benprof
particulier.fr

1. Comparer deux nombres par leur différence

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : comparer deux nombres**

(a) $\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = -\frac{1}{24} < 0$, donc $\frac{5}{6} < \frac{7}{8}$.

(b) $\frac{1}{3} - 0{,}333 = \frac{1000}{3000} - \frac{999}{3000} = \frac{1}{3000} > 0$, donc $\frac{1}{3} > 0{,}333$.

(c) $\frac{11}{4} - 2{,}7 = \frac{55}{20} - \frac{54}{20} = \frac{1}{20} > 0$, donc $\frac{11}{4} > 2{,}7$.

(d) $A - B = -\frac{2}{7} < 0$, donc $A < B$.

(e) $0{,}4^2 - 0{,}4 = 0{,}16 - 0{,}4 = -0{,}24 < 0$, donc $0{,}4^2 < 0{,}4$: un carré n'est pas toujours plus grand que le nombre.

(f) $B - A = 0{,}5 > 0$, donc $B > A$, c'est-à-dire $A < B$ (attention : c'est $B - A$ qui est donné, pas $A - B$).

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : différence de deux expressions**

(a) $A - B = (2x + 7) - (2x - 1) = 2x + 7 - 2x + 1 = 8 > 0$, donc $A > B$ pour tout réel x.

(b) $A - B = (3 - x) - (5 - x) = 3 - x - 5 + x = -2 < 0$, donc $A < B$ pour tout réel x.

(c) $A - B = x^2 + 2x - (x^2 + 2x + 1) = -1 < 0$, donc $A < B$ pour tout réel x.

(d) $A - B = 3x - 3 + 5 - (3x + 1) = 3x + 2 - 3x - 1 = 1 > 0$, donc $A > B$ pour tout réel x.

(e) $A - B = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12} > 0$, donc $A > B$ pour tout réel x.

Ex. 3 ★★☆ **Un carré caché dans la différence**

(a) $A - B = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$ (identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 4$).

(b) Un carré est positif ou nul, donc $A - B = (x - 4)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $A \geqslant B$ pour tout réel x.

(c) Non. $A = B$ équivaut à $(x - 4)^2 = 0$, soit $x = 4$. Pour $x = 4$: $A = 16 + 16 = 32$ et $B = 8 \times 4 = 32$, donc $A = B$. Un carré est positif ou nul, pas forcément strictement positif : on a seulement $A \geqslant B$, avec égalité pour $x = 4$.

(d) $C - B = x^2 - 8x + 17 = (x - 4)^2 + 1$. Or $(x - 4)^2 \geqslant 0$, donc $(x - 4)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$. Ainsi $C - B > 0$ et $C > B$ pour tout réel x.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux sur les comparaisons**

(a) Faux. Contre-exemple : $a = 0{,}5$ donne $0{,}5^2 - 0{,}5 = 0{,}25 - 0{,}5 = -0{,}25 < 0$, donc $0{,}5^2 < 0{,}5$.

(b) Vrai, mais deux tests ne suffisent pas pour le prouver. Pour tout réel x : $(x + 5)^2 - (x^2 + 10x) = x^2 + 10x + 25 - x^2 - 10x = 25 > 0$, donc $(x + 5)^2 > x^2 + 10x$.

(c) Vrai. $\frac{1}{7} - 0{,}142 = \frac{1000}{7000} - \frac{994}{7000} = \frac{6}{7000} = \frac{3}{3500} > 0$, donc $\frac{1}{7} > 0{,}142$.

(d) Faux. $B - A = -3$ donne $A - B = 3 > 0$, donc $A > B$.

(e) Faux. La variation absolue est $49{,}50 - 54{,}90 = -5{,}40$ € : le prix baisse de 5,40 €.

Ex. 5 ★★★ **Corriger la copie de Lucas**

(a) Le signe « − » devant la parenthèse change le signe de chaque terme, donc aussi celui de -1. Lucas a écrit -1 au lieu de $+1$. On a $B = 5x + 3 - (x - 1) = 5x + 3 - x + 1 = 4x + 4$.

(b) Si $B - A < 0$, alors $B < A$: quand une différence est négative, son premier terme est le plus petit. Avec sa différence, Lucas aurait donc dû conclure $A > B$, c'est-à-dire l'inverse de ce qu'il a écrit.

(c) $A - B = x^2 + 8 - (4x + 4) = x^2 - 4x + 4$. On reconnaît l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 2$.
Donc $A - B = (x - 2)^2$.

(d) Pour tout réel x, $A - B = (x - 2)^2$. Un carré est positif ou nul, donc $A - B \geqslant 0$, c'est-à-dire $A \geqslant B$.

(e) Faux. Tester deux valeurs ne prouve rien pour tous les réels : il faut un calcul valable pour tout x. De plus, $A - B = (x - 2)^2 = 0$ pour $x = 2$: $A = 2^2 + 8 = 12$ et $B = 4 \times 2 + 4 = 12$, donc $A = B$. On a seulement $A \geqslant B$: l'inégalité stricte est fausse pour $x = 2$.

Ex. 6 ★★★ **Comparer sans jamais arrondir**

(a) On écrit $0{,}6667 = \frac{6667}{10000}$. Alors $\frac{2}{3} - \frac{6667}{10000} = \frac{20000}{30000} - \frac{20001}{30000} = -\frac{1}{30000}$. La différence est strictement négative, donc $\frac{2}{3} < 0{,}6667$.

(b) On réduit au même dénominateur : $\frac{13}{14} - \frac{14}{15} = \frac{195}{210} - \frac{196}{210} = -\frac{1}{210}$. La différence est strictement négative, donc $\frac{13}{14} < \frac{14}{15}$.

Ex. 6 (suite)

(c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$. Le dénominateur est le produit de deux nombres strictement positifs, donc la différence est strictement négative. Ainsi $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$.

(d) On applique la question précédente avec l'entier $n = 2025 \geqslant 1$: $\frac{2025}{2026} - \frac{2026}{2027} = \frac{-1}{2026\times2027} < 0$.
Donc $\frac{2025}{2026} < \frac{2026}{2027}$. Des valeurs arrondies (environ 0,9995 pour les deux) ne permettraient pas de conclure.

Ex. 7 ★★★ Jardin partagé : périmètres et aires

(a) Le périmètre de P vaut $2 \times [(x+1)+(x+5)] = 2 \times (2x+6) = 4x+12$. Le périmètre de Q vaut $4 \times (x+3) = 4x+12$. Leur différence est nulle : P et Q ont le même périmètre, quel que soit $x > 0$.

(b) On calcule l'aire de Q moins l'aire de P : $(x+3)^2 - (x+1)(x+5) = x^2+6x+9-(x^2+6x+5) = 4$. Pour tout $x > 0$, la parcelle Q a une aire plus grande de 4 m² que la parcelle P. Cet écart est le même pour toutes les valeurs de x.

(c) On calcule l'aire de R moins l'aire de T : $x^2+12-6x = x^2-6x+9+3$. On reconnaît $x^2-6x+9 = (x-3)^2$.
Donc l'aire de R moins l'aire de T vaut $(x-3)^2+3$.

(d) Pour tout $x > 0$, $(x-3)^2 \geqslant 0$, donc $(x-3)^2+3 \geqslant 3 > 0$. La différence est strictement positive : l'aire de R est strictement supérieure à celle de T. Ici, la différence n'est pas un carré seul : c'est le terme +3 qui rend l'inégalité stricte.

(e) D'après la question précédente, l'écart vaut au moins 3 m². Il vaut exactement 3 m² seulement si $(x-3)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 3$. Le plus petit écart possible est donc 3 m², atteint pour $x = 3$ m.

2. *Comparer deux nombres positifs par leur quotient*

Ex. 8 ★☆☆ Automatismes : puissances et quotient

(a) $\frac{A}{B} = \frac{5^{12}}{4\times5^{11}} = \frac{5}{4}$. Comme $\frac{5}{4} > 1$, $A > B$.

(b) $\frac{A}{B} = \frac{3\times2^{20}}{2^{22}} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$. Comme $\frac{3}{4} < 1$, $A < B$.

(c) $6^{10} = 2^{10}\times3^{10}$, donc $\frac{A}{B} = \frac{2^{10}\times3^{10}}{2^{10}\times3^9} = 3$. Comme $3 > 1$, $A > B$.

(d) $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$, donc $\frac{A}{B} = \frac{3^{10}}{3^{11}} = \frac{1}{3}$. Comme $\frac{1}{3} < 1$, $A < B$.

(e) $A = \frac{2^4}{3^4}$, donc $\frac{A}{B} = \frac{2^4}{3^4}\times\frac{3^4}{2^5} = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} < 1$, $A < B$.

