Corrigé – Inéquations produit et inéquations quotient

Mathématiques – Seconde

Étude de signe et tableaux de signes · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Inéquations produit ★

Résous avec un tableau de signes.

a) Signe de chaque facteur :

$x - 2 = 0 \iff x = 2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x - 2$ est négatif avant 2 et positif après.

$x + 3 = 0 \iff x = -3$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 3$ est négatif avant -3 et positif après.

Valeurs rangées : $-3 < 2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$(x-2)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant -3 et après 2.

$$S =]-\infty\,;\,-3[\cup]2\,;\,+\infty[$$

b) Signe de chaque facteur :

$2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = 2$.

Le coefficient de x est 2, positif : $2x - 4$ est négatif avant 2 et positif après.

$x + 1 = 0 \iff x = -1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 1$ est négatif avant -1 et positif après.

Valeurs rangées : $-1 < 2$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$(2x-4)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant -1 et après 2.

$$S =]-\infty\,;\,-1] \cup [2\,;\,+\infty[$$

c) Signe de chaque facteur :

$3-x=0 \iff -x=-3 \iff x=3$.

Le coefficient de x est -1, négatif : $3-x$ est positif avant 3 et négatif après.

$x+5=0 \iff x=-5$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+5$ est négatif avant -5 et positif après.

Valeurs rangées : $-5<3$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$(3-x)(x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant -5 et après 3.

$S=]-\infty\,;\,-5[\cup]3\,;\,+\infty[$

d) Signe de chaque facteur :

x est négatif avant 0, nul en 0 et positif après.

$x-4=0 \iff x=4$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-4$ est négatif avant 4 et positif après.

Valeurs rangées : $0<4$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-4$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre 0 et 4.

$S=[0\,;\,4]$

e) Signe de chaque facteur :

$-2x+1=0 \iff -2x=-1 \iff x=\dfrac{1}{2}$.

Le coefficient de x est -2, négatif : $-2x+1$ est positif avant $\dfrac{1}{2}$ et négatif après.

$x+2=0 \iff x=-2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+2$ est négatif avant -2 et positif après.

Valeurs rangées : $-2<\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(-2x+1)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre -2 et $\dfrac{1}{2}$.

$S=[-2\,;\,\dfrac{1}{2}]$

f) Signe de chaque facteur :

$x+1=0 \iff x=-1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+1$ est négatif avant -1 et positif après.

$x+6=0 \iff x=-6$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+6$ est négatif avant -6 et positif après.

Valeurs rangées : $-6<-1$.

x	$-\infty$		-6		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x+1)(x+6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est entre -6 et -1.

$S=]-6\,;\,-1[$

g) Signe de chaque facteur :

$5-x=0 \iff -x=-5 \iff x=5$.

Le coefficient de x est -1, négatif : $5-x$ est positif avant 5 et négatif après.

$2x+3=0 \iff 2x=-3 \iff x=-\dfrac{3}{2}$.

Le coefficient de x est 2, positif : $2x+3$ est négatif avant $-\dfrac{3}{2}$ et positif après.

Valeurs rangées : $-\dfrac{3}{2}<5$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(5-x)(2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est entre $-\dfrac{3}{2}$ et 5.

$S=\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,5\right[$

h) Signe de chaque facteur :

$4x-2=0 \iff 4x=2 \iff x=\dfrac{1}{2}$.

Le coefficient de x est 4, positif : $4x-2$ est négatif avant $\dfrac{1}{2}$ et positif après.

$3-x=0 \iff -x=-3 \iff x=3$.

Le coefficient de x est -1, négatif : $3-x$ est positif avant 3 et négatif après.

Valeurs rangées : $\dfrac{1}{2}<3$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$4x-2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$(4x-2)(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant $\dfrac{1}{2}$ et après 3.

$S=\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right]\cup[3\,;\,+\infty[$

Exercice 2 – Inéquations quotient ★

Donne la valeur interdite, puis résous avec un tableau de signes.

a) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x+2=0 \iff x=-2$.

Signe de chaque facteur :

$x-1=0 \iff x=1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-1$ est négatif avant 1 et positif après.

$x+2=0 \iff x=-2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+2$ est négatif avant -2 et positif après.

Valeurs rangées : $-2<1$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{x-1}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant -2 et après 1.

La valeur interdite -2 est exclue : crochet ouvert.

$S=]-\infty\,;\,-2[\cup[1\,;\,+\infty[$

b) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x-4=0 \iff x=4$.

Signe de chaque facteur :

$2x+6=0 \iff 2x=-6 \iff x=-3$.

Le coefficient de x est 2, positif : $2x+6$ est négatif avant -3 et positif après.

