Corrigé – Image, antécédent, ensemble de définition

Mathématiques – Seconde

Généralités sur les fonctions · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Calculer une image ★

On donne $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = \dfrac{4 - x}{x + 2}$. Calcule :

a) $f\,(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1$
$= 2 \times 4 - 6 + 1$
$= 8 - 6 + 1$
$= 3$

b) $f\,(-1) = 2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1$
$= 2 \times 1 + 3 + 1$
$= 2 + 3 + 1$
$= 6$

c) $f\,(-3) = 2 \times (-3)^2 - 3 \times (-3) + 1$
$= 2 \times 9 + 9 + 1$
$= 18 + 9 + 1$
$= 28$

d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right) + 1$
$= 2 \times \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{2} + 1$
$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} + 1$
$= 0$

e) $f\left(\sqrt{2}\right) = 2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 - 3 \times \left(\sqrt{2}\right) + 1$
$= 2 \times 2 - 3\sqrt{2} + 1$
$= 4 - 3\sqrt{2} + 1$
$= 5 - 3\sqrt{2}$

f) $g\,(0) = \dfrac{4 - 0}{0 + 2}$
$= \dfrac{4}{2}$
$= 2$

g) $g\,(-1) = \dfrac{4 - (-1)}{(-1) + 2}$
$= \dfrac{4 + 1}{-1 + 2}$
$= \dfrac{5}{1}$
$= 5$

h) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{4 - \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right) + 2}$

$= \dfrac{\frac{8}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{4}{2}}$

$= \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}}$

$= \frac{7}{2} \times \frac{2}{5}$

$= \frac{7}{5}$

i) $g(-5) = \dfrac{4 - (-5)}{(-5) + 2}$

$= \dfrac{4 + 5}{-5 + 2}$

$= \dfrac{9}{-3}$

$= -3$

j) Le dénominateur vaut $-2 + 2 = 0$: on ne divise pas par 0.

-2 n'a pas d'image par g.

Exercice 2 – Chercher les antécédents ★

Détermine tous les antécédents de k par la fonction donnée. Écris l'équation, puis résous-la.

a) On résout $f(x) = 5$.

$3x - 7 = 5$

$\iff 3x = 12$ (on ajoute 7)

$\iff x = \dfrac{12}{3}$ (on divise par 3)

$S = \{4\}$

L'antécédent de 5 est 4.

b) On résout $g(x) = -4$.

$-2x + 1 = -4$

$\iff -2x = -5$ (on soustrait 1)

$\iff x = \dfrac{-5}{-2}$ (on divise par -2)

$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

L'antécédent de -4 est $\frac{5}{2}$.

c) On résout $h(x) = 0$.

$\frac{x}{3} + 2 = 0$

$\iff \frac{x}{3} = -2$ (on soustrait 2)

$\iff x = -2 \times 3$ (on multiplie par 3)

$S = \{-6\}$

L'antécédent de 0 est -6.

d) On résout $u(x) = 16$.
$x^2 = 16$
$\iff x = 4$ ou $x = -4$ $(16 = 4^2)$
$S = \{-4\,;\,4\}$
Les antécédents de 16 sont -4 et 4.

e) On résout $v(x) = -9$.
$x^2 = -9$
$S = \varnothing$
Un carré n'est jamais négatif, -9 n'a pas d'antécédent.

f) On résout $w(x) = 3$.
$x^2 + 3 = 3$
$\iff x^2 = 0$ (on soustrait 3)
$\iff x = 0$
$S = \{0\}$
L'antécédent de 3 est 0.

g) On résout $r(x) = 2$.
$x^2 - 5 = 2$
$\iff x^2 = 7$ (on ajoute 5)
$\iff x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$
$S = \left\{-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}\right\}$
Les antécédents de 2 sont $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$.

Exercice 3 – Le vocabulaire ★

Traduis chaque phrase par une égalité, ou chaque égalité par une phrase avec « image » et « antécédent ».

a) $f(-1) = 4$

b) 0 est l'image de 3 par g ; 3 est un antécédent de 0 par g.

c) $h(7) = 2$

d) -5 est l'image de 0 ; 0 est un antécédent de -5.

e) L'abscisse 2 a pour image l'ordonnée -3 : $f(2) = -3$.

f) $f(-4) = 1$ et $f(4) = 1$

Exercice 4 – Antécédents : produit nul et carrés ★★

Détermine tous les antécédents de k.

a) On résout $f(x) = 0$.
$(x - 2)(x + 5) = 0$
$\iff x - 2 = 0$ ou $x + 5 = 0$ (un produit est nul si l'un des facteurs est nul)
$\iff x = 2$ ou $x = -5$
$S = \{-5\,;\,2\}$
Les antécédents de 0 sont 2 et -5.

b) On résout $g(x) = 0$.