Ex. 8 (suite)

(f) $\frac{A}{B} = \frac{2^{15}\times5^3}{2^{13}\times5^4} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$. Comme $\frac{4}{5} < 1$, $A < B$.

Ex. 9 ★★☆ Automatismes : lire un rapport

(a) $\frac{8}{5} = 1{,}6$: le prix est multiplié par 1,6, soit une hausse de 60 %.

(b) $\frac{35}{50} = 0{,}7$: le prix est multiplié par 0,7 et $1-0{,}7 = 0{,}3$, soit une baisse de 30 %.

(c) $a = b + 0{,}15\times b = 1{,}15\times b$, donc $\frac{a}{b} = 1{,}15 > 1$.

(d) $0{,}6 < 1$ et a, b sont strictement positifs, donc $a < b$.
$a = 0{,}6\times b$ et $1-0{,}6 = 0{,}4$: a est 40 % plus petit que b.

(e) $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} = 0{,}5$: b vaut la moitié de a, il est 50 % plus petit que a.

(f) $a = 0{,}4\times b$, donc $\frac{a}{b} = 0{,}4$. Puis $\frac{b}{a} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ et $2{,}5-1 = 1{,}5$: b est 150 % plus grand que a (et pas 60 %).

Ex. 10 ★★☆ Vrai ou faux sur la règle du quotient

(a) Faux. Contre-exemple : $a = -12$ et $b = -4$. On a $\frac{a}{b} = \frac{-12}{-4} = 3 > 1$, mais $-12 < -4$. La règle n'est valable que si a et b sont strictement positifs.

(b) Faux. On compare le quotient à 1, pas à 0 : $\frac{a}{b} > 0$ dit seulement que a et b sont de même signe. Ici $0{,}9 < 1$ et a, b sont strictement positifs, donc $a < b$.

(c) Faux. A est une somme : la différence est la méthode directe. $A - B = 11^8 + 1 - 11^8 = 1 > 0$, donc $A > B$, sans aucun quotient.

(d) Vrai. $\frac{b}{a} = \frac{3}{4} = 0{,}75$, donc $b = 0{,}75\times a$ et $1-0{,}75 = 0{,}25$: b est 25 % plus petit que a (alors que a est environ 33 % plus grand que b).

Ex. 11 ★★☆ Démontrer la règle, puis comparer de grandes puissances

(a) $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a-b}{b}$. Comme $b > 0$, ce quotient a le signe de $a-b$.
Donc $\frac{a}{b} > 1 \iff \frac{a}{b} - 1 > 0 \iff a - b > 0 \iff a > b$.

(b) $2^{100} = (2^5)^{20} = 32^{20}$ et $3^{60} = (3^3)^{20} = 27^{20}$.

(c) $\frac{2^{100}}{3^{60}} = \frac{32^{20}}{27^{20}} = \left(\frac{32}{27}\right)^{20}$. Posons $q = \frac{32}{27} > 1$. En multipliant $q > 1$ par $q > 0$ (sens conservé) : $q^2 > q > 1$, et ainsi de suite jusqu'à $q^{20} > 1$. Les deux nombres sont strictement positifs, donc $2^{100} > 3^{60}$.

Ex. 11 **(suite)**

(d) $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ et $2^{70} = (2^7)^{10} = 128^{10}$, donc $\frac{5^{30}}{2^{70}} = \left(\frac{125}{128}\right)^{10}$. Posons $q = \frac{125}{128}$: $0 < q < 1$. En multipliant par $q > 0$: $q^2 < q < 1$, et ainsi de suite jusqu'à $q^{10} < 1$. Les deux nombres sont strictement positifs, donc $5^{30} < 2^{70}$.

Ex. 12 ★★★ **Puissances : bien lire le quotient**

(a) Ce sont des produits de puissances de nombres positifs, donc $A > 0$ et $B > 0$. On a $2^{n+3} = 2^3 \times 2^n = 8 \times 2^n$ et $2^n \times 3^n = 6^n$, donc $\frac{A}{B} = \frac{8\times 6^n}{7\times 6^n} = \frac{8}{7}$. Comme $\frac{8}{7} > 1$ et que A et B sont strictement positifs, on a $A > B$ pour tout entier naturel n.

(b) $E = 3^{18} \times 3^2 - 3^{18} = 3^{18} \times (9-1) = 8 \times 3^{18}$, donc $E > 0$; de même $F > 0$. $\frac{E}{F} = \frac{8\times 3^{18}}{25\times 3^{17}} = \frac{8\times 3}{25} = \frac{24}{25}$. Comme $\frac{24}{25} < 1$ et que E et F sont strictement positifs, on a $E < F$.

(c) $G = 4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30}$ et $H = 8^{10} = (2^3)^{10} = 2^{30}$. Donc $\frac{G}{H} = \frac{2^{30}}{2^{30}} = 1$, d'où $G = H$.

(d) $\frac{3^{20}}{3^{19}} = 3$, donc $3^{20} = 3 \times 3^{19}$: c'est bien le triple. Mais $3 - 1 = 2$: 3^{20} est 200 % plus grand que 3^{19}. Ali a tort : « 300 % de plus » correspondrait à un rapport de 4.

(e) Les trois nombres sont strictement positifs. $\frac{R}{S} = \frac{2^{40}}{9\times 2^{37}} = \frac{2^3}{9} = \frac{8}{9} < 1$, donc $R < S$. $\frac{T}{S} = \frac{5\times 2^{38}}{9\times 2^{37}} = \frac{10}{9} > 1$, donc $T > S$. Ainsi $R < S < T$.

Ex. 13 ★★★ **Le prix d'un vélo électrique**

(a) $\frac{2400}{1600} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Le prix a été multiplié par 1,5, ce qui fait une hausse de 50 %.

(b) La remise affichée serait de 50 %. Or $\frac{1600}{2400} = \frac{2}{3}$ et $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$: le prix a baissé d'environ 33,3 %. Le vendeur a tort : une hausse de 50 % est compensée par une baisse d'environ 33 %, et non de 50 %.

(c) Les écarts sont égaux : $2400 - 1600 = 800$ et $2800 - 2000 = 800$, soit +800 € dans les deux cas. Les rapports : $\frac{2400}{1600} = \frac{3}{2}$ et $\frac{2800}{2000} = \frac{7}{5}$. Ils sont strictement positifs et $\frac{3}{2} \div \frac{7}{5} = \frac{15}{14} > 1$, donc $\frac{3}{2} > \frac{7}{5}$. Les hausses sont égales en euros, mais pas en proportion : +50 % pour le premier vélo contre +40 % pour le second.

(d) On note $p > 0$ le prix initial. Le prix final vaut $p \times 1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99\,p$.
Donc $\frac{\text{prix final}}{p} = 0{,}99 < 1$ et les deux prix sont positifs : le prix final est inférieur au prix initial, de 1 %.

Ex. 14 ★★★ **Et si les nombres sont négatifs ?**

(a) $\frac{a}{b} = \frac{-5}{-20} = \frac{1}{4} < 1$. Pourtant $-5 > -20$, donc $a > b$. Avec deux nombres strictement négatifs, un quotient inférieur à 1 ne donne pas $a < b$: l'ordre est inversé.

(b) $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a-b}{b}$. Si $\frac{a}{b} > 1$, alors $\frac{a-b}{b} > 0$: le numérateur et le dénominateur sont de même signe. Comme $b < 0$, on a $a - b < 0$, donc $a < b$.

(c) A et B sont strictement négatifs. $\frac{A}{B} = \frac{-2^{31}}{-5\times 2^{28}} = \frac{2^3}{5} = \frac{8}{5} > 1$. D'après la question précédente, on a donc $A < B$. Vérification : $A - B = -8 \times 2^{28} + 5 \times 2^{28} = -3 \times 2^{28} < 0$.

(d) C et D ne sont pas de même signe, donc la règle du quotient ne s'applique pas. Il n'y a pas besoin de quotient : $C > 0$ et $D < 0$, donc $C > D$. La conclusion de l'élève est fausse.

3. *Opérations sur les inégalités*

Ex. 15 ★☆☆ **Appliquer une règle sur une inégalité**

(a) On ajoute -9 aux deux membres de $x < 5$. Ajouter un nombre ne change jamais le sens, même s'il est négatif : $x + (-9) < 5 - 9$, soit $x + (-9) < -4$.

(b) On multiplie les deux membres par $-3 < 0$, donc le sens change : $(-3) \times a \geqslant (-3) \times b$.

(c) On divise par $4 > 0$, donc le sens est conservé : $\frac{y}{4} > \frac{-2}{4}$, soit $\frac{y}{4} > -\frac{1}{2}$.

(d) On divise par $-2 < 0$, donc le sens change : $\frac{t}{-2} \leqslant \frac{6}{-2}$, soit $\frac{t}{-2} \leqslant -3$.