$x-4=0 \iff x=4$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-4$ est négatif avant 4 et positif après.

Valeurs rangées : $-3<4$.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x+6}{x-4}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est entre -3 et 4.

La valeur interdite 4 est exclue : crochet ouvert.

$S=]-3\,;\,4[$

c) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x+1=0 \iff x=-1$.

Signe de chaque facteur :

$3-x=0 \iff -x=-3 \iff x=3$.

Le coefficient de x est -1, négatif : $3-x$ est positif avant 3 et négatif après.

$x+1=0 \iff x=-1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+1$ est négatif avant -1 et positif après.

Valeurs rangées : $-1<3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{3-x}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant -1 et après 3.

La valeur interdite -1 est exclue : crochet ouvert.

$$S=\,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,[3\,;\,+\infty[$$

d) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $2x-5=0 \iff x=\dfrac{5}{2}$.

Signe de chaque facteur :

x est négatif avant 0, nul en 0 et positif après.

$2x-5=0 \iff 2x=5 \iff x=\dfrac{5}{2}$.

Le coefficient de x est 2, positif : $2x-5$ est négatif avant $\dfrac{5}{2}$ et positif après.

Valeurs rangées : $0<\dfrac{5}{2}$.

x	$-\infty$		0		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2x-5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x}{2x-5}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant 0 et après $\dfrac{5}{2}$.

La valeur interdite $\dfrac{5}{2}$ est exclue : crochet ouvert.

$$S=\,]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]\frac{5}{2}\,;\,+\infty[$$

e) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x+3=0 \iff x=-3$.

Signe de chaque facteur :

$4-2x=0 \iff -2x=-4 \iff x=2$.

Le coefficient de x est -2, négatif : $4-2x$ est positif avant 2 et négatif après.

$x+3=0 \iff x=-3$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+3$ est négatif avant -3 et positif après.

Valeurs rangées : $-3<2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$4-2x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{4-2x}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre -3 et 2.

La valeur interdite -3 est exclue : crochet ouvert.

$S=]-3\,;\,2]$

f) Le numérateur 1 est positif : le signe est celui de $x-2$.

Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x-2=0 \iff x=2$.

Signe de chaque facteur :

1 est un nombre positif : son signe ne change jamais.

$x-2=0 \iff x=2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-2$ est négatif avant 2 et positif après.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
1		$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{1}{x-2}$		$-$	$\Vert$	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est après 2.

La valeur interdite 2 est exclue : crochet ouvert.

$S=]2\,;\,+\infty[$

g) Le numérateur -3 est négatif.

Le quotient n'est jamais nul.

Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x+4=0 \iff x=-4$.

Signe de chaque facteur :

-3 est un nombre négatif : son signe ne change jamais.

$x+4=0 \iff x=-4$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+4$ est négatif avant -4 et positif après.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
-3		$-$	$\vert$	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-3}{x+4}$		$+$	$\Vert$	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est après -4.

La valeur interdite -4 est exclue : crochet ouvert.

$S =]-4\,;\,+\infty[$

h) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $-x=0 \iff x=0$.

Signe de chaque facteur :

$x+1=0 \iff x=-1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+1$ est négatif avant -1 et positif après.

$-x=0 \iff x=0$.

Le coefficient de x est -1, négatif : $-x$ est positif avant 0 et négatif après.

Valeurs rangées : $-1<0$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+1}{-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre -1 et 0.

La valeur interdite 0 est exclue : crochet ouvert.

$S = [-1\,;\,0[$

Exercice 3 – Lire le signe sur une courbe ★

La courbe C_f ci-contre représente une fonction f définie sur $[-2{,}5\,;\,3{,}5]$. Réponds par lecture graphique.

a) $f(x)=0$: on cherche les points de la courbe à hauteur 0, c'est-à-dire sur l'axe des abscisses.

La courbe coupe cet axe en trois points, d'abscisses -2, 1 et 3.

$S = \{-2\,;\,1\,;\,3\}$.

b) $f(x) > 0$: on cherche où la courbe est strictement au-dessus de l'axe des abscisses.
C'est entre -2 et 1, puis entre 3 et $3{,}5$.
Les points sur l'axe $(-2,\ 1,\ 3)$ sont exclus : l'inégalité est stricte.
$3{,}5$ *est compris : la courbe s'arrête sur un point plein, au-dessus de l'axe.*
$S =]-2\,;\ 1[\cup]3\,;\ 3{,}5]$.

c) $f(x) \leqslant 0$: on cherche où la courbe est sous l'axe des abscisses ou dessus.
C'est de $-2{,}5$ à -2, puis de 1 à 3.
Les points sur l'axe sont compris (« ou égal »).
$S = [-2{,}5\,;\ -2] \cup [1\,;\ 3]$.

