Troisième / Identités remarquables

benprof particulier.fr

48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Développer $(a+b)^2$*

À retenir : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: je nomme a et b, puis j'écris les trois termes. Le double produit $2ab$ ne disparaît jamais : $(x+10)^2 = x^2 + 20x + 100$. Je garde les parenthèses : $(3x)^2 = 9x^2$, pas $3x^2$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : le carré d'une somme** — Développe chaque carré.

(a) $(x+9)^2$ (b) $(4+x)^2$ (c) $(y+40)^2$

(d) $(x+0{,}7)^2$ (e) $\left(n+\frac{3}{4}\right)^2$ (f) $(t+2{,}5)^2$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : je nomme a et b** — Pour chaque carré, écris qui est a et qui est b, puis développe.

(a) $(2x+7)^2$ (b) $(6+5x)^2$ (c) $(10x+3)^2$

(d) $(x^2+3)^2$ (e) $(5t+y)^2$ (f) $(0{,}5+4y)^2$

Ex. 3 ★★☆ **Retrouve les termes manquants** — Complète les pointillés pour que chaque égalité soit vraie pour tout x.

(a) $(x+\ldots)^2 = x^2 + 60x + \ldots$

(b) $(\ldots+1)^2 = 4x^2 + \ldots + 1$

(c) $(3x+\ldots)^2 = \ldots + 42x + 49$

(d) $(\ldots+\ldots)^2 = 25x^2 + 40x + 16$

(e) $(x+\ldots)^2 = x^2 + \frac{2}{5}x + \ldots$

Ex. 4 ★★☆ **Les erreurs d'Inès** — Inès a développé ces carrés, mais chaque ligne contient une erreur. Trouve-la, puis écris le bon développement.

(a) $(x+6)^2 = x^2 + 36$. Teste avec $x=1$, puis corrige.

(b) $(8x+3)^2 = 8x^2 + 48x + 9$

(c) $(6x+7)^2 = 36x^2 + 13x + 49$

(d) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$

Ex. 5 ★★☆ **Deux méthodes pour un même carré** — On considère l'expression $E = (4x+3)^2$.

(a) Développe $E = (4x+3)(4x+3)$ par double distributivité, en écrivant les quatre produits.

(b) Développe E avec l'identité remarquable, en nommant a et b. Compare avec la question précédente.

(c) Calcule E pour $x=3$ avec la forme $(4x+3)^2$, puis avec la forme développée.

(d) Développe et réduis $F = (4x+3)^2 - (x+2)^2$.

Ex. 6 ★★★ **Le pari de Malik et Lou** — Malik affirme : « Pour tout nombre x, $(3x+4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$. » Lou affirme : « Pour tout nombre x, $(3x+4)^2 = 3x^2 + 12x + 16$. »

(a) Complète le tableau :

x	0	1	-1
$(3x+4)^2$			
$9x^2+24x+16$			
$3x^2+12x+16$			

(b) Le tableau suffit-il à prouver que Malik a raison ? Justifie.

(c) Prouve que Malik a raison en développant $(3x+4)^2$ avec une identité remarquable.

(d) Le tableau suffit-il à prouver que Lou a tort ? Justifie, puis explique ses deux erreurs.

(e) Malik écrit ensuite $\left(\frac{x}{2}+3\right)^2 = \frac{x^2}{2} + 3x + 9$. Vrai ou faux ? Justifie, puis donne le bon développement.

Ex. 7 ★★★ **Le programme de calcul de Nadia** — Nadia propose ce programme : choisir un nombre ; lui ajouter 0,3 ; élever le résultat au carré ; soustraire le carré du nombre de départ.

(a) Applique le programme au nombre 2, en écrivant chaque étape.

(b) Applique le programme au nombre -1, en écrivant chaque étape.

(c) On note x le nombre de départ. Exprime le résultat du programme en fonction de x, développé et réduit.

(d) Quel nombre de départ faut-il choisir pour obtenir 3,09 ? Justifie.

Ex. 8 ★★★ **Le carré découpé de Sacha** — Sacha dessine un carré de côté $2a+b$ (en cm, avec a et b positifs). Il le découpe en un carré de côté $2a$, un carré de côté b et deux rectangles de dimensions $2a$ et b.

(a) Exprime la somme des aires des quatre morceaux en fonction de a et b, puis réduis-la.

(b) Écris $(2a+b)^2 = (2a+b)(2a+b)$ et développe par double distributivité, avec les quatre produits. Que constates-tu ?