(e) Avec $k = 0$, on trouve $0 \times a = 0$ et $0 \times b = 0$: $0 \times a = 0 \times b$. L'inégalité stricte disparaît.

(f) On multiplie par $-1 < 0$, donc le sens change : $-x > -3$. Puis on ajoute 2, et le sens est conservé : $2 - x > -1$.

Ex. 16 ★☆☆ **Résoudre une inéquation simple**

(a) On divise par $-4 < 0$, donc le sens change : $x > -5$. $S =]-5\,;+\infty[$.

(b) On divise par $5 > 0$, donc le sens est conservé, même si -35 est négatif : $x \geqslant -7$. $S = [-7\,;+\infty[$.

(c) On ajoute 6, et le sens est conservé : $x > -2$. $S =]-2\,;+\infty[$.

(d) On soustrait 7 : $-2x \leqslant 6$. On divise par $-2 < 0$, donc le sens change : $x \geqslant -3$. $S = [-3\,;+\infty[$.

(e) On multiplie par $-3 < 0$, donc le sens change : $x < -6$. $S =]-\infty\,;-6[$.

Ex. 16 **(suite)**

(f) On soustrait $4x$: $1 < -2$, ce qui est faux quel que soit x. $S = \varnothing$.

Ex. 17 ★★☆ **Vrai ou faux sur les inégalités**

(a) Faux. Prenons $a = 2$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 6$: on a bien $2 < 3$ et $0 < 6$. Mais $a - c = 2$ et $b - d = -3$, et $2 < -3$ est faux. On ne soustrait pas deux inégalités membre à membre.

(b) Faux. Prenons $a = -5$, $b = 1$, $c = -4$, $d = 2$: on a bien $-5 < 1$ et $-4 < 2$. Mais $ac = 20$ et $bd = 2$, et $20 < 2$ est faux. On ne multiplie pas deux inégalités sans hypothèse de signe.

(c) Vrai. $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$. Or $b - a > 0$ car $a < b$, et $b > 0$: ce quotient est strictement positif.
Donc $1 - \frac{a}{b} > 0$, soit $\frac{a}{b} < 1$.

(d) Faux. Avec $k = 0$, $a = 1$, $b = 2$: $ka = kb = 0$, et $0 < 0$ est faux. Avec $k = -1$: $-1 < -2$ est faux aussi.
L'inégalité ne marche que pour $k > 0$.

(e) Faux. Avec $a = -3$ et $b = 1$: $-3 < 1$, mais $a^2 = 9$ et $b^2 = 1$, et $9 < 1$ est faux. Passer au carré n'est pas une des opérations de ce chapitre.

Ex. 18 ★★☆ **Encadrer des expressions**

(a) On multiplie par $5 > 0$, et le sens est conservé :
$5 \leqslant 5x \leqslant 20$. On soustrait 3 : $2 \leqslant 5x - 3 \leqslant 17$.
Donc $5x - 3$ est compris entre 2 et 17.

(b) On multiplie par $-2 < 0$, donc le sens change :
$-2 \geqslant -2x \geqslant -8$, soit $-8 \leqslant -2x \leqslant -2$. On ajoute 6 :
$-2 \leqslant 6 - 2x \leqslant 4$.

(c) Lina a soustrait les encadrements membre à membre, ce qui est interdit. Elle obtient même $3 \leqslant x - y \leqslant 1$, ce qui est absurde. On encadre d'abord $-y$ (on multiplie par -1, le sens change) : $-3 \leqslant -y \leqslant 2$. Puis on additionne avec l'encadrement de x : $-2 \leqslant x - y \leqslant 6$.

(d) On additionne membre à membre : $-1 \leqslant x + y \leqslant 7$. On divise par $2 > 0$, et le sens est conservé : $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{7}{2}$.

Ex. 19 ★★★ **Démontrer les règles par la différence**

(a) $\frac{b}{k} - \frac{a}{k} = \frac{b-a}{k}$. Comme $b - a > 0$ et $k > 0$, ce quotient est strictement positif.
Donc $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$: diviser par un positif conserve le sens.
Exemple : $a = 2$, $b = 5$, $k = 4$ donne $\frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4} > 0$.

(b) $kb - ka = k(b - a)$. Ici $k < 0$ et $b - a > 0$, donc ce produit est strictement négatif : $kb - ka < 0$, soit $ka > kb$. Multiplier par un nombre négatif change le sens. Par exemple $(-3) \times 5 - (-3) \times 2 = -9 < 0$.

Ex. 19 **(suite)**

(c) $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c)$. Or $b - a > 0$ car $a < b$, et $d - c > 0$ car $c < d$. Une somme de deux nombres strictement positifs est strictement positive.
Donc $(b + d) - (a + c) > 0$, c'est-à-dire $a + c < b + d$.

(d) $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$, qui est strictement positif car $b - a > 0$:
Donc $a < \frac{a+b}{2}$. De même, $b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$:
Donc $\frac{a+b}{2} < b$. Ainsi $a < \frac{a+b}{2} < b$.

(e) $b(d - c) + c(b - a) = bd - bc + bc - ac = bd - ac$. Or $b > 0$ et $d - c > 0$, donc $b(d - c) > 0$. Et $c > 0$ et $b - a > 0$, donc $c(b - a) > 0$. Une somme de deux nombres strictement positifs est strictement positive, donc $bd - ac > 0$, c'est-à-dire $ac < bd$.

Ex. 20 ★★★ **Clôturer un jardin partagé**

(a) On additionne membre à membre :
$12{,}4 + 7{,}8 \leqslant L + \ell \leqslant 12{,}6 + 8{,}1$, soit
$20{,}2 \leqslant L + \ell \leqslant 20{,}7$. On multiplie par $2 > 0$, le sens est conservé : $40{,}4 \leqslant P \leqslant 41{,}4$. Le périmètre est compris entre 40,4 m et 41,4 m.

(b) Faux. On ne soustrait pas les encadrements membre à membre : cela donnerait à tort $4{,}6 \leqslant L - \ell$. On multiplie par $-1 < 0$, le sens change :
$-8{,}1 \leqslant -\ell \leqslant -7{,}8$. On additionne avec l'encadrement de L : $4{,}3 \leqslant L - \ell \leqslant 4{,}8$. Avec $L = 12{,}4$ et $\ell = 8{,}1$, l'écart vaut 4,3 m, et $4{,}3 < 4{,}5$. Zoé a donc tort.

(c) Les longueurs sont positives. On multiplie $12{,}4 \leqslant L$ par $\ell > 0$: $12{,}4\,\ell \leqslant L\ell$. On multiplie $7{,}8 \leqslant \ell$ par $12{,}4 > 0$:
$12{,}4 \times 7{,}8 \leqslant 12{,}4\,\ell$.
Donc $12{,}4 \times 7{,}8 \leqslant L\ell$. De même,
$L\ell \leqslant 12{,}6\,\ell \leqslant 12{,}6 \times 8{,}1$.
Donc $96{,}72 \leqslant A \leqslant 102{,}06$
(en m^2).

(d) $C = 15P + 40$. On multiplie par $15 > 0$ (sens conservé) : $606 \leqslant 15P \leqslant 621$. On ajoute 40 (sens conservé) : $646 \leqslant C \leqslant 661$. Le coût est compris entre 646 € et 661 €.

(e) Non, on ne peut pas en être sûr. Le coût peut aller jusqu'à 661 €, et $661 > 650$. Si le jardin a ses dimensions maximales, le budget ne suffit pas. Il suffirait seulement si $C \leqslant 650$, ce que l'encadrement ne garantit pas.

Ex. 21 ★★★ **Une fonction affine décroissante**

(a) On multiplie par $-4<0$, donc le sens change. Inès a gardé le sens, et son encadrement est absurde car $6>-8$. On obtient $6\geqslant -4x\geqslant -8$, qu'on remet dans l'ordre croissant : $-8\leqslant -4x\leqslant 6$.

(b) On ajoute 9, le sens est conservé : $-8+9\leqslant -4x+9\leqslant 6+9$, soit $1\leqslant f(x)\leqslant 15$.

(c) On résout $3\leqslant -4x+9\leqslant 5$. On soustrait 9, le sens est conservé : $-6\leqslant -4x\leqslant -4$. On divise par $-4<0$, le sens change : $\frac{3}{2}\geqslant x\geqslant 1$, soit $1\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}$.
Donc $3\leqslant f(x)\leqslant 5$ pour $x\in\left[1\,;\frac{3}{2}\right]$.