d) On part de 0 sur l'axe des abscisses et on monte jusqu'à la courbe : on arrive à la hauteur 2.
Donc $f(0) = 2 > 0$.
En 2, la courbe est sous l'axe des abscisses.
Donc $f(2) < 0$.

e) Ligne des x : les bornes $-2{,}5$ et $3{,}5$, et les abscisses des points sur l'axe, -2, 1 et 3, avec un 0 dessous.
Entre deux zéros : $+$ si la courbe est au-dessus de l'axe, $-$ si elle est en dessous.

x	$-2{,}5$		-2		1		3		$3{,}5$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 4 – Factoriser d'abord ★★

Tout à gauche, factorise, puis résous avec un tableau de signes. *Ne divise pas par x.*

a) $x^2 < 9$
$\iff x^2 - 9 < 0$ (on retranche 9)
$\iff x^2 - 3^2 < 0$
$\iff (x-3)(x+3) < 0$ $\quad (a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$

Signe de chaque facteur :
$x - 3 = 0 \iff x = 3$.
Le coefficient de x est 1, positif : $x - 3$ est négatif avant 3 et positif après.
$x + 3 = 0 \iff x = -3$.
Le coefficient de x est 1, positif : $x + 3$ est négatif avant -3 et positif après.
Valeurs rangées : $-3 < 3$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-3)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.
On veut le signe $-$, sans les 0 (inégalité stricte).
Dans la dernière ligne, c'est entre -3 et 3.
$S =]-3\,;\ 3[$

b) $x^2 \geqslant 5x$

$\iff x^2 - 5x \geqslant 0$ (on retranche $5x$)

$\iff x(x-5) \geqslant 0$ (facteur commun x)

Signe de chaque facteur :

x est négatif avant 0, nul en 0 et positif après.

$x - 5 = 0 \iff x = 5$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x - 5$ est négatif avant 5 et positif après.

Valeurs rangées : $0 < 5$.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant 0 et après 5.

$S =]-\infty\,;\,0] \cup [5\,;\,+\infty[$

c) $(x+1)^2 > 4$

$\iff (x+1)^2 - 4 > 0$ (on retranche 4)

$\iff (x+1)^2 - 2^2 > 0$

$\iff (x+1-2)(x+1+2) > 0$ ($a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$)

$\iff (x-1)(x+3) > 0$ (on réduit)

Signe de chaque facteur :

$x - 1 = 0 \iff x = 1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x - 1$ est négatif avant 1 et positif après.

$x + 3 = 0 \iff x = -3$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 3$ est négatif avant -3 et positif après.

Valeurs rangées : $-3 < 1$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant -3 et après 1.

$S =]-\infty\,;\,-3[\cup]1\,;\,+\infty[$

d) $4x^2 - 1 \leqslant 0$

$\iff (2x)^2 - 1^2 \leqslant 0$

$\iff (2x-1)(2x+1) \leqslant 0 \quad (a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$

Signe de chaque facteur :

$2x - 1 = 0 \iff 2x = 1 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

Le coefficient de x est 2, positif : $2x - 1$ est négatif avant $\dfrac{1}{2}$ et positif après.

$2x + 1 = 0 \iff 2x = -1 \iff x = -\dfrac{1}{2}$.

Le coefficient de x est 2, positif : $2x + 1$ est négatif avant $-\dfrac{1}{2}$ et positif après.

Valeurs rangées : $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$(2x-1)(2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

$S = [-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}]$

e) $(2x-1)(x+3) \geqslant (2x-1)(5-x)$

$\iff (2x-1)(x+3) - (2x-1)(5-x) \geqslant 0 \quad$ (tout à gauche)

$\iff (2x-1)\big[(x+3) - (5-x)\big] \geqslant 0 \quad$ (facteur commun $2x-1$)

$\iff (2x-1)\big[x+3-5+x\big] \geqslant 0 \quad$ (le signe $-$ change les signes)

$\iff (2x-1)(2x-2) \geqslant 0 \quad$ (on réduit)

Signe de chaque facteur :

$2x - 1 = 0 \iff 2x = 1 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

Le coefficient de x est 2, positif : $2x - 1$ est négatif avant $\dfrac{1}{2}$ et positif après.

$2x - 2 = 0 \iff 2x = 2 \iff x = 1$.

Le coefficient de x est 2, positif : $2x - 2$ est négatif avant 1 et positif après.

Valeurs rangées : $\dfrac{1}{2} < 1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$2x-2$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$(2x-1)(2x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant $\dfrac{1}{2}$ et après 1.