(c) Pour $a=4$ et $b=3$, calcule l'aire du grand carré de deux façons différentes.

(d) Sacha développe $(x^2+2)^2$ et écrit x^4+4. Prouve qu'il se trompe avec $x=1$, puis donne le bon développement en nommant a et b.

2. Développer $(a-b)^2$

À retenir : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: le double produit est $-2ab$, le dernier terme est toujours $+b^2$. Ex. : $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, pas $x^2 - 4$. Un essai réussi ne prouve rien ; un contre-exemple suffit à réfuter.

Ex. 9 ★☆☆ **Développer en ligne** — Développe et réduis chaque expression avec l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(a) $(x-9)^2$ (b) $(x-20)^2$ (c) $(3x-7)^2$

(d) $(4x-3)^2$ (e) $(6x-0{,}4)^2$ (f) $\left(\frac{x}{3}-6\right)^2$

Ex. 10 ★☆☆ **Qui est a, qui est b ?** — Pour chaque expression, écris le premier terme a et le second terme b de la différence, puis développe et réduis.

(a) $(8-3x)^2$ (b) $(1-4y)^2$ (c) $(3t-2y)^2$

(d) $(x^2-6)^2$

Ex. 11 ★★☆ **Le cahier d'Inès** — Inès a développé quatre carrés, mais chaque ligne contient une erreur. Pour chaque ligne, repère l'erreur puis écris le bon développement.

(a) $(x-7)^2 = x^2 - 14x - 49$

(b) $(x-10)^2 = x^2 - 100$

(c) $(2x-9)^2 = 2x^2 - 36x + 81$

(d) $\left(\frac{x}{4}-2\right)^2 = \frac{x^2}{16} - 4x + 4$

Ex. 12 ★★☆ **Le test de Lucas** — Lucas pense que, pour tout nombre x, $(x-6)^2 = x^2 - 6x + 36$. Il teste son idée dans un tableau.

x	0	1	3	-2
$(x-6)^2$				
$x^2 - 6x + 36$				

(a) Complète le tableau.

(b) Lucas dit : « Pour $x = 0$, j'obtiens la même valeur, donc l'égalité est vraie pour tout x. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Développe $(x-6)^2$ et explique l'erreur de Lucas.

Ex. 13 ★★☆ **Vrai ou faux ?** — Pour chaque égalité, dis si elle est vraie pour tout nombre x. Justifie : développe pour prouver, ou donne un contre-exemple pour réfuter.

(a) $(4-x)^2 = (x-4)^2$

(b) $(x-1)^2 - (x-12)^2 = 22x - 143$

(c) $-(x-3)^2 = (3-x)^2$

(d) $(0{,}3x-2)^2 = 0{,}09x^2 - 0{,}6x + 4$

Ex. 14 ★★★ **Le programme du club de Vannes** — Au club de maths de Vannes, on propose ce programme de calcul : « Choisis un nombre. Soustrais-lui 4. Élève le résultat au carré. Ajoute 8 fois le nombre de départ. »

(a) Applique le programme au nombre 3.

(b) Applique le programme au nombre -2.

(c) Applique le programme au nombre 0. Compare tes trois résultats au carré du nombre choisi : quelle conjecture fais-tu ?

(d) On note x le nombre de départ. Prouve ta conjecture en développant.

(e) Jade a écrit $(x-4)^2 = x^2 - 16$. Quelle expression obtient-elle pour le programme ? Montre avec $x = 3$ que son calcul est faux.

Ex. 15 ★★★ **L'allée du jardin de Rodez** — À Rodez, un jardin carré a pour côté $2x$ mètres, avec $x > 0{,}25$. On y plante une pelouse carrée de côté $(2x - 0{,}5)$ mètres. Le reste du jardin forme une allée.

(a) Exprime l'aire de la pelouse en fonction de x, sous forme développée et réduite.

(b) Exprime l'aire du jardin entier en fonction de x.

(c) Déduis-en l'aire de l'allée en fonction de x, développée et réduite.

(d) Calcule l'aire de l'allée pour $x = 5$ avec ton expression, puis vérifie avec les côtés du jardin et de la pelouse.

(e) Pour quelle valeur de x l'allée a-t-elle une aire de 19,75 m² ? Justifie.

Ex. 16 ★★★ **Deux expressions à la loupe** — On considère $E = (7-3x)^2 - (-x-3)^2$ et $F = \left(\frac{x}{2}-4\right)^2$.