$x^2 + 4x = 0$

$\iff x(x+4) = 0$ (on factorise par x)

$\iff x = 0$ ou $x + 4 = 0$ (produit nul)

$\iff x = 0$ ou $x = -4$

$S = \{-4\,;\,0\}$

Les antécédents de 0 sont 0 et -4.

c) On résout $h(x) = 9$.

$(x+1)^2 = 9$

$\iff x + 1 = 3$ ou $x + 1 = -3$ $(9 = 3^2)$

$\iff x = 2$ ou $x = -4$

$S = \{-4\,;\,2\}$

Les antécédents de 9 sont 2 et -4.

d) On résout $u(x) = 19$.

$2x^2 + 1 = 19$

$\iff 2x^2 = 18$ (on soustrait 1)

$\iff x^2 = 9$ (on divise par 2)

$\iff x = 3$ ou $x = -3$

$S = \{-3\,;\,3\}$

Les antécédents de 19 sont 3 et -3.

e) On résout $v(x) = -3$.

$(2x-1)(x+3) = -3$

$\iff 2x^2 + 6x - x - 3 = -3$ (on développe)

$\iff 2x^2 + 5x - 3 = -3$

$\iff 2x^2 + 5x = 0$ (on ajoute 3)

$\iff x(2x+5) = 0$ (on factorise par x)

$\iff x = 0$ ou $2x + 5 = 0$ (produit nul)

$\iff x = 0$ ou $x = -\dfrac{5}{2}$

$S = \left\{-\dfrac{5}{2}\,;\,0\right\}$

Les antécédents de -3 sont 0 et $-\dfrac{5}{2}$.

f) On résout $w(x) = -4$.

$\dfrac{6}{x} = -4$

$\iff x \neq 0$ et $6 = -4x$ (on multiplie par x)

$\iff x = -\dfrac{6}{4}$ (on divise par -4)

$\iff x = -\dfrac{3}{2}$

$S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

L'antécédent de -4 est $-\dfrac{3}{2}$.

Exercice 5 – Un tableau de valeurs ★★

x	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	-4	1	4	5	4	1	-4

1. On remplace x par chaque valeur du tableau.

$$\begin{aligned} h\left(-1\right) &= -\left(-1\right)^2 + 4 \times \left(-1\right) + 1 \\ &= -1 - 4 + 1 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\left(0\right) &= -0^2 + 4 \times 0 + 1 \\ &= -0 + 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\left(1\right) &= -1^2 + 4 \times 1 + 1 \\ &= -1 + 4 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\left(2\right) &= -2^2 + 4 \times 2 + 1 \\ &= -4 + 8 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\left(3\right) &= -3^2 + 4 \times 3 + 1 \\ &= -9 + 12 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\left(4\right) &= -4^2 + 4 \times 4 + 1 \\ &= -16 + 16 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\left(5\right) &= -5^2 + 4 \times 5 + 1 \\ &= -25 + 20 + 1 \\ &= -4 \end{aligned}$$

2. Sous 3, on lit 4 : $h(3) = 4$, l'image de 3 est 4.
On cherche -4 dans la ligne $h(x)$: il est sous -1 et sous 5.
$h(-1) = h(5) = -4$: -1 et 5 sont des antécédents de -4.

3. On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned}-(x-1)(x-3) &= -\left(x^2-3x-x+3\right)\\ &= -\left(x^2-4x+3\right)\\ &= -x^2+4x-3\end{aligned}$$

On retrouve bien $-x^2+4x-3$.

On résout $h(x)=4$:

$$\begin{aligned}-x^2+4x+1 &= 4\\ &\iff -x^2+4x-3=0 \text{ (on soustrait 4)}\\ &\iff -(x-1)(x-3)=0 \text{ (forme factorisée)}\\ &\iff x-1=0 \text{ ou } x-3=0 \text{ (produit nul)}\\ &\iff x=1 \text{ ou } x=3\end{aligned}$$

$S=\{1\,;\,3\}$

L'équation n'a que deux solutions : 4 n'a pas d'autre antécédent que 1 et 3.

