Corrigé – Comparer et encadrer

Mathématiques – Seconde

Inégalités et inéquations · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Comparer par la différence ★

Compare les deux nombres en calculant le signe de leur différence.

a) On calcule la différence, au même dénominateur :
$\frac{7}{9} - \frac{4}{5} = \frac{35}{45} - \frac{36}{45} = -\frac{1}{45}$
La différence est négative : $-\frac{1}{45} < 0$.
Donc $\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$.

b) On calcule la différence, au même dénominateur :
$\frac{5}{6} - \frac{6}{7} = \frac{35}{42} - \frac{36}{42} = -\frac{1}{42}$
La différence est négative : $-\frac{1}{42} < 0$.
Donc $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$.

c) On calcule la différence, au même dénominateur :
$-\frac{3}{4} - (-\frac{5}{7}) = -\frac{21}{28} + \frac{20}{28} = -\frac{1}{28}$
La différence est négative : $-\frac{1}{28} < 0$.
Donc $-\frac{3}{4} < -\frac{5}{7}$.

d) On calcule la différence, au même dénominateur :
$0{,}7 - \frac{2}{3} = \frac{21}{30} - \frac{20}{30} = \frac{1}{30}$
La différence est positive : $\frac{1}{30} > 0$.
Donc $0{,}7 > \frac{2}{3}$.

e) On calcule la différence, au même dénominateur :
$\frac{1}{3} - 0{,}33 = \frac{100}{300} - \frac{99}{300} = \frac{1}{300}$
La différence est positive : $\frac{1}{300} > 0$.
Donc $\frac{1}{3} > 0{,}33$.

f) On calcule la différence, au même dénominateur :
$\frac{13}{12} - \frac{12}{11} = \frac{143}{132} - \frac{144}{132} = -\frac{1}{132}$
La différence est négative : $-\frac{1}{132} < 0$.
Donc $\frac{13}{12} < \frac{12}{11}$.

g) On calcule la différence, au même dénominateur :
$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$
La différence est positive : $\frac{1}{15} > 0$.
Donc $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

h) On calcule la différence, au même dénominateur :
$-\frac{11}{8} - (-1{,}4) = -\frac{55}{40} + \frac{56}{40} = \frac{1}{40}$
La différence est positive : $\frac{1}{40} > 0$.
Donc $-\frac{11}{8} > -1{,}4$.

Exercice 2 – Opérations sur une inégalité ★

On connaît une inégalité sur x. Écris l'inégalité vérifiée par l'expression donnée, en justifiant chaque étape.

a) On part de $x < 5$.
On ajoute 2 : $x + 2 < 7$.

b) On part de $x < 5$.
On multiplie par -3, négatif, le sens change : $-3x > -15$.

c) On part de $x < 5$.
On multiplie par -1, négatif, le sens change : $-x > -5$.
On ajoute 4 : $4 - x > -1$.

d) On part de $x \geqslant -2$.
On multiplie par 3, positif, le sens est conservé : $3x \geqslant -6$.
On ajoute 4 : $3x + 4 \geqslant -2$.

e) On part de $x \geqslant -2$.
On multiplie par -2, négatif, le sens change : $-2x \leqslant 4$.
On ajoute 1 : $1 - 2x \leqslant 5$.

f) On part de $x \leqslant \frac{1}{2}$.
On multiplie par -4, négatif, le sens change : $-4x \geqslant -2$.

g) On part de $x > 3$.
On divise par -3, négatif, le sens change : $-\frac{x}{3} < -1$.
On ajoute 1 : $-\frac{x}{3} + 1 < 0$.

h) On part de $x < -1$.
On multiplie par $0{,}5$, positif, le sens est conservé : $0{,}5x < -0{,}5$.
On ajoute 3 : $0{,}5x + 3 < 2{,}5$.