$S =]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}] \cup [1\,;\,+\infty[$

f) $x^3 > 4x$

$\iff x^3 - 4x > 0$ (on retranche $4x$)

$\iff x\left(x^2 - 4\right) > 0$ (facteur commun x)

$\iff x\,(x-2)\,(x+2) > 0$ ($x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$)

Signe de chaque facteur :

x est négatif avant 0, nul en 0 et positif après.

$x - 2 = 0 \iff x = 2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x - 2$ est négatif avant 2 et positif après.

$x + 2 = 0 \iff x = -2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 2$ est négatif avant -2 et positif après.

Valeurs rangées : $-2 < 0 < 2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-2$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$x\,(x-2)\,(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est entre -2 et 0 et après 2.

$S =]-2\,;\,0[\cup]2\,;\,+\infty[$

Exercice 5 – Tout passer du même côté ★★

Valeur interdite, tout à gauche, même dénominateur, puis tableau de signes. *Ne multiplie pas par le*

dénominateur.

a) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x-3=0 \iff x=3$.

$$\begin{aligned}
&\frac{2x+1}{x-3} \geqslant 1 \\
&\iff \frac{2x+1}{x-3} - 1 \geqslant 0 \quad \text{(tout à gauche)} \\
&\iff \frac{2x+1}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} \geqslant 0 \quad \text{(même dénominateur)} \\
&\iff \frac{2x+1-(x-3)}{x-3} \geqslant 0 \\
&\iff \frac{x+4}{x-3} \geqslant 0 \quad \text{(on réduit)}
\end{aligned}$$

Signe de chaque facteur :

$x+4=0 \iff x=-4$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+4$ est négatif avant -4 et positif après.

$x-3=0 \iff x=3$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-3$ est négatif avant 3 et positif après.

Valeurs rangées : $-4<3$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+4}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant -4 et après 3.

La valeur interdite 3 *est exclue : crochet ouvert.*

$$S =]-\infty\,;\,-4] \cup]3\,;\,+\infty[$$

b) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x+2=0 \iff x=-2$.

$$\begin{aligned}
&\frac{x+5}{x+2} < 3 \\
&\iff \frac{x+5}{x+2} - 3 < 0 \quad \text{(tout à gauche)} \\
&\iff \frac{x+5}{x+2} - \frac{3(x+2)}{x+2} < 0 \quad \text{(même dénominateur)} \\
&\iff \frac{x+5-3x-6}{x+2} < 0 \\
&\iff \frac{-2x-1}{x+2} < 0 \quad \text{(on réduit)}
\end{aligned}$$

Signe de chaque facteur :

$-2x-1=0 \iff -2x=1 \iff x=-\dfrac{1}{2}$.

Le coefficient de x est -2, négatif : $-2x-1$ est positif avant $-\dfrac{1}{2}$ et négatif après.

$x+2=0 \iff x=-2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+2$ est négatif avant -2 et positif après.

Valeurs rangées : $-2 < -\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x-1$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{-2x-1}{x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant -2 et après $-\dfrac{1}{2}$.

La valeur interdite -2 est exclue : crochet ouvert.

$$S =]-\infty\,;\,-2[\cup]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$$

c) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x = 0$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} > 2 \\
&\iff \frac{1}{x} - 2 > 0 \quad \text{(tout à gauche)} \\
&\iff \frac{1}{x} - \frac{2x}{x} > 0 \quad \text{(même dénominateur)} \\
&\iff \frac{1-2x}{x} > 0
\end{aligned}$$

Signe de chaque facteur :

$1 - 2x = 0 \iff -2x = -1 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

Le coefficient de x est -2, négatif : $1 - 2x$ est positif avant $\dfrac{1}{2}$ et négatif après.

x est négatif avant 0, nul en 0 et positif après.

Valeurs rangées : $0 < \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{1-2x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est entre 0 et $\dfrac{1}{2}$.

La valeur interdite 0 *est exclue : crochet ouvert.*

$$S =]0\,;\,\frac{1}{2}[$$

d) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x-1=0 \iff x=1$.

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{x-1} \leqslant 1 \\
&\iff \frac{3}{x-1} - 1 \leqslant 0 \quad \text{(tout à gauche)} \\
&\iff \frac{3}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} \leqslant 0 \quad \text{(même dénominateur)} \\
&\iff \frac{3-(x-1)}{x-1} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{4-x}{x-1} \leqslant 0 \quad \text{(on réduit)}
\end{aligned}$$

Signe de chaque facteur :

$4-x=0 \iff -x=-4 \iff x=4$.

Le coefficient de x est -1, négatif : $4-x$ est positif avant 4 et négatif après.