Exercice 6 – Le point est-il sur la courbe ? ★★

$\mathcal{C}_f$ est la courbe de $f(x)=x^2-3x+2$. Dis si chaque point appartient à $\mathcal{C}_f$; justifie par un calcul.

a) $f(-1)=(-1)^2-3\times(-1)+2$

$=1+3+2$

$=6$

On trouve 6, l'ordonnée de A : $A\in\mathcal{C}_f$.

b) $f(3)=3^2-3\times3+2$

$=9-9+2$

$=2$

$2\neq1$ (l'ordonnée de B) : $B\notin\mathcal{C}_f$.

c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)+2$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}+2$

$=\dfrac{3}{4}$

On trouve $\dfrac{3}{4}$, l'ordonnée de C : $C\in\mathcal{C}_f$.

d) $f(-2)=(-2)^2-3\times(-2)+2$

$=4+6+2$

$=12$

$12\neq0$ (l'ordonnée de D) : $D\notin\mathcal{C}_f$.

e) $f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-3\times\left(\sqrt{2}\right)+2$

$=2-3\sqrt{2}+2$

$=4-3\sqrt{2}$

On trouve $4-3\sqrt{2}$, l'ordonnée de E : $E\in\mathcal{C}_f$.

Exercice 7 – Ensemble de définition ★★

Détermine l'ensemble de définition de chaque fonction.

a) Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3$.
$D_f =]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[$.

b) Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x + 4 \neq 0 \iff x \neq -4$.
$D_f =]-\infty\,;\,-4[\cup]-4\,;\,+\infty[$.

c) Sous la racine, le nombre doit être positif ou nul : $x - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$.
$D_f = [2\,;\,+\infty[$.

d) Sous la racine, le nombre doit être positif ou nul : $6 - 2x \geqslant 0 \iff -2x \geqslant -6 \iff x \leqslant 3$ (on divise par un nombre négatif : le sens change).
$D_f =]-\infty\,;\,3]$.

e) Aucun quotient ni racine : $D_f = \mathbb{R}$.

f) Sous la racine, le nombre doit être positif ou nul : $x \geqslant 0$.
Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x - 4 \neq 0 \iff x \neq 4$.
On garde les deux conditions.
$D_f = [0\,;\,4[\cup]4\,;\,+\infty[$.

g) Sous la racine, le nombre doit être positif ou nul : $x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$.
Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x \neq 0$.
On garde les deux conditions.
$D_f = [-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 8 – Une fonction de bout en bout ★★★

1. $\begin{aligned} f\left(0\right) &= \left(0 - 3\right)^2 - 4 \\ &= \left(-3\right)^2 - 4 \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$

$\begin{aligned} f\left(-1\right) &= \left(\left(-1\right) - 3\right)^2 - 4 \\ &= \left(-4\right)^2 - 4 \\ &= 16 - 4 \\ &= 12 \end{aligned}$

$\begin{aligned} f\left(3 + \sqrt{2}\right) &= \left(\left(3 + \sqrt{2}\right) - 3\right)^2 - 4 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 \\ &= 2 - 4 \\ &= -2 \end{aligned}$

2. $f(x) = (x-3)^2 - 4$
$= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 - 4$
$= x^2 - 6x + 9 - 4$
$= x^2 - 6x + 5$

$(x-1)(x-5)$
$= x^2 - 5x - x + 5$
$= x^2 - 6x + 5$
Les deux développements sont égaux : $f(x) = (x-1)(x-5)$.
Antécédents de 0 : on résout $f(x) = 0$ avec la forme factorisée.
$(x-1)(x-5) = 0$
$\iff$ $x - 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$ (produit nul)
$\iff$ $x = 1$ ou $x = 5$
$S = \{1\,;\,5\}$
Les antécédents de 0 sont 1 et 5.

3. On utilise la forme de départ : on isole le carré.
Antécédents de -4 :
$(x-3)^2 - 4 = -4$
$\iff$ $(x-3)^2 = 0$ (on ajoute 4)
$\iff$ $x - 3 = 0$
$\iff$ $x = 3$
$S = \{3\}$
-4 a un seul antécédent : 3.
Antécédents de 5 :
$(x-3)^2 - 4 = 5$
$\iff$ $(x-3)^2 = 9$ (on ajoute 4)
$\iff$ $x - 3 = 3$ ou $x - 3 = -3$ ($9 = 3^2$)
$\iff$ $x = 6$ ou $x = 0$
$S = \{0\,;\,6\}$
5 a deux antécédents : 0 et 6.
Antécédents de -6 :
$(x-3)^2 - 4 = -6$
$\iff$ $(x-3)^2 = -2$ (on ajoute 4)
$S = \varnothing$
Un carré n'est jamais négatif : -6 n'a pas d'antécédent.

