Comparer et encadrer – exercices

Mathématiques – Seconde

Inégalités et inéquations · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Multiplier ou diviser par un nombre **négatif** change le sens : $x < 5 \Rightarrow -2x > -10$.
- Après un changement de sens, on réécrit l'encadrement dans l'ordre croissant.
- On ne soustrait pas deux encadrements : on encadre $-b$, puis on additionne.
- On ne multiplie pas deux encadrements membre à membre : on multiplie par un nombre positif, une étape à la fois.
- Comparer par le quotient : seulement pour deux nombres **strictement positifs**.
- Un carré est positif ou **nul** : $(2x-1)^2 \geqslant 0$, et non > 0. Pour des positifs, l'inverse renverse l'ordre.

Exercice 1 – Comparer par la différence ★

Compare les deux nombres en calculant le signe de leur différence.

a) $\dfrac{7}{9}$ et $\dfrac{4}{5}$

b) $\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{6}{7}$

c) $-\dfrac{3}{4}$ et $-\dfrac{5}{7}$

d) $0{,}7$ et $\dfrac{2}{3}$

e) $\dfrac{1}{3}$ et $0{,}33$

f) $\dfrac{13}{12}$ et $\dfrac{12}{11}$

g) $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{3}{5}$

h) $-\dfrac{11}{8}$ et $-1{,}4$

Exercice 2 – Opérations sur une inégalité ★

On connaît une inégalité sur x. Écris l'inégalité vérifiée par l'expression donnée, en justifiant chaque étape.

a) $x < 5$; $x + 2$

b) $x < 5$; $-3x$

c) $x < 5$; $4 - x$

d) $x \geqslant -2$; $3x + 4$

e) $x \geqslant -2$; $1 - 2x$

f) $x \leqslant \dfrac{1}{2}$; $-4x$

g) $x > 3$; $-\dfrac{x}{3} + 1$

h) $x < -1$; $0{,}5x + 3$

Exercice 3 – Encadrer une expression affine ★

Encadre l'expression, étape par étape.

a) $-1 < x < 3$; $4 - 5x$

b) $2 \leqslant x \leqslant 5$; $3x - 1$

c) $-2 \leqslant x < 1$; $-2x + 3$

d) $0 < x \leqslant 4$; $\dfrac{x}{2} + 1$

e) $1{,}2 \leqslant x \leqslant 1{,}5$; $10x - 7$

f) $-4 < x < 2$; $5 - \dfrac{x}{4}$

g) $\dfrac{1}{3} < x < 1$; $1 - 3x$

Exercice 4 – Comparer deux expressions ★★

Démontre que l'inégalité est vraie pour tout réel x (calcule la différence et reconnais un carré).

a) $4x^2 + 1 \geqslant 4x$

b) $x^2 + 9 \geqslant 6x$

c) $(x + 1)^2 \geqslant 4x$

d) $2x^2 + 8 \geqslant 8x$

e) $x^2 + \dfrac{1}{4} \geqslant x$

f) $(x + 3)^2 > x\,(x + 6)$

Exercice 5 – Comparer par le quotient ★★

Les nombres sont strictement positifs. Compare-les en calculant $\dfrac{A}{B}$, puis dis combien de fois A contient B.

a) $A = 7^{15}$, $B = 5 \times 7^{14}$

b) $A = 9 \times 2^{20}$, $B = 2^{23}$

c) $A = 2^{30}$, $B = 3^{20}$

d) $A = 6^{10}$, $B = 2^{10} \times 3^{9}$

e) $A = 10^{8}$, $B = 3 \times 10^{7}$

f) $A = 5^{12}$, $B = 25^{5}$

Exercice 6 – Encadrer une somme, une différence ★★

On sait que $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $-1 \leqslant b \leqslant 4$ (a à d), puis que $1{,}4 \leqslant x \leqslant 1{,}5$ et $2{,}2 \leqslant y \leqslant 2{,}3$ (e et f). Encadre :

a) $a + b$

b) $a - b$

c) $2a + 3b$

d) $3a - 2b$

e) $y - x$

f) $2x + y$

Exercice 7 – Inverse et produit : ce que permettent les règles ★★★

a et b sont deux réels **strictement positifs** avec $a \leqslant b$.