Exercice 3 – Encadrer une expression affine ★

Encadre l'expression, étape par étape.

a) On part de $-1 < x < 3$.
On multiplie par -5, négatif, le sens change : $5 > -5x > -15$, soit $-15 < -5x < 5$.
On ajoute 4 : $-11 < 4 - 5x < 9$.

b) On part de $2 \leqslant x \leqslant 5$.
On multiplie par 3, positif, le sens est conservé : $6 \leqslant 3x \leqslant 15$.
On retranche 1 : $5 \leqslant 3x - 1 \leqslant 14$.

c) On part de $-2 \leqslant x < 1$.
On multiplie par -2, négatif, le sens change : $4 \geqslant -2x > -2$, soit $-2 < -2x \leqslant 4$.
On ajoute 3 : $1 < -2x + 3 \leqslant 7$.

d) On part de $0 < x \leqslant 4$.
On divise par 2, positif, le sens est conservé : $0 < \dfrac{x}{2} \leqslant 2$.
On ajoute 1 : $1 < \dfrac{x}{2} + 1 \leqslant 3$.

e) On part de $1{,}2 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.
On multiplie par 10, positif, le sens est conservé : $12 \leqslant 10x \leqslant 15$.
On retranche 7 : $5 \leqslant 10x - 7 \leqslant 8$.

f) On part de $-4 < x < 2$.
On divise par -4, négatif, le sens change : $1 > -\dfrac{x}{4} > -\dfrac{1}{2}$, soit $-\dfrac{1}{2} < -\dfrac{x}{4} < 1$.
On ajoute 5 : $\dfrac{9}{2} < 5 - \dfrac{x}{4} < 6$.

g) On part de $\dfrac{1}{3} < x < 1$.
On multiplie par -3, négatif, le sens change : $-1 > -3x > -3$, soit $-3 < -3x < -1$.
On ajoute 1 : $-2 < 1 - 3x < 0$.

Exercice 4 – Comparer deux expressions ★★

Démontre que l'inégalité est vraie pour tout réel x (calcule la différence et reconnais un carré).

a) On calcule la différence :

$$\begin{aligned} &4x^2 + 1 - 4x \\ &\quad = 4x^2 - 4x + 1 \\ &\quad = (2x - 1)^2 \end{aligned}$$

Un carré est positif ou nul : $(2x - 1)^2 \geqslant 0$.
Donc $4x^2 + 1 - 4x \geqslant 0$, c'est-à-dire $4x^2 + 1 \geqslant 4x$.
Égalité quand $2x - 1 = 0$, soit pour $x = \dfrac{1}{2}$.

b) On calcule la différence :

$$\begin{aligned} &x^2 + 9 - 6x \\ &\quad = x^2 - 6x + 9 \\ &\quad = (x-3)^2 \end{aligned}$$

Un carré est positif ou nul : $(x-3)^2 \geqslant 0$.
Donc $x^2 + 9 - 6x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2 + 9 \geqslant 6x$.
Égalité quand $x - 3 = 0$, soit pour $x = 3$.

c) On calcule la différence :

$$\begin{aligned} &(x+1)^2 - 4x \\ &\quad = x^2 + 2x + 1 - 4x \\ &\quad = x^2 - 2x + 1 \\ &\quad = (x-1)^2 \end{aligned}$$

Un carré est positif ou nul : $(x-1)^2 \geqslant 0$.
Donc $(x+1)^2 - 4x \geqslant 0$, c'est-à-dire $(x+1)^2 \geqslant 4x$.
Égalité quand $x - 1 = 0$, soit pour $x = 1$.

d) On calcule la différence :

$$\begin{aligned} &2x^2 + 8 - 8x \\ &\quad = 2x^2 - 8x + 8 \\ &\quad = 2\left(x^2 - 4x + 4\right) \\ &\quad = 2(x-2)^2 \end{aligned}$$

Un carré est positif ou nul : $2(x-2)^2 \geqslant 0$.
Donc $2x^2 + 8 - 8x \geqslant 0$, c'est-à-dire $2x^2 + 8 \geqslant 8x$.
Égalité quand $x - 2 = 0$, soit pour $x = 2$.

e) On calcule la différence :

$$\begin{aligned} &x^2 + \frac{1}{4} - x \\ &\quad = x^2 - x + \frac{1}{4} \\ &\quad = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Un carré est positif ou nul : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$.
Donc $x^2 + \frac{1}{4} - x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2 + \frac{1}{4} \geqslant x$.
Égalité quand $x - \frac{1}{2} = 0$, soit pour $x = \frac{1}{2}$.

f) On calcule la différence :
$(x+3)^2 - x\,(x+6)$
$= x^2 + 6x + 9 - \left(x^2 + 6x\right)$
$= x^2 + 6x + 9 - x^2 - 6x$
$= 9$

La différence vaut 9, quel que soit x.
Comme $9 > 0$, on a $(x+3)^2 > x(x+6)$ pour tout x.