(a) Dans $(7-3x)^2$, écris qui est a et qui est b, puis développe et réduis.

(b) Sacha dit : « $(-x-3)^2$ et $(x+3)^2$ ont le même développement. » A-t-il raison ? Justifie en développant $(-x-3)^2$.

(c) Déduis-en l'expression de E développée et réduite.

(d) Développe et réduis F.

(e) Vérifie tes résultats : calcule E pour $x = 1$ et F pour $x = 10$, chacun de deux façons.

3. Développer $(a+b)(a-b)$

À retenir : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$: les deux termes du milieu s'annulent. a garde le même signe dans les deux parenthèses : $(1+x)(1-x) = 1 - x^2$. Le carré porte sur tout le terme : $(3x)^2 = 9x^2$. À ne pas confondre avec $(a+b)^2$.

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : développer en ligne** — Développe chaque produit avec l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

(a) $(x+15)(x-15)$

(b) $(t-14)(t+14)$

(c) $(6x+11)(6x-11)$

(d) $(9x-2)(9x+2)$

(e) $(0{,}3x+1)(0{,}3x-1)$

(f) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right)$

(g) $(5a-4b)(5a+4b)$

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : qui change de signe ?** — Pour chaque produit, écris le terme qui garde le même signe dans les deux parenthèses (il joue le rôle de a) et celui qui change de signe (il joue le rôle de b). Développe ensuite.

(a) $(3+x)(x-3)$

(b) $(3+x)(3-x)$

(c) $(-x+4)(x+4)$

(d) $(2y+7)(7-2y)$

(e) $(-5t+1)(5t+1)$

(f) $(a+b)(b-a)$

Ex. 19 ★☆☆ **Compléter les pointillés** — Complète les pointillés pour que chaque égalité soit vraie pour tout nombre.

(a) $(x+\ldots)(x-\ldots) = x^2 - 2\,500$

(b) $(\ldots+5)(\ldots-5) = 64x^2 - 25$

(c) $(\ldots-0{,}6)(\ldots+0{,}6) = x^2 - 0{,}36$

(d) $(\ldots+3t)(\ldots-3t) = 100 - 9t^2$

(e) $(x+\ldots)(\ldots-x) = 4 - x^2$

(f) $(7a+\ldots)(7a-\ldots) = 49a^2 - 9b^2$

Ex. 20 ★★☆ **Les développements de Lina** — Lina a développé ces produits. Pour chaque égalité : a-t-elle raison ? Justifie et corrige si besoin.

(a) Lina écrit : $(x+9)(x-9) = x^2 - 18$.

(b) Lina écrit : $(x-30)(x+30) = x^2 + 900$.

(c) Lina écrit : $(4x+3)(4x-3) = 4x^2 - 9$.

(d) Lina écrit : $(2x+7)(2x+7) = 4x^2 - 49$.

(e) Lina écrit : $(1-6y)(1+6y) = 1 - 36y^2$.

Ex. 21 ★★☆ **Enchaîner et réduire** — Développe puis réduis chaque expression.

(a) $A = (2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$

(b) $B = (x+6)(x-6) - (x-6)^2$

(c) $C = 3(2x+1)(2x-1) - (x+3)(x-3)$

(d) $D = (1{,}5x+2)(1{,}5x-2) - 2{,}25x^2$

Ex. 22 ★★★ **Tester, puis prouver ou réfuter** — Yanis affirme que ces deux égalités sont vraies pour tout nombre x : (1) $(6+x)(x-6) = 36 - x^2$; (2) $(-x+10)(x+10) = 100 - x^2$.

x	0	1	3
$(6+x)(x-6)$			
$36 - x^2$			
$(-x+10)(x+10)$			
$100 - x^2$			

(a) Complète le tableau.

(b) L'égalité (1) est-elle vraie pour tout x ? Justifie, puis écris la forme développée correcte de $(6+x)(x-6)$.

(c) Le tableau suffit-il pour prouver l'égalité (2) ? Justifie, puis prouve-la en développant.

(d) Complète : $(-x+10)(\ldots) = x^2 - 100$. Justifie en nommant a et b.

Ex. 23 ★★★ **Le programme de Chloé** — Programme de Chloé : choisis un nombre ; calcule la somme de ce nombre et de 7 ; calcule la différence de ce nombre et de 7 ; multiplie ces deux résultats ; ajoute 49.

(a) Applique le programme au nombre 4, puis au nombre 2,5.