$x-1=0 \iff x=1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-1$ est négatif avant 1 et positif après.

Valeurs rangées : $1<4$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$4-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{4-x}{x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant 1 et après 4.

La valeur interdite 1 *est exclue : crochet ouvert.*

$$S =]-\infty\,;\,1[\cup [4\,;\,+\infty[$$

e) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x+2=0 \iff x=-2$.

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{x+2} \geqslant -1 \\
&\iff \frac{x}{x+2}+1 \geqslant 0 \quad \text{(tout à gauche)} \\
&\iff \frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x+2} \geqslant 0 \quad \text{(même dénominateur)} \\
&\iff \frac{2x+2}{x+2} \geqslant 0 \quad \text{(on réduit)}
\end{aligned}$$

Signe de chaque facteur :

$2x+2=0 \iff 2x=-2 \iff x=-1$.

Le coefficient de x est 2, positif : $2x+2$ est négatif avant -1 et positif après.

$x+2=0 \iff x=-2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+2$ est négatif avant -2 et positif après.

Valeurs rangées : $-2<-1$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{2x+2}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant -2 et après -1.

La valeur interdite -2 est exclue : crochet ouvert.

$$S=]-\infty\,;\,-2[\cup[-1\,;\,+\infty[$$

f) Le numérateur va se réduire à une constante.

Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x+4=0 \iff x=-4$.

$$\begin{aligned}
&\frac{2x-1}{x+4} > 2 \\
&\iff \frac{2x-1}{x+4} - 2 > 0 \quad \text{(tout à gauche)} \\
&\iff \frac{2x-1}{x+4} - \frac{2(x+4)}{x+4} > 0 \quad \text{(même dénominateur)} \\
&\iff \frac{2x-1-2x-8}{x+4} > 0 \\
&\iff \frac{-9}{x+4} > 0 \quad \text{(on réduit)}
\end{aligned}$$

Signe de chaque facteur :

-9 est un nombre négatif : son signe ne change jamais.

$x+4=0 \iff x=-4$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+4$ est négatif avant -4 et positif après.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
-9		$-$	$\vert$	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-9}{x+4}$		$+$	$\Vert$	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant -4.

La valeur interdite -4 est exclue : crochet ouvert.

$$S =]-\infty\,;\,-4[$$

Exercice 6 – Produits et quotients mélangés ★★

Résous avec un tableau de signes complet.

a) Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x-3=0 \iff x=3$.

Signe de chaque facteur :

$x-1=0 \iff x=1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-1$ est négatif avant 1 et positif après.

$x+2=0 \iff x=-2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+2$ est négatif avant -2 et positif après.

$x-3=0 \iff x=3$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-3$ est négatif avant 3 et positif après.

Valeurs rangées : $-2<1<3$.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$x-3$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre -2 et 1 et après 3.

La valeur interdite 3 *est exclue : crochet ouvert.*

$$S=[-2\,;\,1]\cup\,]3\,;\,+\infty[$$

b) *En* -3 *le produit est nul :* -3 *n'est pas solution d'une inégalité stricte.*

Signe de chaque facteur :

$(x+3)^2$ est un carré : il est positif, et nul seulement pour $x=-3$.

$2-x=0 \iff -x=-2 \iff x=2$.

Le coefficient de x est -1, négatif : $2-x$ est positif avant 2 et négatif après.

Valeurs rangées : $-3<2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$(x+3)^2$		$+$	0	$+$	‖	$+$	
$2-x$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$(x+3)^2(2-x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant -3 et entre -3 et 2.

$$S=\,]-\infty\,;\,-3[\cup\,]-3\,;\,2[$$

c) Signe de chaque facteur :

-2 est un nombre négatif : son signe ne change jamais.

$x+1=0 \iff x=-1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+1$ est négatif avant -1 et positif après.

$x-4=0 \iff x=4$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-4$ est négatif avant 4 et positif après.

Valeurs rangées : $-1<4$.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
-2		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x-4$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$-2(x+1)(x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant -1 et après 4.

$S=]-\infty\,;\,-1]\cup[4\,;\,+\infty[$

d) $x^2+1>0$ pour tout x.

Signe de chaque facteur :

x^2+1 ne s'annule jamais : il reste positif.

$3x-6=0 \iff 3x=6 \iff x=2$.

Le coefficient de x est 3, positif : $3x-6$ est négatif avant 2 et positif après.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2+1		$+$	‖	$+$	
$3x-6$		$-$	0	$+$	
$\left(x^2+1\right)(3x-6)$		$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant 2.

$S=]-\infty\,;\,2[$

e) Valeurs interdites (le dénominateur s'annule) : $x+1=0 \iff x=-1$ et $x-2=0 \iff x=2$.