(d) $-4x+9<2x-6 \iff -6x<-15$ (on a soustrait $2x$ et 9, le sens est conservé). On divise par $-6<0$, le sens change : $x>\frac{-15}{-6}=\frac{5}{2}$.
Donc $S=\left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

(e) Vrai. D'après la question précédente, $f(x)<2x-6$ seulement si $x>\frac{5}{2}$. Or tout x de $[-1{,}5\,;2]$ vérifie $x\leqslant 2<\frac{5}{2}$. Pour ces valeurs, on a donc $f(x)\geqslant 2x-6$.
Autre façon de le voir : $2x-6\leqslant 2\times 2-6=-2<1\leqslant f(x)$.

4. *Encadrements*

Ex. 22 ★☆☆ **Une opération à la fois**

(a) On soustrait 4 à chaque membre, le sens est conservé : $-3-4<x-4\leqslant 2-4$, soit $-7<x-4\leqslant -2$.

(b) On multiplie par $-4<0$: le sens change. On obtient $12>-4x\geqslant -8$. Dans l'ordre croissant : $-8\leqslant -4x<12$. Inès n'a pas changé le sens : elle obtient $12<-8$, ce qui est impossible. Le symbole strict reste du côté de la borne -3, qui donne 12.

(c) On multiplie par $-3<0$, le sens change : $9>-3x\geqslant -6$, soit $-6\leqslant -3x<9$. On ajoute 2 : $-4\leqslant 2-3x<11$.

(d) Pour x : $2-(-3)=5$. Pour $2-3x$: $11-(-4)=15$. L'amplitude a été multipliée par 3.

(e) Faux. On divise par $2>0$: $-1{,}5<\frac{x}{2}\leqslant 1$. Contre-exemple : pour $x=-2{,}5$, on a bien $-3<x\leqslant 2$, mais $\frac{x}{2}=-1{,}25<-1$.

Ex. 23 ★☆☆ **Somme et différence de deux encadrements**

(a) On additionne membre à membre : $2+(-1)<a+b<5+3$, soit $1<a+b<8$. Il suffit d'une inégalité stricte pour que le résultat soit strict.

Ex. 23 **(suite)**

(b) On multiplie par $-1<0$, le sens change : $1>-b>-3$, soit $-3<-b<1$.

(c) On additionne membre à membre $2\leqslant a\leqslant 5$ et $-3<-b<1$: $2+(-3)<a-b<5+1$, soit $-1<a-b<6$.

(d) Faux. On a trouvé $-1<a-b$: l'inégalité est stricte. En effet, si $a-b=-1$, alors $b=a+1\geqslant 2+1=3$, ce qui contredit $b<3$.

(e) $2>0$, le sens est conservé : $4\leqslant 2a\leqslant 10$. $-3<0$, le sens change : $3>-3b>-9$, soit $-9<-3b<3$. On additionne : $4+(-9)<2a-3b<10+3$, soit $-5<2a-3b<13$.

Ex. 24 ★★☆ **Un rectangle mesuré à la règle**

(a) Une valeur arrondie au mm près est à moins de 0,05 cm de la mesure : $6{,}35\leqslant L<6{,}45$ et $2{,}75\leqslant \ell<2{,}85$.

(b) On additionne membre à membre : $9{,}1\leqslant L+\ell<9{,}3$. On multiplie par $2>0$, le sens est conservé : $18{,}2\leqslant P<18{,}6$. Le périmètre est compris entre 18,2 cm et 18,6 cm.

(c) Toutes les bornes sont positives : quand on multiplie par une longueur positive, le sens est conservé. Donc $6{,}35\times 2{,}75\leqslant L\times\ell<6{,}45\times 2{,}85$, soit $17{,}4625\leqslant \mathcal{A}<18{,}3825$. L'aire est comprise entre $17{,}4625$ cm² et $18{,}3825$ cm².

(d) On encadre $-\ell$ (on multiplie par $-1<0$, le sens change) : $-2{,}85<-\ell\leqslant -2{,}75$. On additionne avec l'encadrement de L : $6{,}35-2{,}85<L-\ell<6{,}45-2{,}75$, soit $3{,}5<L-\ell<3{,}7$. L'écart est compris entre 3,5 cm et 3,7 cm.

Ex. 25 ★★☆ **Image d'un encadrement par une fonction affine**

(a) $f(x)=-4x+7$: le coefficient de x vaut $-4<0$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Non : $11<-3$ est faux. Comme f est décroissante, les bornes s'échangent. En détail, on multiplie par $-4<0$ (le sens change) : $4\geqslant -4x>-10$, soit $-10<-4x\leqslant 4$. On ajoute 7 : $-3<f(x)\leqslant 11$.

(c) On multiplie par $3>0$, le sens est conservé : $-3\leqslant 3x<7{,}5$. On ajoute 1 : $-2\leqslant g(x)<8{,}5$.

(d) Somme des encadrements : $-3+(-2)<f(x)+g(x)<11+8{,}5$, soit $-5<f(x)+g(x)<19{,}5$ (amplitude 24,5). En réduisant : $f(x)+g(x)=8-x$. Or $-2{,}5<-x\leqslant 1$, donc $5{,}5<8-x\leqslant 9$ (amplitude 3,5). Le second encadrement est le plus précis.

Ex. 26 ★★★ **Une différence mal encadrée**

(a) Yanis obtient $1-(-2)=3$ et $4-3=1$, soit $3 \leqslant x-y<1$. Cela donnerait $3<1$: c'est impossible. L'erreur : soustraire les deux encadrements membre à membre, ce qui est interdit. La borne inférieure de y a été retirée à la borne inférieure de x. Or $x-y$ est le plus petit quand x est petit et y grand.

(b) On multiplie $-2<y \leqslant 3$ par $-1<0$: le sens change. On obtient $2>-y \geqslant -3$, soit, dans l'ordre, $-3 \leqslant -y<2$. Le « $\leqslant$ » reste avec la borne 3, devenue -3. Le « $<$ » reste avec la borne -2, devenue 2.

(c) On additionne membre à membre $1 \leqslant x<4$ et $-3 \leqslant -y<2$. À gauche, les deux inégalités sont larges : $1+(-3)=-2 \leqslant x-y$. À droite, elles sont strictes : $x-y<4+2=6$.
Donc $-2 \leqslant x-y<6$. L'amplitude vaut $6-(-2)=8$. Celles de x et de y valent 3 et 5, et $3+5=8$: c'est la même. Les incertitudes s'additionnent, même pour une différence.

(d) $6-(x-y)=6-x+y=(4-x)+(y+2)$. Comme $x<4$, on a $4-x>0$. Comme $y>-2$, on a $y+2>0$. Une somme de deux nombres strictement positifs est strictement positive, donc $6-(x-y)>0$, soit $x-y<6$. On retrouve la borne de la question précédente.

Ex. 27 ★★★ **Une frise de carreaux**

(a) Une mesure arrondie au mm près à 3,7 cm est comprise entre $3{,}7-0{,}05$ et $3{,}7+0{,}05$.
Donc $3{,}65 \leqslant c<3{,}75$. La borne 3,65 s'arrondit à 3,7, elle est donc atteinte (inégalité large). La borne 3,75 s'arrondirait à 3,8, elle est donc exclue (inégalité stricte).

(b) On a $F=15c$. On multiplie par $15>0$, le sens est conservé : $15 \times 3{,}65 \leqslant 15c<15 \times 3{,}75$.
Donc $54{,}75 \leqslant F<56{,}25$ (en cm). L'amplitude vaut $56{,}25-54{,}75=1{,}5$ cm.

(c) L'encadrement autorise des valeurs de F comprises entre 56 et 56,25, par exemple $F=56{,}1$ cm, qui dépasse le rebord. L'encadrement ne permet donc pas de conclure. Maëlle ne peut pas être sûre que la frise tienne : il lui faudrait mesurer plus précisément.

Ex. 27 **(suite)**

(d) On a $A=c \times c$, avec $c>0$. À gauche : on multiplie $3{,}65 \leqslant c$ par $3{,}65>0$, ce qui donne $3{,}65^2 \leqslant 3{,}65c$. On le multiplie aussi par $c>0$, ce qui donne $3{,}65c \leqslant c^2$.
Donc $3{,}65^2 \leqslant c^2$. À droite : on multiplie $c<3{,}75$ par $c>0$, ce qui donne $c^2<3{,}75c$. On le multiplie aussi par $3{,}75>0$, ce qui donne $3{,}75c<3{,}75^2$.
Donc $c^2<3{,}75^2$. Conclusion : $13{,}3225 \leqslant A<14{,}0625$ (en cm²).

Ex. 28 ★★★ **La cuve qui se vide**

(a) $V(t_2)-V(t_1)=(120-15t_2)-(120-15t_1)=-15(t_2-t_1)$. Comme $t_1<t_2$, on a $t_2-t_1>0$. Le produit par $-15<0$ est donc strictement négatif. Ainsi $V(t_2)-V(t_1)<0$, soit $V(t_1)>V(t_2)$: la fonction V est décroissante.