(b) Quelle conjecture peux-tu faire sur le résultat obtenu ?

(c) Prouve ta conjecture pour un nombre x quelconque.

(d) Théo pense que le produit des deux résultats vaut $(x+7)^2$. A-t-il raison ? Justifie avec $x = 1$.

(e) Lou remplace 7 par $\frac{1}{3}$ dans les deux premiers calculs. Quel nombre doit-elle ajouter à la fin pour que son programme donne toujours le même résultat que celui de Chloé ?

Ex. 24 ★★★ **Les massifs du jardin de Rennes** — Dans un jardin de Rennes, un massif carré a pour côté $3x$ mètres. Un massif rectangulaire a pour longueur $3x+4$ et pour largeur $3x-4$ (en mètres), avec $x > 2$.

(a) Calcule l'aire de chaque massif pour $x = 3$.

(b) Sacha affirme que l'aire du rectangle vaut $3x^2 - 16$. A-t-il raison ? Justifie et corrige si besoin.

(c) Prouve que, pour tout $x > 2$, l'écart entre l'aire du carré et celle du rectangle est toujours le même. Donne cet écart.

(d) Un autre massif rectangulaire mesure $3x + \ldots$ sur $3x - \ldots$ et son aire vaut $9x^2 - 1{,}44$. Complète les pointillés et justifie.

4. Reconnaître une identité et factoriser avec

À retenir : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$: deux carrés séparés par un moins, ainsi $16x^2 - 1 = (4x+1)(4x-1)$. Facteur commun d'abord, parenthèse en bloc. $x^2 + 4$ ne se factorise pas et $x^2 - 4 \neq (x-2)^2$. $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ car $6x = 2 \times x \times 3$.

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : factoriser une différence de deux carrés** — Écris chaque terme comme un carré, puis factorise avec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

(a) $x^2 - 81$ (b) $100 - x^2$ (c) $25x^2 - 4$

(d) $x^2 - 0{,}25$ (e) $x^2 - \frac{1}{9}$ (f) $49a^2 - b^2$

(g) $64 - 9t^2$

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : reconnaître un carré développé** — Écris chaque expression sous la forme $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$ quand c'est possible. Sinon, explique pourquoi.

(a) $x^2 - 18x + 81$ (b) $x^2 + 20x + 100$

(c) $4x^2 + 12x + 9$ (d) $x^2 + 10x + 16$

(e) $16x^2 - 40x + 25$ (f) $9 - 6y + y^2$

Ex. 27 ★★☆ **Factoriser au maximum** — Factorise au maximum chaque expression. Mets d'abord le facteur commun en facteur, s'il y en a un.

(a) $3x^2 - 48$

(b) $50 - 2x^2$

(c) $(x-2)^2 - 25$

(d) $(3x-1)^2 - (x+2)^2$

(e) Vérifie ta réponse à la question c) : développe-la, puis développe $(x-2)^2 - 25$, et compare.

Ex. 28 ★★☆ **Les factorisations de Yanis** — Yanis a écrit ces cinq factorisations, et elles sont toutes fausses. Pour chacune, explique son erreur, puis écris la bonne factorisation quand elle existe.

(a) $x^2 - 64 = (x-8)^2$: montre avec $x = 0$ que c'est faux.

(b) $x^2 + 49 = (x+7)(x-7)$

(c) $81y^2 - 4 = (81y+2)(81y-2)$

(d) $(x+5)^2 - 16 = (x+5+4)(x-5-4)$

(e) $(2x+3)^2 - (x-1)^2 = (3x+2)(x+2)$

Ex. 29 ★★☆ **Choisir la bonne identité** — Pour chaque expression, dis si c'est une différence de deux carrés, un carré développé ou aucun des deux. Factorise-la quand c'est possible.

(a) $t^2 - 12t + 36$ (b) $4x^2 + 1$

(c) $\frac{x^2}{4} - 9$ (d) $25x^2 + 30x + 9$

(e) $x^2 + 6x - 9$

Ex. 30 ★★★ **Le pari de Maëlle** — Maëlle pense que, pour tout nombre x, $x^2 - 100 = (x-10)^2$. Inès pense que, pour tout nombre x, $x^2 - 100 = (x+10)(x-10)$.

x	10	0	3
$x^2 - 100$			
$(x-10)^2$			
$(x+10)(x-10)$			

(a) Complète le tableau.