Signe de chaque facteur :

$5-x=0 \iff -x=-5 \iff x=5$.

Le coefficient de x est -1, négatif : $5-x$ est positif avant 5 et négatif après.

$x+1=0 \iff x=-1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+1$ est négatif avant -1 et positif après.

$x-2=0 \iff x=2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-2$ est négatif avant 2 et positif après.

Valeurs rangées : $-1<2<5$.

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{5-x}{(x+1)(x-2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant -1 et entre 2 et 5.

Les valeurs interdites -1 et 2 sont exclues : crochets ouverts.

$S=\,]-\infty\,;\,-1[\cup]2\,;\,5]$

Exercice 7 – Position relative de deux courbes ★★★

1. C_f et C_g se croisent en deux points du quadrillage : $(-2\,;\,0)$ et $(3\,;\,2{,}5)$.
   Leurs abscisses sont -2 et 3.
   Contrôle par le calcul :
   $f(-2)=\dfrac{4}{2}-2=0$ et $g(-2)=-1+1=0$;
   $f(3)=\dfrac{9}{2}-2=2{,}5$ et $g(3)=1{,}5+1=2{,}5$.

2. On regarde où la parabole C_f passe au-dessus de la droite C_g : à gauche de -2 et à droite de 3.
   En -2 et en 3, les deux courbes sont à la même hauteur : ces valeurs sont exclues.
   Sur $[-3\,;\,4]$, on lit : $[-3\,;\,-2[\cup]3\,;\,4]$.

3. On développe la forme factorisée :
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(x+2)(x-3)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2-3x+2x-6\right)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2-x-6\right)\\&=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-3\end{aligned}$$

On calcule $f(x)-g(x)$ (le signe $-$ change les signes de $g(x)$) :
$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\frac{x^2}{2}-2-\left(\frac{x}{2}+1\right)\\&=\frac{x^2}{2}-2-\frac{x}{2}-1\\&=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-3\end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales : $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}(x+2)(x-3)$.

4. Signe de chaque facteur :
$\dfrac{1}{2}$ est un nombre positif : son signe ne change jamais.
$x+2=0 \iff x=-2$.
Le coefficient de x est 1, positif : $x+2$ est négatif avant -2 et positif après.
$x-3=0 \iff x=3$.
Le coefficient de x est 1, positif : $x-3$ est négatif avant 3 et positif après.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$\frac{1}{2}$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.
Signe $+$ sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]3\,;\,+\infty[$: là, $f(x)>g(x)$, donc C_f est au-dessus de C_g.
Signe $-$ sur $]-2\,;\,3[$: C_f est au-dessous de C_g.
0 en -2 et en 3 : les courbes se coupent.
Le calcul confirme la lecture.

Exercice 8 – Inéquations rédigées ★★★

Résous. Rédige chaque étape.

a) Valeurs interdites (le dénominateur s'annule) : $x+1=0 \iff x=-1$ et $x-1=0 \iff x=1$.

$$\begin{aligned}
&\frac{x-3}{x+1} \leqslant \frac{x+3}{x-1} \\
&\iff \frac{x-3}{x+1} - \frac{x+3}{x-1} \leqslant 0 \quad \text{(tout à gauche)} \\
&\iff \frac{(x-3)(x-1)-(x+3)(x+1)}{(x+1)(x-1)} \leqslant 0 \quad \text{(même dénominateur)} \\
&\iff \frac{x^2-4x+3-\left(x^2+4x+3\right)}{(x+1)(x-1)} \leqslant 0 \quad \text{(on développe)} \\
&\iff \frac{-8x}{(x+1)(x-1)} \leqslant 0 \quad \text{(on réduit)}
\end{aligned}$$

Signe de chaque facteur :

$-8x=0 \iff x=0$.

Le coefficient de x est -8, négatif : $-8x$ est positif avant 0 et négatif après.

$x+1=0 \iff x=-1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+1$ est négatif avant -1 et positif après.

$x-1=0 \iff x=1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-1$ est négatif avant 1 et positif après.

Valeurs rangées : $-1<0<1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-8x$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$x-1$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-8x}{(x+1)(x-1)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre -1 et 0 et après 1.

Les valeurs interdites -1 et 1 sont exclues : crochets ouverts.

$$S=\,]-1\,;\,0]\cup]1\,;\,+\infty[$$

b) On utilise $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = x+2$ et $b = 2x-1$.