1. Montre que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$. Déduis-en que $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.
2. On sait que $2 \leqslant x \leqslant 5$. Encadre $\dfrac{1}{x}$, puis $3 - \dfrac{1}{x}$.
3. Un rectangle a une longueur L et une largeur ℓ (en m) avec $2 \leqslant L \leqslant 3$ et $1{,}5 \leqslant \ell \leqslant 2$. En multipliant $L \leqslant 3$ par $\ell > 0$, montre que $L\ell \leqslant 6$. Montre de même que $L\ell \geqslant 3$.
4. Avec $1 < 3$ et $-5 < -4$, montre qu'on ne peut pas multiplier deux inégalités membre à membre en général.

Exercice 8 – Encadrer une expression en x ★★★

Encadre l'expression, étape par étape. Pour un inverse, utilise le résultat de l'exercice précédent.

a) $1 \leqslant x \leqslant 3$; $\dfrac{2x+1}{3}$

b) $1 \leqslant x \leqslant 3$; $-3(x-2)+1$

c) $-2 < x < 1$; $5 - \dfrac{x}{2}$

d) $2 \leqslant x \leqslant 4$; $\dfrac{3}{x}$

e) $1 \leqslant x \leqslant 4$; $\dfrac{1}{x+1}$

f) $-1 \leqslant x \leqslant 2$; $\dfrac{2}{x+3}$

Exercice 9 – Le grillage du jardin ★★★

Un jardin rectangulaire a une longueur L et une largeur ℓ, mesurées en mètres avec une petite incertitude : $12{,}4 \leqslant L \leqslant 12{,}6$ et $7{,}8 \leqslant \ell \leqslant 8$.

1. Encadre le périmètre $P = 2(L + \ell)$.
2. Encadre $L - \ell$.
3. Le grillage coûte $3{,}50$ € le mètre, plus 25 € de pose. Encadre le prix $3{,}5P + 25$.
4. Avec 168 €, combien de mètres entiers de grillage peut-on payer au plus (pose comprise) ? Est-on sûr de pouvoir clore le jardin ?

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $x < 4$, donc $-2x < -8$.

b) $1 \leqslant a \leqslant 3$ et $0 \leqslant b \leqslant 5$, donc $1 - 0 \leqslant a - b \leqslant 3 - 5$.

c) $A = -8$, $B = -2$: $\dfrac{A}{B} = 4 > 1$, donc $A > B$.

d) $(2x-1)^2 > 0$ pour tout réel x.

e) $-2 < x < 1$, donc $11 < 3 - 4x < -1$.

f) $4 \leqslant x \leqslant 10$, donc $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{10}$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Si $x > -2$, alors :

   A $-3x + 1 > 7$ **B** $-3x + 1 > -5$ **C** $-3x + 1 < 7$ **D** $-3x + 1 < -5$

2. $2 \leqslant a \leqslant 5$ et $1 \leqslant b \leqslant 3$. Alors :

   A $-1 \leqslant a - b \leqslant 4$ **B** $1 \leqslant a - b \leqslant 2$ **C** $3 \leqslant a - b \leqslant 8$ **D** $-4 \leqslant a - b \leqslant 1$

3. Comparer $\dfrac{4}{7}$ et $\dfrac{5}{9}$:

   A $\dfrac{4}{7} < \dfrac{5}{9}$ **B** $\dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{9}$ **C** on ne peut pas sans calculatrice **D** $\dfrac{4}{7} > \dfrac{5}{9}$

4. $A = 3^{21}$ et $B = 5 \times 3^{20}$. Alors :

   A $A > B$ **B** $A < B$ **C** $A = B$ **D** $A = 5B$

5. Pour tout réel x :

   A $x^2 + 4 > 4x$ **B** $x^2 + 4 \leqslant 4x$ **C** $x^2 + 4 < 4x$ **D** $x^2 + 4 \geqslant 4x$

6. Si $3 \leqslant x \leqslant 5$, alors :

   A $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{3}$ **B** $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{5}$ **C** $-5 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant -3$ **D** $3 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 5$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).