(b) Maëlle dit : « Pour $x = 10$, les deux premières expressions sont égales, donc j'ai raison. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Prouve que l'égalité d'Inès est vraie pour tout nombre x en développant.

(d) Utilise l'égalité d'Inès avec $x = 100$ pour calculer 110×90 sans calculatrice.

(e) Léo affirme : « Les expressions $x^2 - 100$ et $(x-10)^2$ ne prennent jamais la même valeur. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 31 ★★★ **Le programme de Noé** — Noé propose ce programme : je choisis un nombre. Je calcule son triple, j'ajoute 4 et j'élève au carré : j'obtiens A. Je retranche 2 au nombre de départ et j'élève au carré : j'obtiens B. Le programme affiche $A - B$.

(a) Montre que, si on choisit 1, le programme affiche 48.

(b) Pour le nombre x, écris A et B en fonction de x, puis factorise $A - B$ avec $a^2 - b^2$.

(c) Factorise $A - B$ au maximum.

(d) Utilise ta forme factorisée pour retrouver le résultat de la question a).

(e) Explique pourquoi le programme affiche toujours un multiple de 4 quand on choisit un nombre entier.

Ex. 32 ★★★ **Le terrain de Dinan** — À Dinan, un terrain carré a une aire de $x^2 - 24x + 144$ m², avec $x > 20$. On y creuse un bassin carré de 6 m de côté.

(a) Montre que le côté du terrain mesure $x - 12$ mètres.

(b) Exprime l'aire restante du terrain, puis factorise-la.

(c) Vérifie ta factorisation en développant.

(d) Pour $x = 30$, calcule de tête l'aire restante avec la forme factorisée.

(e) Hugo affirme que son terrain carré a une aire de $x^2 + 14x + 25$ m². Cette expression est-elle le carré d'une somme ? Justifie.

5. *Calcul mental et preuves avec les identités remarquables*

À retenir : Calcul mental : j'écris nombre rond $\pm$ petit nombre, sans oublier le double produit : $101^2 = 10\,000 + 200 + 1$. « Pour tout x » : je développe les deux membres. Égalité fausse : un contre-exemple suffit ; un essai qui marche ne prouve rien.

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : des carrés de tête** — Calcule de tête en écrivant d'abord le découpage autour d'un nombre rond, puis l'identité remarquable.

(a) 102^2 (b) 59^2 (c) $2{,}1^2$

(d) 98^2 (e) 71^2 (f) $7{,}9^2$

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : produits et différences de carrés** — Calcule de tête en écrivant le découpage, puis l'identité remarquable utilisée.

(a) 47×53

(b) $9{,}9 \times 10{,}1$

(c) $68^2 - 32^2$

(d) Complète : $104 \times 96 = (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots) = \ldots^2 - \ldots^2 = \ldots$

(e) $91^2 - 9^2$

Ex. 35 ★★☆ **Tester, puis prouver ou réfuter** — On considère deux égalités : (1) $(x+6)(x-2) = (x+2)^2 - 16$ et (2) $(x+1)^2 - 3 = x^2 + 3x - 2$.

(a) Pour l'égalité (2), complète le tableau en calculant chaque membre séparément :

x	0	1	-2
$(x+1)^2 - 3$			
$x^2 + 3x - 2$			

(b) Tom affirme : « Pour $x = 0$, les deux membres de (2) sont égaux, donc l'égalité (2) est vraie pour tout x. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Prouve que l'égalité (1) est vraie pour tout x.

Ex. 36 ★★☆ **Des entiers bien encadrés** — Dans cet exercice, n désigne un nombre entier.

(a) Sans calculer les deux nombres, compare $2\,024 \times 2\,028$ et $2\,026^2$. Justifie avec une identité remarquable.

(b) Calcule 14×16 et 15^2, puis 29×31 et 30^2. Que remarques-tu ?

(c) Prouve ta remarque pour tout entier n, en développant $(n-1)(n+1)$.

(d) Déduis-en, sans calculatrice, la valeur de $3\,000^2 - 2\,999 \times 3\,001$.

Ex. 37 ★★☆ **Les deux programmes de Lina** — Programme A : « Choisis un nombre. Multiplie ce nombre augmenté de 4 par ce nombre diminué de 4. Soustrais le carré du nombre choisi. » Programme B : « Choisis un nombre. Calcule le carré de ce nombre augmenté de 7. Soustrais le carré de ce nombre diminué de 7. »

(a) Teste le programme A avec 10, puis avec -3.