(b) On part de $2<t \leqslant 5{,}5$. On multiplie par $-15<0$, le sens change : $-30>-15t \geqslant -82{,}5$, soit $-82{,}5 \leqslant -15t<-30$. On ajoute 120, le sens est conservé : $37{,}5 \leqslant V(t)<90$. À l'alarme, la cuve contenait au moins 37,5 L et strictement moins de 90 L.

(c) Vrai. $V(0)=120$ L, dont le quart vaut $\frac{120}{4}=30$ L. D'après la question précédente, à l'alarme, $V(t) \geqslant 37{,}5$, et $37{,}5>30$. La cuve contenait donc plus du quart de son contenu initial.

(d) On part de $48 \leqslant 120-15t \leqslant 75$. On soustrait 120 : $-72 \leqslant -15t \leqslant -45$. On divise par $-15<0$, le sens change : $4{,}8 \geqslant t \geqslant 3$, soit $3 \leqslant t \leqslant 4{,}8$. Ces valeurs sont bien dans $[0\,;8]$. Ensemble des solutions : $[3\,;4{,}8]$. Cela correspond aux instants situés entre 3 min et 4 min 48 s.

(e) L'encadrement de t a pour amplitude $5{,}5-2=3{,}5$. Celui de $V(t)$ a pour amplitude $90-37{,}5=52{,}5$, et $52{,}5=15 \times 3{,}5$. Multiplier par -15 multiplie l'écart entre les bornes par 15. Le signe $-$ échange seulement les bornes, il ne change pas l'amplitude. Ajouter 120 ne la change pas non plus.

5. *Résoudre une inéquation du premier degré*

Ex. 29 ★☆☆ **Isoler x : attention au signe du coefficient**

(a) $2x+9<14 \iff 2x<5 \iff x<\frac{5}{2}$: on divise par $2>0$, donc le sens est conservé. $S=\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$.

(b) $-5x \geqslant 15 \iff x \leqslant \frac{15}{-5}$: on divise par $-5<0$, donc le sens change. $x \leqslant -3$, $S=]-\infty\,;-3]$.

Ex. 29 **(suite)**

(c) $3x-4 \leqslant 3 \iff 3x \leqslant 7 \iff x \leqslant \frac{7}{3}$: on divise par $3>0$, donc le sens est conservé. $S=\left]-\infty\,;\frac{7}{3}\right]$ (valeur exacte, pas 2,33).

(d) $8-6x>11 \iff -6x>3 \iff x<\frac{3}{-6}$: on divise par $-6<0$, donc le sens change. $x<-\frac{1}{2}$, $S=\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$.

(e) $7-x \leqslant 0 \iff -x \leqslant -7 \iff x \geqslant 7$: on multiplie par $-1<0$, donc le sens change. $S=[7\,;+\infty[$.

(f) $-\frac{x}{4}<2 \iff x>2\times(-4)$: on multiplie par $-4<0$, donc le sens change. $x>-8$, $S=]-8\,;+\infty[$.

Ex. 30 ★☆☆ **Des x dans les deux membres**

(a) $8x-5>3x+10 \iff 8x-3x>10+5 \iff 5x>15 \iff x>3$: on divise par $5>0$, donc le sens est conservé. $S=]3\,;+\infty[$.

(b) $x-4x \leqslant -3-8 \iff -3x \leqslant -11 \iff x \geqslant \frac{11}{3}$: on divise par $-3<0$, donc le sens change. $S=\left[\frac{11}{3}\,;+\infty\right[$.

(c) $-7x-3x<6-2 \iff -10x<4 \iff x>-\frac{4}{10}$: on divise par $-10<0$, donc le sens change. $x>-\frac{2}{5}$, $S=\left]-\frac{2}{5}\,;+\infty\right[$.

(d) $3x-3x \geqslant -1-5 \iff 0 \geqslant -6$: c'est vrai pour tout réel x. $S=\mathbb{R}$.

(e) $6x-6x>2+4 \iff 0>6$: c'est faux pour tout réel x. $S=\varnothing$.

(f) $9x-2x \leqslant 1-1 \iff 7x \leqslant 0 \iff x \leqslant 0$: on divise par $7>0$, donc le sens est conservé. $S=]-\infty\,;0]$.

Ex. 31 ★★☆ **Trouve l'erreur**

(a) L'erreur est dans le développement : $-2(x-4)=-2x+8$, pas $-2x-8$. On reprend : $-2x+8 \geqslant 3x \iff -5x \geqslant -8 \iff x \leqslant \frac{8}{5}$, car on divise par $-5<0$ et le sens change. $S=\left]-\infty\,;\frac{8}{5}\right]$.

(b) Test : -5 est dans l'ensemble de Malik, mais $5-3\times(-5)=20$ et $20<17$ est faux, donc son ensemble est faux. Son erreur : il divise par $-3<0$ sans changer le sens. On reprend : $5-3x<17 \iff -3x<12 \iff x>\frac{12}{-3}$ (on divise par $-3<0$, le sens change) $\iff x>-4$. $S=]-4\,;+\infty[$. Contrôle : $0\in S$ et $5-3\times 0=5<17$ est vrai.

(c) Chloé n'a pas multiplié -2 par 12. Il faut multiplier tous les termes par $12>0$, et le sens est conservé : $3x-24 \leqslant 2x \iff x \leqslant 24$. $S=]-\infty\,;24]$.

Ex. 31 **(suite)**

(d) Le calcul est juste, mais le crochet est faux. Pour $x=\frac{5}{4}$, les deux membres valent $\frac{31}{4}$, et $\frac{31}{4}>\frac{31}{4}$ est faux. L'inégalité est stricte, donc le crochet est ouvert : $S=\left]\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$.

Ex. 32 ★★☆ **Fractions, borne et vérification**

(a) On multiplie par $6>0$, donc le sens est conservé : $2(x+2)-3(x-1) \geqslant 12 \iff 2x+4-3x+3 \geqslant 12 \iff -x+7 \geqslant 12$. Attention : $-3(x-1)=-3x+3$.

(b) $-x+7 \geqslant 12 \iff -x \geqslant 5 \iff x \leqslant -5$: on multiplie par $-1<0$, donc le sens change. L'ensemble des solutions de (I) est $S=]-\infty\,;-5]$.

(c) Les mêmes étapes avec « $=$ » donnent $-x+7=12 \iff x=-5$. L'équation a une seule solution, -5, qui est la borne de S. L'inéquation en a une infinité : tous les réels de $]-\infty\,;-5]$. Répondre « $x=-5$ » ne résout donc pas (I).

(d) Pour $x=-5$: $\frac{-3}{3}-\frac{-6}{2}=-1+3=2$. Comme $2 \geqslant 2$ est vrai, -5 est solution de (I) (inégalité large, crochet fermé). Comme $2>2$ est faux, -5 n'est pas solution de l'inéquation stricte : son ensemble est $]-\infty\,;-5[$.

(e) Pour $x=-11\in S$: $\frac{-9}{3}-\frac{-12}{2}=-3+6=3$, et $3 \geqslant 2$ est vrai. Pour $x=1\notin S$: $\frac{3}{3}-\frac{0}{2}=1$, et $1 \geqslant 2$ est faux. Les deux tests sont cohérents avec $S=]-\infty\,;-5]$.

Ex. 33 ★★★ **Aucune solution, ou toutes ?**

(a) $3(2x-1)-2(x+4)=6x-3-2x-8=4x-11$. Donc (A) $\iff 4x-11 \leqslant 4x-11 \iff 4x-4x \leqslant -11+11 \iff 0 \leqslant 0$. Cette inégalité est vraie quelle que soit la valeur de x, donc tout réel est solution : $S=\mathbb{R}$.

(b) À gauche : $-3(x-2)+7x=-3x+6+7x=4x+6$ (attention : $(-3)\times(-2)=+6$). À droite : $4(x+1)+2=4x+4+2=4x+6$. Donc (B) $\iff 4x+6>4x+6 \iff 0>0$. Cette inégalité est fausse quel que soit x, donc aucun réel n'est solution : $S=\varnothing$.

(c) Non. L'inégalité $0>0$ ne contient plus x : elle est fausse pour tous les réels, donc (B) n'a aucune solution, $S=\varnothing$. Pour $x=0$: à gauche $(-3)\times(0-2)+7\times 0=6$, à droite $4\times(0+1)+2=6$; or $6>6$ est faux, donc 0 n'est pas solution. Lina confond l'inégalité obtenue avec une valeur de x.

Ex. 33 **(suite)**

(d) $-3(x-2)+7x > 4x+k \iff 4x+6 > 4x+k \iff 6 > k$. Les termes en x disparaissent. Si $k < 6$, l'inégalité $6 > k$ est vraie et $S = \mathbb{R}$. Si $k \geqslant 6$, elle est fausse et $S = \varnothing$ (pour $k = 6$, on retrouve (B)).