Exercice 5 – Comparer par le quotient ★★

Les nombres sont strictement positifs. Compare-les en calculant $\dfrac{A}{B}$, puis dis combien de fois A contient B.

a) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{7^{15}}{5 \times 7^{14}} = \dfrac{7^{14} \times 7}{5 \times 7^{14}} = \dfrac{7}{5} = 1{,}4$ (on simplifie par 7^{14}).
$1{,}4 > 1$, donc $A > B$.
A vaut 1,4 fois B, soit $40\,\%$ de plus.

b) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{9 \times 2^{20}}{2^{23}} = \dfrac{9}{2^3} = \dfrac{9}{8} = 1{,}125$ (on simplifie par 2^{20}).
$1{,}125 > 1$, donc $A > B$.
A vaut 1,125 fois B, soit $12{,}5\,\%$ de plus.

c) On fait apparaître le même exposant : $A = 2^{3\times 10} = (2^3)^{10} = 8^{10}$ et $B = 3^{2\times 10} = (3^2)^{10} = 9^{10}$.
$\dfrac{A}{B} = \dfrac{8^{10}}{9^{10}} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10}$.
$\dfrac{8}{9} < 1$, et un produit de nombres positifs plus petits que 1 reste plus petit que 1 : $\dfrac{A}{B} < 1$.
Donc $A < B$.

d) $6^{10} = (2 \times 3)^{10} = 2^{10} \times 3^{10}$.
$\dfrac{A}{B} = \dfrac{2^{10} \times 3^{10}}{2^{10} \times 3^9} = \dfrac{3^{10}}{3^9} = 3$.
$3 > 1$, donc $A > B$: $A = 3B$.

e) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{10^8}{3 \times 10^7} = \dfrac{10^7 \times 10}{3 \times 10^7} = \dfrac{10}{3}$ (on simplifie par 10^7).
$\dfrac{10}{3} \approx 3{,}3 > 1$, donc $A > B$: A vaut environ 3,3 fois B.

f) $25 = 5^2$, donc $B = (5^2)^5 = 5^{2\times 5} = 5^{10}$.
$\dfrac{A}{B} = \dfrac{5^{12}}{5^{10}} = 5^{12-10} = 5^2 = 25$.
$25 > 1$, donc $A > B$: $A = 25B$.

Exercice 6 – Encadrer une somme, une différence ★★

On sait que $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $-1 \leqslant b \leqslant 4$ (a à d), puis que $1{,}4 \leqslant x \leqslant 1{,}5$ et $2{,}2 \leqslant y \leqslant 2{,}3$ (e et f). Encadre :

a) On additionne membre à membre : $2 + (-1) \leqslant a + b \leqslant 3 + 4$.
$1 \leqslant a + b \leqslant 7$

b) On multiplie par -1, le sens change : $-4 \leqslant -b \leqslant 1$.
On additionne membre à membre : $2 + (-4) \leqslant a - b \leqslant 3 + 1$.
$-2 \leqslant a - b \leqslant 4$

c) On multiplie par 2, le sens est conservé : $4 \leqslant 2a \leqslant 6$.
On multiplie par 3, le sens est conservé : $-3 \leqslant 3b \leqslant 12$.
On additionne membre à membre : $4 + (-3) \leqslant 2a + 3b \leqslant 6 + 12$.
$1 \leqslant 2a + 3b \leqslant 18$

d) On multiplie par 3, le sens est conservé : $6 \leqslant 3a \leqslant 9$.
On multiplie par -2, le sens change : $-8 \leqslant -2b \leqslant 2$.
On additionne membre à membre : $6 + (-8) \leqslant 3a - 2b \leqslant 9 + 2$.
$-2 \leqslant 3a - 2b \leqslant 11$

e) On multiplie par -1, le sens change : $-1{,}5 \leqslant -x \leqslant -1{,}4$.
On additionne membre à membre : $2{,}2 + (-1{,}5) \leqslant y - x \leqslant 2{,}3 + (-1{,}4)$.
$0{,}7 \leqslant y - x \leqslant 0{,}9$

f) On multiplie par 2, le sens est conservé : $2{,}8 \leqslant 2x \leqslant 3$.
On additionne membre à membre : $2{,}8 + 2{,}2 \leqslant 2x + y \leqslant 3 + 2{,}3$.
$5 \leqslant 2x + y \leqslant 5{,}3$

Exercice 7 – Inverse et produit : ce que permettent les règles ★★★

1. On met au même dénominateur ab : $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{ab} - \dfrac{a}{ab} = \dfrac{b-a}{ab}$.
   $a \leqslant b$, donc $b - a \geqslant 0$.
   $a > 0$ et $b > 0$, donc $ab > 0$.
   Le quotient d'un positif par un positif est positif : $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \geqslant 0$.
   Donc $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$: entre positifs, l'inverse renverse l'ordre.