$(x+2)^2 \geqslant (2x-1)^2$

$\iff (x+2)^2 - (2x-1)^2 \geqslant 0$ (tout à gauche)

$\iff \big[(x+2) - (2x-1)\big]\big[(x+2) + (2x-1)\big] \geqslant 0$ $(a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$

$\iff (x+2-2x+1)\,(x+2+2x-1) \geqslant 0$

$\iff (3-x)\,(3x+1) \geqslant 0$ (on réduit)

Signe de chaque facteur :

$3 - x = 0 \iff -x = -3 \iff x = 3$.

Le coefficient de x est -1, négatif : $3 - x$ est positif avant 3 et négatif après.

$3x + 1 = 0 \iff 3x = -1 \iff x = -\dfrac{1}{3}$.

Le coefficient de x est 3, positif : $3x + 1$ est négatif avant $-\dfrac{1}{3}$ et positif après.

Valeurs rangées : $-\dfrac{1}{3} < 3$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(3-x)\,(3x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre $-\dfrac{1}{3}$ et 3.

$S = [-\dfrac{1}{3}\,;\,3]$

c) *On ne divise pas par $x-2$ (signe inconnu) : on factorise.*

$x^2(x-2) \leqslant 9(x-2)$

$\iff x^2(x-2) - 9(x-2) \leqslant 0$ (tout à gauche)

$\iff (x-2)\left(x^2-9\right) \leqslant 0$ (facteur commun $x-2$)

$\iff (x-2)(x-3)(x+3) \leqslant 0$ ($x^2-9 = (x-3)(x+3)$)

Signe de chaque facteur :

$x-2=0 \iff x=2$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-2$ est négatif avant 2 et positif après.

$x-3=0 \iff x=3$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x-3$ est négatif avant 3 et positif après.

$x+3=0 \iff x=-3$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x+3$ est négatif avant -3 et positif après.

Valeurs rangées : $-3 < 2 < 3$.

x	$-\infty$		-3		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-2)(x-3)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $-$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant -3 et entre 2 et 3.

$S =]-\infty\,;\,-3] \cup [2\,;\,3]$

d) *On ne multiplie pas par x (signe inconnu).*

Valeur interdite (le dénominateur s'annule) : $x = 0$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} \leqslant x \\
&\quad\iff \frac{1}{x} - x \leqslant 0 \quad \text{(tout à gauche)} \\
&\quad\iff \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x} \leqslant 0 \quad \text{(même dénominateur)} \\
&\quad\iff \frac{1 - x^2}{x} \leqslant 0 \\
&\quad\iff \frac{x^2 - 1}{x} \geqslant 0 \quad \text{(on multiplie par } -1 \text{ : le sens change)} \\
&\quad\iff \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geqslant 0 \quad (a^2 - b^2)
\end{aligned}$$

Signe de chaque facteur :

$x - 1 = 0 \iff x = 1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x - 1$ est négatif avant 1 et positif après.

$x + 1 = 0 \iff x = -1$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 1$ est négatif avant -1 et positif après.

x est négatif avant 0, nul en 0 et positif après.

Valeurs rangées : $-1 < 0 < 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$\frac{(x-1)(x+1)}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre -1 et 0 et après 1.

La valeur interdite 0 *est exclue : crochet ouvert.*

$$S = [-1\,;\,0[\cup [1\,;\,+\infty[$$

Exercice 9 – Le rectangle ★★★

1. Aire d'un rectangle : longueur × largeur.

   $$\begin{aligned}
   A(x) &= x\,(x+2) \\
   &= x \times x + x \times 2 \\
   &= x^2 + 2x
   \end{aligned}$$

2. On développe le membre de droite :

   $$\begin{aligned}
   &(x+5)\,(x-3) \\
   &\quad= x^2 - 3x + 5x - 15 \\
   &\quad= x^2 + 2x - 15
   \end{aligned}$$

   On retrouve bien $x^2 + 2x - 15$.

3. On cherche les $x > 0$ tels que $A(x) > 15$.

$x^2 + 2x > 15$

$\iff x^2 + 2x - 15 > 0$ (on retranche 15)

$\iff (x+5)(x-3) > 0$ (question 2)

Signe de chaque facteur :

$x + 5 = 0 \iff x = -5$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x + 5$ est négatif avant -5 et positif après.

$x - 3 = 0 \iff x = 3$.

Le coefficient de x est 1, positif : $x - 3$ est négatif avant 3 et positif après.

Valeurs rangées : $-5 < 3$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x+5)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dernière ligne : on applique la règle des signes, colonne par colonne.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant -5 et après 3.

$S =]-\infty\,;\,-5[\cup]3\,;\,+\infty[$

Or x est une longueur : $x > 0$.

On garde seulement $x \in]3\,;\,+\infty[$.