Ex. 34 ★★★ **Sweats de l'association : deux fournisseurs**

(a) Prix A : $80 + 8n$; prix B : $14n$. $80 + 8n < 14n \iff 80 < 14n - 8n \iff 80 < 6n \iff n > \frac{80}{6}$ (on divise par $6 > 0$, le sens est conservé), soit $n > \frac{40}{3}$. Dans $\mathbb{R}$: $S = \left]\frac{40}{3} ; +\infty\right[$.

(b) Non. $\frac{40}{3} \approx 13{,}33$ et $13 < \frac{40}{3}$, donc 13 n'est pas dans S. Vérification : pour 13 sweats, A coûte $80 + 8 \times 13 = 184$ € et B coûte $14 \times 13 = 182$ € : A est plus chère. Pour 14 sweats, A coûte $80 + 8 \times 14 = 192$ € et B $14 \times 14 = 196$ € : A est moins chère. Conclusion : A est strictement moins chère à partir de 14 sweats.

(c) Bénéfice : $19(n-6) - (80+8n) = 19n - 114 - 80 - 8n = 11n - 194$. $11n - 194 \geqslant 200 \iff 11n \geqslant 394 \iff n \geqslant \frac{394}{11}$ (division par $11 > 0$, sens conservé). Or $\frac{394}{11} \approx 35{,}8$ et n est entier, donc $n \geqslant 36$. Contrôle : $n = 36$ donne $19 \times 30 - 368 = 202 \geqslant 200$; $n = 35$ donne $19 \times 29 - 360 = 191 < 200$. Il faut commander au moins 36 sweats.

(d) Nouveau prix B : $\frac{3}{4} \times 14n = \frac{21n}{2}$. $80 + 8n < \frac{21n}{2} \iff 160 + 16n < 21n$ (on multiplie tous les termes par $2 > 0$, le sens est conservé) $\iff 160 < 5n \iff n > 32$ (division par $5 > 0$). Pour $n = 32$, les deux prix valent 336 € : il y a égalité, donc A n'est pas strictement moins chère. Pour $n = 33$, A coûte 344 € et B coûte 346,5 €. Conclusion : A est strictement moins chère à partir de 33 sweats.

Ex. 35 ★★★ **Une inéquation qui dépend d'un réel m**

(a) $mx + 3 \leqslant 2x + 7 \iff mx - 2x \leqslant 7 - 3 \iff (m-2)x \leqslant 4$ (on a soustrait $2x$ et 3 aux deux membres). Donc $c = 4$.

(b) $(I_5) \iff (5-2)x \leqslant 4 \iff 3x \leqslant 4 \iff x \leqslant \frac{4}{3}$ (division par $3 > 0$, sens conservé). $S = \left]-\infty ; \frac{4}{3}\right]$. Nora a tort : 1,33 n'est qu'une valeur approchée et $1{,}33 < \frac{4}{3}$. Par exemple, $\frac{4}{3}$ est solution ($5 \times \frac{4}{3} + 3 = \frac{29}{3}$ et $2 \times \frac{4}{3} + 7 = \frac{29}{3}$, et $\frac{29}{3} \leqslant \frac{29}{3}$ est vrai), mais $\frac{4}{3}$ n'est pas dans son ensemble.

(c) $(I_{-2}) \iff (-2-2)x \leqslant 4 \iff -4x \leqslant 4 \iff x \geqslant \frac{4}{-4}$ (on divise par $-4 < 0$, le sens change) $\iff x \geqslant -1$. $S = [-1 ; +\infty[$.

Ex. 35 **(suite)**

(d) $(I_2) \iff 0 \times x \leqslant 4 \iff 0 \leqslant 4$, vrai pour tout x : $S = \mathbb{R}$. Non, aucun m ne donne $\varnothing$. Si $m = 2$, $S = \mathbb{R}$. Si $m > 2$, on divise par $m - 2 > 0$ (sens conservé) : $S = \left]-\infty ; \frac{4}{m-2}\right]$. Si $m < 2$, on divise par $m - 2 < 0$ (le sens change) : $S = \left[\frac{4}{m-2} ; +\infty\right[$. Dans tous les cas, S n'est pas vide.

(e) Un ensemble de la forme $]-\infty ; a]$ n'apparaît que si $m - 2 > 0$. Sinon, $S = \mathbb{R}$ (si $m = 2$) ou S est de la forme $[a ; +\infty[$ (si $m < 2$). Pour $m > 2$, $(I_m) \iff x \leqslant \frac{4}{m-2}$. Il faut $\frac{4}{m-2} = \frac{1}{2} \iff m - 2 = 8 \iff m = 10$, qui vérifie bien $m > 2$. Vérification : $(I_{10}) \iff 8x \leqslant 4 \iff x \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $m = 10$.

6. *Écrire l'ensemble des solutions avec un intervalle*

Ex. 36 ★☆☆ **De l'inégalité à l'intervalle, et retour**

(a) La borne -4 est solution (inégalité large), donc crochet fermé ; ouvert du côté de $-\infty$: $]-\infty ; -4]$.

(b) Inégalité stricte, donc $\frac{3}{5}$ n'est pas solution : crochet ouvert en $\frac{3}{5}$, et toujours ouvert en $+\infty$: $\left]\frac{3}{5} ; +\infty\right[$.

(c) Le crochet est fermé en $-2{,}5$: $x \geqslant -2{,}5$.

(d) Le crochet est ouvert en 7 : $x < 7$.

(e) Le crochet est toujours ouvert du côté de $+\infty$: $S = [1 ; +\infty[$.

(f) On écrit la plus petite borne à gauche, et le crochet est ouvert en -6 (inégalité stricte) : $S =]-\infty ; -6[$.

Ex. 37 ★☆☆ **Résoudre et conclure par un intervalle**

(a) $4x < 20$; on divise par $4 > 0$, le sens est conservé : $x < 5$. $S =]-\infty ; 5[$.

(b) $-2x \leqslant 6$; on divise par $-2 < 0$, le sens change : $x \geqslant -3$. $S = [-3 ; +\infty[$.

(c) $3x > -5$; on divise par $3 > 0$, le sens est conservé : $x > -\frac{5}{3}$. $S = \left]-\frac{5}{3} ; +\infty\right[$.

(d) $13 + 2 \geqslant 4x + x$, soit $15 \geqslant 5x$; on divise par $5 > 0$: $3 \geqslant x$, donc $x \leqslant 3$. $S =]-\infty ; 3]$.

(e) $6x - 6x \leqslant -1 - 2$, soit $0 \leqslant -3$: c'est faux pour tout x. $S = \varnothing$.

(f) $2x + 6 > 2x - 1$, soit $6 > -1$: c'est vrai pour tout x. $S = \mathbb{R}$.

Ex. 38 ★★☆ **Une borne ouverte et des entiers**

(a) On multiplie par $12 > 0$, le sens est conservé : $3x - 2(2x-1) < 12$, soit $3x - 4x + 2 < 12$, donc $-x < 10$. On divise par $-1 < 0$, le sens change : $x > -10$. $S =]-10\,;+\infty[$.

(b) Pour $x = -10$: $\frac{-10}{4} - \frac{2\times(-10)-1}{6} = -2{,}5 - \frac{-21}{6} = -2{,}5 + 3{,}5 = 1$, et $1 < 1$ est faux. La borne est ouverte : $-10 \notin S$.

(c) Les solutions vérifient $x > -10$; le plus petit entier strictement supérieur à -10 est -9. Vérification : $\frac{-9}{4} - \frac{-19}{6} = \frac{-27+38}{12} = \frac{11}{12} < 1$. Le plus petit entier solution est -9.

(d) Non : si l'entier n est solution, alors $n+1 > n > -10$, donc $n+1$ est aussi solution. Il n'y a pas de plus grand entier solution, car S va jusqu'à $+\infty$.

Ex. 39 ★★☆ **Même ensemble de solutions ?**

(a) (A) : $-3x < 6$; on divise par $-3 < 0$, le sens change : $x > -2$. (B) : $2x > -4$; on divise par $2 > 0$: $x > -2$. Les deux ont pour ensemble $S =]-2\,;+\infty[$: c'est le même ensemble.

(b) (C) : $-x \leqslant 2$; on divise par $-1 < 0$, le sens change : $x \geqslant -2$, donc $S_C = [-2\,;+\infty[$. Pour $x = -2$: $5 + 2 = 7 \leqslant 7$ est vrai, mais $6 + 4 = 10 < 10$ est faux. -2 est solution de (C) mais pas de (A) : Inès a tort.