2. 2, x et 5 sont positifs : d'après 1, l'inverse renverse l'ordre.
   $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$
   On multiplie par -1, le sens change : $-\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{5}$.
   On ajoute 3 : $3 - \dfrac{1}{2} \leqslant 3 - \dfrac{1}{x} \leqslant 3 - \dfrac{1}{5}$.
   $\dfrac{5}{2} \leqslant 3 - \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{14}{5}$

3. On multiplie $L \leqslant 3$ par $\ell > 0$: $L\ell \leqslant 3\ell$.
   On multiplie $\ell \leqslant 2$ par $3 > 0$: $3\ell \leqslant 6$.
   Donc $L\ell \leqslant 3\ell \leqslant 6$: $L\ell \leqslant 6$.
   De même, on multiplie $L \geqslant 2$ par $\ell > 0$: $L\ell \geqslant 2\ell$.
   On multiplie $\ell \geqslant 1{,}5$ par $2 > 0$: $2\ell \geqslant 3$.
   Donc $L\ell \geqslant 3$.
   L'aire est comprise entre 3 m² et 6 m².

4. En multipliant membre à membre, on obtiendrait $1 \times (-5) < 3 \times (-4)$.
   Soit $-5 < -12$: c'est faux, car $-5 > -12$.
   On ne peut donc pas multiplier deux inégalités membre à membre en général (ici, à cause des négatifs).

Exercice 8 – Encadrer une expression en x ★★★

Encadre l'expression, étape par étape. Pour un inverse, utilise le résultat de l'exercice précédent.

a) On multiplie par $2 > 0$, le sens est conservé : $2 \leqslant 2x \leqslant 6$.
On ajoute 1 : $3 \leqslant 2x + 1 \leqslant 7$.
On divise par $3 > 0$, le sens est conservé : $1 \leqslant \dfrac{2x+1}{3} \leqslant \dfrac{7}{3}$.

b) On retranche 2 : $-1 \leqslant x - 2 \leqslant 1$.
On multiplie par -3, le sens change : $3 \geqslant -3(x-2) \geqslant -3$.
Dans l'ordre croissant : $-3 \leqslant -3(x-2) \leqslant 3$.
On ajoute 1 : $-2 \leqslant -3(x-2)+1 \leqslant 4$.

c) On divise par -2, le sens change : $1 > -\dfrac{x}{2} > -\dfrac{1}{2}$.
Dans l'ordre croissant : $-\dfrac{1}{2} < -\dfrac{x}{2} < 1$.
On ajoute 5 : $5 - \dfrac{1}{2} < 5 - \dfrac{x}{2} < 5 + 1$, soit $4{,}5 < 5 - \dfrac{x}{2} < 6$.

d) 2, x et 4 sont positifs : l'inverse renverse l'ordre.
$\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$
On multiplie par $3 > 0$, le sens est conservé : $\dfrac{3}{4} \leqslant \dfrac{3}{x} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

e) On ajoute 1 : $2 \leqslant x + 1 \leqslant 5$.
Ces nombres sont positifs : l'inverse renverse l'ordre.
$\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$

f) On ajoute 3 : $2 \leqslant x + 3 \leqslant 5$.
Ces nombres sont positifs : l'inverse renverse l'ordre.
$\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x+3} \leqslant \dfrac{1}{2}$
On multiplie par $2 > 0$, le sens est conservé : $\dfrac{2}{5} \leqslant \dfrac{2}{x+3} \leqslant 1$.

Exercice 9 – Le grillage du jardin ★★★

1. On additionne les deux encadrements : $12{,}4 + 7{,}8 \leqslant L + \ell \leqslant 12{,}6 + 8$.
   $20{,}2 \leqslant L + \ell \leqslant 20{,}6$
   On multiplie par $2 > 0$, le sens est conservé : $40{,}4 \leqslant P \leqslant 41{,}2$.
   Le périmètre est compris entre $40{,}4$ m et $41{,}2$ m.

