ».

(b) Résous cette inéquation dans $\mathbb{R}$ et écris S avec un intervalle. Le nombre 12 appartient-il à S ? Justifie.

(c) Déduis-en le nombre minimal de séances pour que la carte soit plus avantageuse. Vérifie avec les deux prix.

(d) Noé écrit l'ensemble des solutions de « l'entrée à l'unité ne coûte pas plus cher que la carte » sous la forme $[-\infty\,;b]$. Résous cette inéquation et corrige son écriture.

(e) Le gérant écrit la condition de la première question sous la forme $0{,}5x - 6 > 0$. Justifie, sans la résoudre, qu'elle a le même ensemble de solutions.

7. *Modéliser un problème par une inéquation*

À retenir : « Au moins » → $\geqslant$, « au plus », « ne dépasse pas » → $\leqslant$, « plus de » → $>$, « moins de » → $<$. Inconnue entière : $n > 6{,}2$ donne au moins $n = 7$, $n \leqslant 8{,}7$ au plus $n = 8$. Vérifie le cas d'égalité et conclus avec l'unité.

Ex. 43 ★☆☆ **Traduire une phrase par une inégalité** — Sans calculatrice. Traduis chaque phrase par une inégalité portant sur l'inconnue indiquée.

(a) Le prix p (en €) d'un panier de fruits ne dépasse pas 25 €.

(b) Plus de 40 personnes sont venues au concert ; on note s le nombre de spectateurs.

(c) Pas moins de 12 bénévoles aident à la fête du village ; on note b leur nombre.

(d) Un carnet de tickets coûte 3 € ; avec c carnets vendus, la recette est de plus de 150 €.

(e) Le double de la durée t (en h), augmenté de 1, vaut au minimum 9.

(f) Une valise doit peser moins de 23 kg ; on note m sa masse (en kg).

(g) Léo traduit « au plus 30 élèves par classe » par $e < 30$, où e est le nombre d'élèves. Corrige son erreur.

Ex. 44 ★☆☆ **Inconnue entière : arrondir dans le bon sens** — Sans calculatrice. Dans chaque item, n est un nombre entier d'objets.

(a) On sait que $6n \geqslant 45$. Donne la plus petite valeur possible de n.

(b) Un monte-charge porte n caisses de 70 kg ; la charge ne doit pas dépasser 500 kg. Donne la plus grande valeur possible de n.

(c) On sait que $4n > 36$. Donne la plus petite valeur possible de n.

(d) Pour remplir un bac d'au moins 27 L, on verse n seaux de 3 L. Donne le nombre minimal de seaux.

(e) On sait que $8n < 56$. Donne la plus grande valeur possible de n.

(f) Zoé écrit : « $9n \leqslant 70$ donne $n \leqslant 7{,}8$, donc n vaut au plus 8. » Corrige son erreur.

Ex. 45 ★★☆ **Deux formules pour la piscine** — À la piscine de Lorient, Maëlle hésite entre deux formules pour l'année. Calculatrice autorisée.

Formule	Prix fixe (€)	Prix par entrée (€)
A	0	7
B	32	4,5

(a) Choisis et nomme l'inconnue, avec ses valeurs possibles. Exprime le prix P_A de la formule A et le prix P_B de la formule B.

(b) Traduis « la formule B est strictement moins chère que la formule A » par une inéquation, puis résous-la.

(c) Déduis-en le nombre minimal d'entrées à partir duquel la formule B est moins chère. Conclus par une phrase.

(d) Vérifie ta réponse : calcule P_A et P_B pour le nombre d'entrées trouvé, puis pour une entrée de moins.

Ex. 46 ★★☆ **La moyenne de Yanis** — En physique-chimie, Yanis a eu 8 (coefficient 2) et 11 (coefficient 1). Le dernier contrôle du trimestre a le coefficient 3. Toutes les notes sont sur 20.

(a) Nomme l'inconnue et donne ses valeurs possibles. Exprime la moyenne M de Yanis en fonction de cette inconnue.

(b) Quelle note minimale doit-il obtenir pour avoir au moins 10 de moyenne ? Conclus par une phrase.

(c) Vérifie ta réponse en calculant la moyenne obtenue avec cette note.

(d) Yanis affirme qu'il peut encore obtenir au moins 15 de moyenne. A-t-il raison ? Justifie par une inéquation.

Ex. 47 ★★★ **Trois offres pour un utilitaire** — Sacha déménage à Grenoble et loue un utilitaire pour une journée. L'agence propose trois offres. L'offre C est un forfait, avec un kilométrage illimité. Calculatrice autorisée.

Offre	Prix fixe (€)	Prix par km (€)
A	45	0,30
B	25	0,50
C	120	0

(a) Choisis et nomme l'inconnue, avec son unité et ses valeurs possibles. Exprime les prix P_A, P_B et P_C (en €) de chaque offre.

(b) Pour quelles distances l'offre A est-elle strictement moins chère que l'offre B ? Donne l'ensemble des solutions et examine le cas d'égalité.

(c) Pour quelles distances l'offre C est-elle strictement moins chère que l'offre A ?

(d) Résous de même $P_C < P_B$. Déduis-en, selon la distance parcourue, l'offre la plus avantageuse pour Sacha. Réponds par une phrase.

Ex. 48 ★★★ **Le spectacle du club de théâtre** — Le club de théâtre d'un lycée de Rennes joue une pièce dans une salle de 150 places. La location de la salle coûte 450 €. Chaque spectateur paie son billet 8 €, et le club lui offre une boisson qui coûte 2,50 €. Calculatrice autorisée.

(a) On note n le nombre de spectateurs. Précise les valeurs possibles de n, puis exprime le bénéfice B du club (recette moins dépenses), en €, en fonction de n.

(b) Combien faut-il de spectateurs, au minimum, pour que le bénéfice soit strictement positif ? Vérifie ta réponse avec n et $n-1$.

(c) Le club veut un bénéfice d'au moins 400 €. Est-ce possible avec ce tarif ? Justifie.

(d) Salle pleine, le club offre k places (billet gratuit, boisson offerte). Combien d'invitations au plus peut-il donner pour garder au moins 300 € de bénéfice ?

(e) Sans invitation, avec 120 spectateurs attendus, le club cherche un nouveau prix p (en €) du billet. Quel prix minimal, au centime près, assure un bénéfice d'au moins 400 € ?

Ex. 49 ★★★ **Économies de Lina, dépenses de Noé** — À Dijon, Lina a 140 € dans sa tirelire et y ajoute 30 € à la fin de chaque mois. Son frère Noé a 410 € sur son compte et paie 20 € par mois pour un abonnement, prélevés à la fin de chaque mois. Il n'a aucune autre rentrée ni dépense. Calculatrice autorisée.

(a) On note n le nombre de mois écoulés. Précise les valeurs possibles de n. Exprime en fonction de n les sommes L de Lina et N de Noé, en €.

(b) Pour que Noé garde un solde positif ou nul, Hugo écrit : « $410 - 20n \geqslant 0 \iff -20n \geqslant -410 \iff n \geqslant 20{,}5$, donc au moins 21 mois. » Repère ses erreurs et corrige.

(c) Au bout de combien de mois, au minimum, Lina aura-t-elle strictement plus d'argent que Noé ? Vérifie avec deux valeurs consécutives de n.

(d) Lina veut acheter un vélo à 599 €. Combien de mois doit-elle attendre, au minimum ? Réponds par une phrase.