L'aire dépasse 15 cm² quand le côté x dépasse 3 cm.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *On a divisé par x, dont le signe est inconnu : on perd $x \leqslant 0$.*

$x^2 \geqslant 7x$

$\iff x^2 - 7x \geqslant 0$ (on retranche $7x$)

$\iff x(x-7) \geqslant 0$ (facteur commun x)

Les facteurs s'annulent en 0 et 7.

On dresse le tableau de signes.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant 0 et après 7.

$S =]-\infty\,;\,0] \cup [7\,;\,+\infty[$

b) -1 *annule le dénominateur : c'est une valeur interdite, jamais solution.*

Crochet ouvert.

Le numérateur s'annule en 4 ; valeur interdite -1.

On dresse le tableau de signes.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est avant -1 et après 4.

La valeur interdite -1 *est exclue : crochet ouvert.*

$$S =]-\infty\,;\,-1[\cup [4\,;\,+\infty[$$

c) $x = -7$ *vérifie* $x < 6$, *mais* $(-7)^2 = 49 > 36$ *: on ne prend pas la racine d'une inégalité.*

$$\begin{aligned} & x^2 < 36 \\ \iff\ & x^2 - 36 < 0 \quad \text{(on retranche 36)} \\ \iff\ & (x-6)(x+6) < 0 \quad (a^2 - b^2) \end{aligned}$$

Les facteurs s'annulent en -6 et 6.

On dresse le tableau de signes.

On veut le signe $-$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est entre -6 et 6.

$$S =]-6\,;\,6[$$

d) *Multiplier par* $x-2$ *change le sens quand* $x - 2 < 0$ *: on ne peut pas le faire sans connaître son signe.*

$$\begin{aligned} & \frac{x+3}{x-2} \geqslant 2 \\ \iff\ & \frac{x+3}{x-2} - 2 \geqslant 0 \quad \text{(tout à gauche)} \\ \iff\ & \frac{x+3-2(x-2)}{x-2} \geqslant 0 \quad \text{(même dénominateur)} \\ \iff\ & \frac{7-x}{x-2} \geqslant 0 \quad \text{(on réduit)} \end{aligned}$$

Le numérateur s'annule en 7 ; valeur interdite 2.

On dresse le tableau de signes.

On veut le signe $+$ ou 0.

Dans la dernière ligne, c'est entre 2 et 7.

La valeur interdite 2 *est exclue : crochet ouvert.*

$$S =]2\,;\,7]$$

e) *Inégalité stricte : en* -5 *et en* 1 *le produit vaut* 0, *qui n'est pas* < 0.

Crochets ouverts.

Les facteurs s'annulent en -5 et 1.

On dresse le tableau de signes.

On veut le signe $-$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est entre -5 et 1.

$$S =]-5\,;\,1[$$

f) *On oublie le cas $x-3<-4$: par exemple $x=-2$ donne $(-5)^2=25>16$.*

$(x-3)^2>16$

$\iff (x-3)^2-16>0$ (on retranche 16)

$\iff (x-3-4)(x-3+4)>0$ (a^2-b^2)

$\iff (x-7)(x+1)>0$ (on réduit)

Les facteurs s'annulent en -1 et 7.

On dresse le tableau de signes.

On veut le signe $+$, sans les 0 (inégalité stricte).

Dans la dernière ligne, c'est avant -1 et après 7.

$S=]-\infty\,;\,-1[\cup]7\,;\,+\infty[$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. L'ensemble des solutions de $(x-2)(x+5)\leqslant 0$ est :

Réponse C : $[-5\,;\,2]$

Signe $-$ entre les racines -5 et 2, zéros compris.

2. L'ensemble des solutions de $\dfrac{x+1}{x-3}\geqslant 0$ est :

Réponse A : $]-\infty\,;\,-1]\cup]3\,;\,+\infty[$

Signe $+$, zéro -1 compris, valeur interdite 3 exclue.

3. L'ensemble des solutions de $x^2\geqslant 4x$ est :

Réponse D : $]-\infty\,;\,0]\cup[4\,;\,+\infty[$

$x(x-4)\geqslant 0$: on factorise, on ne divise pas par x.

4. $\dfrac{x}{x-1}<1$ équivaut à :

Réponse B : $\dfrac{1}{x-1}<0$

$\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}$.

5. L'ensemble des solutions de $x^2<16$ est :

Réponse D : $]-4\,;\,4[$

$(x-4)(x+4)<0$.

6. L'ensemble des solutions de $(x+3)^2(x-1)\geqslant 0$ est :

Réponse A : $\{-3\}\cup[1\,;\,+\infty[$

Le carré est positif ou nul : signe de $x-1$; mais en -3 le produit est nul, donc -3 est solution.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).