(c) (D) : $3x - 6 \geqslant 3x + 1 \iff -6 \geqslant 1$, faux pour tout x : $S_D = \varnothing$. Seconde inéquation : $3x - 6 \geqslant 3x - 7 \iff -6 \geqslant -7$, vrai pour tout x : $S = \mathbb{R}$. Dans les deux cas, les termes en x disparaissent, mais $\varnothing \neq \mathbb{R}$: les deux ensembles ne sont pas les mêmes.

(d) $6x + c > 0 \iff 6x > -c \iff x > -\frac{c}{6}$ (on divise par $6 > 0$, le sens est conservé). Il faut $-\frac{c}{6} = -2$, soit $c = 12$. Vérification : $6x + 12 > 0 \iff x > -2$. Donc $c = 12$.

Ex. 40 ★★★ **La copie de Lina**

(a) Pour $x = 0$: $-4 \times 0 + 9 = 9$ et $2 \times 0 - 7 = -7$. Comme $9 \geqslant -7$ est vrai, 0 est solution de (1). Or $0 \notin \left[\frac{8}{3}\,;+\infty\right[$: la réponse de Lina est donc fausse. Résolution : $-4x + 9 \geqslant 2x - 7 \iff -4x - 2x \geqslant -7 - 9 \iff -6x \geqslant -16$. On divise par $-6 < 0$, donc le sens change : $x \leqslant \frac{16}{6}$, soit $x \leqslant \frac{8}{3}$. Lina a oublié de changer le sens. $S = \left]-\infty\,;\frac{8}{3}\right]$.

Ex. 40 (suite)

(b) S est un ensemble. « $S = 0$ » n'en est pas un, et le nombre 0 n'est d'ailleurs pas solution : pour $x = 0$, on obtient $-2 \geqslant 1$, ce qui est faux. Résolution : $2(3x - 1) \geqslant 6x + 1 \iff 6x - 2 \geqslant 6x + 1 \iff -2 \geqslant 1$. Les termes en x disparaissent et l'inégalité $-2 \geqslant 1$ est fausse pour tout réel x. Aucun réel n'est solution : $S = \varnothing$.

(c) $4(x+2) - x > 3x + 5 \iff 4x + 8 - x > 3x + 5 \iff 3x + 8 > 3x + 5 \iff 8 > 5$. Les termes en x disparaissent, mais l'inégalité $8 > 5$ est vraie pour tout réel x.
Donc $S = \mathbb{R}$. Lina a tort : quand les x disparaissent, on obtient $S = \varnothing$ si l'inégalité restante est fausse et $S = \mathbb{R}$ si elle est vraie.

(d) Oui. Pour $x = \frac{8}{3}$: $-4 \times \frac{8}{3} + 9 = -\frac{5}{3}$ et $2 \times \frac{8}{3} - 7 = -\frac{5}{3}$, et $-\frac{5}{3} \geqslant -\frac{5}{3}$ est vrai. L'inégalité est large : la borne est solution, le crochet est fermé. Comme $\frac{8}{3} \approx 2{,}67$, les entiers solutions sont ceux qui sont inférieurs ou égaux à $\frac{8}{3}$. Le plus grand entier solution de (1) est 2.

Ex. 41 ★★★ **Une inéquation qui dépend de m**

(a) $(E_5) : 5x + 3 \leqslant 2x + 7 \iff 5x - 2x \leqslant 7 - 3 \iff 3x \leqslant 4$. On divise par $3 > 0$, donc le sens est conservé : $x \leqslant \frac{4}{3}$. $S = \left]-\infty\,;\frac{4}{3}\right]$. $(E_{-1}) : -x + 3 \leqslant 2x + 7 \iff -x - 2x \leqslant 7 - 3 \iff -3x \leqslant 4$. On divise par $-3 < 0$, donc le sens change : $x \geqslant -\frac{4}{3}$. $S = \left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$ (la plus petite borne, $-\frac{4}{3}$, s'écrit à gauche).

(b) $(E_2) : 2x + 3 \leqslant 2x + 7 \iff 3 \leqslant 7$. Les termes en x disparaissent et l'inégalité $3 \leqslant 7$ est vraie pour tout réel x.
Donc $S = \mathbb{R}$: tous les réels sont solutions, il y en a une infinité.

(c) $mx + 3 \leqslant 2x + 7 \iff mx - 2x \leqslant 7 - 3 \iff (m-2)x \leqslant 4$. $S = [-1\,;+\infty[$ s'écrit $x \geqslant -1$: le sens doit changer, donc $m - 2 < 0$. La borne -1 vérifie l'égalité $(m-2) \times (-1) = 4$, soit $-m + 2 = 4$, donc $m = -2$. Vérification : (E_{-2}) s'écrit $-2x + 3 \leqslant 2x + 7 \iff -4x \leqslant 4$; on divise par $-4 < 0$, le sens change : $x \geqslant -1$. Conclusion : $m = -2$.

Ex. 41 **(suite)**

(d) On utilise $(m-2)x \leqslant 4$. Si $m=2$: $S=\mathbb{R}$. Si $m>2$: on divise par $m-2>0$, le sens est conservé, $x \leqslant \frac{4}{m-2}$ et $S=\left]-\infty\,;\frac{4}{m-2}\right]$, qui n'est pas de la forme $[4\,;+\infty[$. Si $m<2$: le sens change, $x \geqslant \frac{4}{m-2}$; or $\frac{4}{m-2}<0$ (un nombre positif divisé par un nombre négatif), donc la borne ne peut pas valoir 4. Par exemple, pour $m=3$, on obtient $S=]-\infty\,;4]$. Conclusion : aucun réel m ne convient.

Ex. 42 ★★★ **Carte ou entrée à l'unité ?**

(a) Entrée à l'unité : $11x$ €. Carte : $60+6x$ €. La carte coûte strictement moins cher lorsque $60+6x<11x$.

(b) $60+6x<11x \iff 60<11x-6x \iff 60<5x$. On divise par $5>0$, donc le sens est conservé : $12<x$. $S=]12\,;+\infty[$. L'inégalité est stricte, donc le crochet est ouvert et $12 \notin S$. En effet, pour $x=12$: $60+6\times 12=132$ et $11\times 12=132$. Les deux prix sont égaux, donc la carte n'est pas strictement moins chère.

(c) x est un nombre entier et $x>12$: le plus petit entier de S est 13. Vérification : avec la carte, $60+6\times 13=138$ € ; à l'unité, $11\times 13=143$ €, et $138<143$. La carte est plus avantageuse à partir de 13 séances.

(d) $11x \leqslant 60+6x \iff 11x-6x \leqslant 60 \iff 5x \leqslant 60$. On divise par $5>0$, donc le sens est conservé : $x \leqslant 12$. $S=]-\infty\,;12]$. Le crochet du côté de $-\infty$ est toujours ouvert, car $-\infty$ n'est pas un nombre. Le crochet en 12 est fermé, car 12 est solution. Dans le contexte : l'entrée à l'unité ne coûte pas plus cher que la carte jusqu'à 12 séances.

(e) $60+6x<11x \iff 0<11x-6x-60$ (on soustrait $60+6x$ aux deux membres) $\iff 0<5x-60 \iff 0<0{,}5x-6$ (on divise par $10>0$, donc le sens est conservé). Les inéquations sont équivalentes à chaque étape. Elles ont donc le même ensemble de solutions.

7. *Modéliser un problème par une inéquation*

Ex. 43 ★☆☆ **Traduire une phrase par une inégalité**

(a) « Ne dépasse pas » : $p \leqslant 25$.

(b) « Plus de » : $s>40$.

(c) « Pas moins de » veut dire « au moins » : $b \geqslant 12$.

(d) La recette vaut $3\times c$, et « plus de » donne $3c>150$.

(e) Le double de t augmenté de 1 s'écrit $2t+1$; « au minimum » donne $2t+1 \geqslant 9$.

Ex. 43 **(suite)**

(f) « Moins de » : $m<23$.

(g) « Au plus » autorise la valeur 30 : il faut écrire $e \leqslant 30$, et non $e<30$ (une classe de 30 élèves est possible).

Ex. 44 ★★☆ **Inconnue entière : arrondir dans le bon sens**

(a) On divise par $6>0$, le sens est conservé : $n \geqslant 7{,}5$. Comme n est entier, la plus petite valeur possible est $n=8$.

(b) « Ne dépasse pas » : $70n \leqslant 500$. On divise par $70>0$, le sens est conservé : $n \leqslant \frac{50}{7} \approx 7{,}1$. Comme n est entier, on arrondit vers le bas : au plus $n=7$ caisses. Contrôle : $70\times 7=490 \leqslant 500$ et $70\times 8=560>500$.

(c) On divise par $4>0$: $n>9$. L'inégalité est stricte, donc 9 n'est pas solution : la plus petite valeur possible est $n=10$.

(d) « Au moins » : $3n \geqslant 27$. On divise par $3>0$, le sens est conservé : $n \geqslant 9$. L'égalité est permise : il faut au minimum $n=9$ seaux.