2. On encadre d'abord $-\ell$: on multiplie par -1, le sens change.
   $-8 \leqslant -\ell \leqslant -7{,}8$
   On additionne avec l'encadrement de L : $12{,}4 - 8 \leqslant L - \ell \leqslant 12{,}6 - 7{,}8$.
   $4{,}4 \leqslant L - \ell \leqslant 4{,}8$ (en m)

3. On multiplie l'encadrement de P par $3{,}5 > 0$: $3{,}5 \times 40{,}4 \leqslant 3{,}5P \leqslant 3{,}5 \times 41{,}2$.
   $141{,}4 \leqslant 3{,}5P \leqslant 144{,}2$
   On ajoute 25 : $166{,}4 \leqslant 3{,}5P + 25 \leqslant 169{,}2$.
   Le prix est compris entre $166{,}40$ € et $169{,}20$ €.

4. On note n le nombre de mètres : le prix $3{,}5n + 25$ doit rester au plus égal à 168.
   $3{,}5n + 25 \leqslant 168$
   $\iff 3{,}5n \leqslant 143$ (on retranche 25)
   $\iff n \leqslant \dfrac{143}{3{,}5} = \dfrac{286}{7} \approx 40{,}9$ (on divise par $3{,}5 > 0$)
   n est entier : on peut payer au plus 40 m.
   Or $P \geqslant 40{,}4$ m, et $40{,}4 > 40$: il faut au moins 41 m.
   41 m coûtent $3{,}5 \times 41 + 25 = 143{,}5 + 25 = 168{,}50$ €, plus que 168 €.
   Avec 168 €, on est sûr de **ne pas** pouvoir clore le jardin.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *On multiplie par $-2 < 0$: le sens change.*
$x < 4$, donc $-2 \times x > -2 \times 4$.
$-2x > -8$

b) *On ne soustrait pas deux encadrements.*
On encadre $-b$: on multiplie par -1, le sens change : $-5 \leqslant -b \leqslant 0$.
On additionne : $1 + (-5) \leqslant a - b \leqslant 3 + 0$.
$-4 \leqslant a - b \leqslant 3$

c) *Le quotient ne marche que pour des positifs.*
On compare par la différence : $A - B = -8 - (-2) = -8 + 2 = -6$.
$-6 < 0$, donc $A < B$.

d) *Un carré peut être nul.*
$2x - 1 = 0 \iff 2x = 1 \iff x = 0{,}5$.
Pour $x = 0{,}5$, le carré vaut 0 : on écrit $(2x - 1)^2 \geqslant 0$.

e) *Après le changement de sens, on remet dans l'ordre.*
On multiplie par -4, le sens change : $8 > -4x > -4$.
On ajoute 3 : $11 > 3 - 4x > -1$.
Dans l'ordre croissant : $-1 < 3 - 4x < 11$.

f) $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{10}$ *: l'inverse renverse l'ordre.*
4, x et 10 sont positifs : en passant à l'inverse, les bornes échangent leur place.
$\dfrac{1}{10} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{4}$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Si $x > -2$, alors :

Réponse C : $-3x + 1 < 7$
On multiplie par -3 : $-3x < 6$ (le sens change), puis on ajoute 1.

2. $2 \leqslant a \leqslant 5$ et $1 \leqslant b \leqslant 3$. Alors :

Réponse A : $-1 \leqslant a - b \leqslant 4$
$-3 \leqslant -b \leqslant -1$, puis on additionne : $2 - 3 \leqslant a - b \leqslant 5 - 1$.

3. Comparer $\dfrac{4}{7}$ et $\dfrac{5}{9}$:

Réponse D : $\dfrac{4}{7} > \dfrac{5}{9}$
$\dfrac{36}{63} - \dfrac{35}{63} = \dfrac{1}{63} > 0$.

4. $A = 3^{21}$ et $B = 5 \times 3^{20}$. Alors :

Réponse B : $A < B$
$\dfrac{A}{B} = \dfrac{3}{5} < 1$ et les deux nombres sont positifs.

5. Pour tout réel x :

Réponse D : $x^2 + 4 \geqslant 4x$
$x^2 + 4 - 4x = (x-2)^2 \geqslant 0$, nul pour $x = 2$: l'inégalité stricte est fausse.

6. Si $3 \leqslant x \leqslant 5$, alors :

Réponse A : $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{3}$
Entre nombres strictement positifs, l'inverse renverse l'ordre.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).