4. $f(7) = (7-3)^2 - 4$
$= 16 - 4$
$= 12$
On trouve 12, l'ordonnée de A : $A \in \mathcal{C}_f$.
$f(-2) = ((-2)-3)^2 - 4$
$= 25 - 4$
$= 21$
$21 \neq 20$ (l'ordonnée de B) : $B \notin \mathcal{C}_f$.

Exercice 9 – Une fonction quotient ★★★

1. Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$.
   $D_g =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.

2. $$\begin{aligned} g\left(0\right) &= \frac{2\times 0+1}{0-1} \\ &= \frac{1}{-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} g\left(-2\right) &= \frac{2\times (-2)+1}{(-2)-1} \\ &= \frac{-4+1}{-3} \\ &= \frac{-3}{-3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{2\times \left(\frac{1}{2}\right)+1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1} \\ &= \frac{1+1}{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{2}{-\frac{1}{2}} \\ &= 2\times (-2) \\ &= -4 \end{aligned}$$

3. On résout $g(x)=3$, pour $x \neq 1$:
   $$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} &= 3 \\ &\iff 2x+1 = 3\left(x-1\right) \text{ (on multiplie par } x-1\text{, non nul)} \\ &\iff 2x+1 = 3x-3 \text{ (on développe)} \\ &\iff -x = -4 \text{ (on soustrait } 3x \text{ et } 1\text{)} \\ &\iff x = 4 \text{ (on divise par } -1\text{)} \end{aligned}$$
   $S = \{4\}$
   $4 \neq 1$: la valeur convient.
   L'antécédent de 3 est 4.

4. On résout $g(x)=2$, pour $x \neq 1$:
   $$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} &= 2 \\ &\iff 2x+1 = 2\left(x-1\right) \text{ (on multiplie par } x-1\text{, non nul)} \\ &\iff 2x+1 = 2x-2 \text{ (on développe)} \\ &\iff 1 = -2 \text{ (on soustrait } 2x \text{ : c'est impossible)} \end{aligned}$$
   $S = \varnothing$
   L'équation n'a pas de solution : 2 n'a pas d'antécédent par g.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Le carré porte sur -3 en entier : parenthèses.*
$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

b) *Il y en a deux.*
$x^2 = 25 \iff x = 5$ ou $x = -5$: $S = \{-5\,;\,5\}$.

c) $(-2)^2 = 4$*, pas* -4*.*
Un carré n'est jamais négatif : $S = \varnothing$, 0 n'a pas d'antécédent.

d) *C'est l'inverse.*
7 est l'image de 2 ; 2 est un antécédent de 7.

e) *On résout* $x + 2 = 0$.
$x + 2 \neq 0 \iff x \neq -2$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

f) $\sqrt{0} = 0$ *existe : la condition est* $\geqslant 0$.
$x - 4 \geqslant 0 \iff x \geqslant 4$: $D_f = [4\,;\,+\infty[$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $f(x) = 3 - x^2$. L'image de -2 est :

Réponse C : -1
$f(-2) = 3 - (-2)^2 = 3 - 4 = -1$.

2. Par la fonction carré, les antécédents de 9 sont :

Réponse A : -3 et 3
$x^2 = 9 \iff x = 3$ ou $x = -3$.

3. L'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$ est :

Réponse D : $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$
$x + 5 \neq 0 \iff x \neq -5$.

4. L'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{2x - 6}$ est :

Réponse B : $[3\,;\,+\infty[$
$2x - 6 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$, crochet fermé.

5. On sait que $f(4) = -1$. Alors :

Réponse D : 4 est un antécédent de -1
-1 est l'image de 4 ; rien n'empêche -1 d'avoir d'autres antécédents.

6. $f(x) = 2x^2 - 1$. Quel point est sur la courbe de f ?

Réponse A : $(-2\,;\,7)$
$f(-2) = 2 \times 4 - 1 = 7$: l'ordonnée est 7.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).