(e) On divise par $8>0$: $n<7$. L'inégalité est stricte, donc 7 n'est pas solution : la plus grande valeur possible est $n=6$.

(f) $\frac{70}{9} \approx 7{,}8$, mais avec « $\leqslant$ » on arrondit vers le bas, et non à l'entier le plus proche : n vaut au plus 7. Contrôle : $9\times 7=63 \leqslant 70$, mais $9\times 8=72>70$.

Ex. 45 ★★☆ **Deux formules pour la piscine**

(a) Soit n le nombre d'entrées dans l'année : c'est un entier positif. On a $P_A=7n$ et $P_B=32+4{,}5n$ (en €).

(b) $P_B<P_A \iff 32+4{,}5n<7n \iff 32<2{,}5n$. On divise par $2{,}5>0$, le sens est conservé : $n>12{,}8$.

(c) n est un entier et $n>12{,}8$, donc $n \geqslant 13$. La formule B est moins chère que la formule A à partir de 13 entrées.

(d) Pour 12 entrées : $P_A=84$ € et $P_B=32+54=86$ €, donc A est moins chère. Pour 13 entrées : $P_A=91$ € et $P_B=32+58{,}5=90{,}5$ €, donc B est moins chère. La réponse est confirmée.

Ex. 46 ★★☆ **La moyenne de Yanis**

(a) Soit x la note du dernier contrôle, avec $0 \leqslant x \leqslant 20$. On a $M=\frac{2\times 8+1\times 11+3x}{2+1+3}=\frac{27+3x}{6}$.

Ex. 46 **(suite)**

(b) $\frac{27+3x}{6} \geqslant 10$. On multiplie par $6 > 0$: $27 + 3x \geqslant 60$, donc $3x \geqslant 33$. On divise par $3 > 0$: $x \geqslant 11$. Yanis doit obtenir au moins 11 sur 20.

(c) Avec $x = 11$: $M = \frac{27+33}{6} = \frac{60}{6} = 10$. On obtient bien 10 de moyenne
(cas d'égalité, autorisé par « au moins »).

(d) $\frac{27+3x}{6} \geqslant 15 \iff 27 + 3x \geqslant 90 \iff 3x \geqslant 63 \iff x \geqslant 21$. Une note sur 20 ne peut pas dépasser 20, donc il n'a pas raison : c'est impossible. Même avec 20, sa moyenne vaut $\frac{87}{6} = 14{,}5$.

Ex. 47 ★★★ **Trois offres pour un utilitaire**

(a) Soit x la distance parcourue dans la journée, en km : c'est un réel positif ou nul, $x \geqslant 0$. On a $P_A = 45 + 0{,}3x$, $P_B = 25 + 0{,}5x$ et $P_C = 120$.

(b) $P_A < P_B \iff 45 + 0{,}3x < 25 + 0{,}5x \iff 20 < 0{,}2x$. On divise par $0{,}2 > 0$: le sens est conservé, donc $x > 100$. Avec $x \geqslant 0$: $S =]100\,;+\infty[$. Égalité : pour $x = 100$, $P_A = 45 + 30 = 75$ et $P_B = 25 + 50 = 75$. Les deux offres coûtent alors le même prix, donc 100 n'est pas solution. L'offre A est strictement moins chère dès que Sacha parcourt plus de 100 km.

(c) $P_C < P_A \iff 120 < 45 + 0{,}3x \iff 75 < 0{,}3x$. On divise par $0{,}3 > 0$: le sens est conservé, donc $x > 250$ et $S =]250\,;+\infty[$. Pour $x = 250$, $P_A = 45 + 75 = 120 = P_C$: il y a égalité. L'offre C est strictement moins chère que A pour plus de 250 km.

(d) $P_C < P_B \iff 120 < 25 + 0{,}5x \iff 95 < 0{,}5x \iff x > 190$ (on divise par $0{,}5 > 0$, le sens est conservé). Pour $0 \leqslant x < 100$: $P_B < P_A$ et $x < 190$, donc $P_B < P_C$; B est la moins chère. Pour $100 < x < 250$: $P_A < P_B$ et $P_A < P_C$; A est la moins chère. Pour $x > 250$: $P_C < P_A$ et, comme $x > 190$, $P_C < P_B$; C est la moins chère. Conclusion : Sacha choisit B pour moins de 100 km, A entre 100 et 250 km et C au-delà de 250 km. À 100 km, A et B coûtent toutes les deux 75 € ; à 250 km, A et C coûtent toutes les deux 120 €.

Ex. 48 ★★★ **Le spectacle du club de théâtre**

(a) n est un entier tel que $0 \leqslant n \leqslant 150$. La recette vaut $8n$ et les dépenses $450 + 2{,}5n$.
Donc $B = 8n - (450 + 2{,}5n) = 5{,}5n - 450$.

Ex. 48 **(suite)**

(b) $B > 0 \iff 5{,}5n > 450 \iff n > \frac{450}{5{,}5} \approx 81{,}8$ (on divise par $5{,}5 > 0$, le sens est conservé). Comme n est entier, on arrondit vers le haut : $n \geqslant 82$. Vérification : pour $n = 82$, $B = 451 - 450 = 1 > 0$; pour $n = 81$, $B = 445{,}5 - 450 = -4{,}5 < 0$. Il faut au moins 82 spectateurs.

(c) $5{,}5n - 450 \geqslant 400 \iff 5{,}5n \geqslant 850 \iff n \geqslant \frac{850}{5{,}5} \approx 154{,}5$ (on divise par $5{,}5 > 0$, le sens est conservé), donc $n \geqslant 155$. Or la salle n'a que 150 places, donc $n \leqslant 150$. Aucun entier ne convient : salle pleine, le bénéfice vaut au plus $5{,}5 \times 150 - 450 = 375$ €. Le club ne peut donc pas atteindre 400 € avec ce tarif.

(d) Il y a $150 - k$ billets vendus et 150 boissons offertes : $B = 8(150 - k) - (450 + 2{,}5 \times 150) = 1200 - 8k - 825 = 375 - 8k$. $375 - 8k \geqslant 300 \iff -8k \geqslant -75$. On divise par $-8 < 0$, le sens change : $k \leqslant 9{,}375$. k est entier, on arrondit vers le bas : $k \leqslant 9$. Contrôle : $375 - 8 \times 9 = 303 \geqslant 300$ et $375 - 8 \times 10 = 295 < 300$. Le club peut donner au plus 9 invitations.

(e) Avec 120 spectateurs : $B = 120p - (450 + 2{,}5 \times 120) = 120p - 750$. $120p - 750 \geqslant 400 \iff 120p \geqslant 1150 \iff p \geqslant \frac{1150}{120} \approx 9{,}583$. On arrondit vers le haut au centime : $p = 9{,}59$ €. Avec 9,58 €, on aurait $120 \times 9{,}58 - 750 = 399{,}60 < 400$. Avec 9,59 €, on a $120 \times 9{,}59 - 750 = 400{,}80 \geqslant 400$. Le billet doit coûter au moins 9,59 €.

Ex. 49 ★★★ **Économies de Lina, dépenses de Noé**

(a) n est un entier naturel ($n \geqslant 0$). On a $L = 140 + 30n$ et $N = 410 - 20n$.

(b) Première erreur : Hugo divise par $-20 < 0$ sans changer le sens. Il fallait écrire $n \leqslant \frac{-410}{-20}$, soit $n \leqslant 20{,}5$. Deuxième erreur, l'arrondi : n est entier et $n \leqslant 20{,}5$, donc on arrondit vers le bas, $n \leqslant 20$. Contrôle : $410 - 20 \times 20 = 10 \geqslant 0$ et $410 - 20 \times 21 = -10 < 0$. Le solde de Noé reste positif ou nul pendant au plus 20 mois.

(c) $L > N \iff 140 + 30n > 410 - 20n \iff 50n > 270 \iff n > 5{,}4$ (on divise par $50 > 0$, le sens est conservé). Comme n est entier, $n \geqslant 6$. Vérification : pour $n = 5$, $L = 290$ et $N = 310$, donc $L < N$; pour $n = 6$, $L = 320$ et $N = 290$, donc $L > N$. Lina a strictement plus d'argent que Noé à partir de 6 mois.

Ex. 49 **(suite)**

(d) « Pouvoir payer » donne $\geqslant$: $140 + 30n \geqslant 599 \iff 30n \geqslant 459 \iff n \geqslant 15{,}3$ (on divise par $30 > 0$, le sens est conservé). n est entier, donc on arrondit vers le haut : $n \geqslant 16$. Contrôle : $140 + 30 \times 15 = 590 < 599$ et $140 + 30 \times 16 = 620 \geqslant 599$. Lina doit attendre au moins 16 mois pour acheter son vélo.