(b) Prouve que le programme A donne toujours le même résultat, quel que soit le nombre choisi.

(c) Sami écrit pour le programme B : $(x+7)^2 - (x-7)^2 = x^2 + 14x + 49 - x^2 - 14x + 49 = 98$. Trouve son erreur et corrige son calcul.

(d) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 700 avec le programme B ?

Ex. 38 ★★★ **Le concours de calcul mental de Malik** — Au concours de calcul mental de son collège, à Lille, Malik doit calculer sans calculatrice et justifier chaque découpage par une identité remarquable.

(a) Malik écrit : $89^2 = 90^2 - 1^2 = 8\,099$. Explique son erreur, puis calcule 89^2 correctement en écrivant le découpage.

(b) Malik affirme : « $19{,}8 \times 20{,}2$ est plus petit que 400. » Vrai ou faux ? Justifie par un calcul avec une identité remarquable.

(c) Malik affirme : « $73^2 - 27^2 = 46^2$, car $73 - 27 = 46$. » Vrai ou faux ? Justifie en calculant $73^2 - 27^2$ avec une différence de deux carrés.

Ex. 39 ★★★ **Deux impairs qui se suivent** — À Rennes, Yanis multiplie deux nombres impairs consécutifs, puis ajoute 1 au résultat. Dans cet exercice, n désigne un nombre entier.

(a) Effectue le calcul de Yanis avec 5 et 7, puis avec 11 et 13. Que remarques-tu ?

(b) Yanis affirme : « J'ai testé deux fois et ça marche, donc c'est toujours vrai. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Explique pourquoi $2n+1$ et $2n+3$ sont deux nombres impairs consécutifs, puis développe et réduis $(2n+1)(2n+3) + 1$.

(d) Démontre ta remarque de la première question en écrivant le résultat comme le carré d'une expression en n.

(e) Déduis-en le produit 23×25 sans poser la multiplication.

Ex. 40 ★★★ **Le programme d'Inès** — À Toulouse, Inès propose ce programme : « Choisis un nombre entier. Ajoute-lui 6, puis élève le résultat au carré. Soustrais le carré du nombre choisi, puis soustrais 36. »

(a) Teste le programme avec 2, puis avec 5.

(b) Son ami Hugo affirme : « Le résultat est toujours un multiple de 24. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 40 (suite)

(c) On note n le nombre choisi. Écris le résultat du programme avec n, puis développe et réduis.

(d) Prouve que le résultat est toujours un multiple de 12, puis explique pourquoi on ne peut jamais obtenir 100.

(e) Quel entier faut-il choisir pour obtenir -60 ? Vérifie avec le programme.

6. *Pièges : signe devant, ordre inversé, x^4, expressions combinées*

À retenir : Un nombre ou un signe $-$ devant un carré s'applique APRÈS le développement : $-(x-2)^2 = -(x^2-4x+4) = -x^2+4x-4$. Ordre inversé : $(-x+3)^2 = (3-x)^2$. Rappel : $(2x)^2 = 4x^2$ et $(x^2)^2 = x^4$.

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : un nombre ou un signe devant** — Développe d'abord l'identité entre parenthèses, puis multiplie par le nombre ou change tous les signes. Réduis.

(a) $4(x+3)^2$ (b) $-(x-9)^2$

(c) $3(2x-1)^2$ (d) $0{,}5(x+6)^2$

(e) $-(4+x)(4-x)$ (f) $\frac{1}{3}(x+9)^2$

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : ordre inversé, termes négatifs et x^4** — Nomme a et b, puis développe et réduis.

(a) $(-4x+3)^2$ (b) $(x^2-4)^2$

(c) $(x^2+6)(x^2-6)$ (d) $(-x-0{,}4)^2$

(e) $(3+2t)(2t-3)$ (f) $(-y+7)(y+7)$

(g) $(2m^2+1)^2$

Ex. 43 ★★☆ **Expressions combinées** — Développe et réduis chaque expression. Garde des parenthèses autour de chaque développement avant de supprimer le signe $-$.

(a) $A = (x+7)^2 - (x-7)^2$

(b) $B = (x-10)^2 - (x+10)(x-10)$

(c) $C = (2x-7)^2 + (2x+7)(2x-7)$

(d) $D = (x^2+2)^2 - (x^2+3)(x^2-3)$

Ex. 44 ★★☆ **Les trois lignes d'Inès** — Inès développe $A = 2(x-3)^2 - (x+1)^2$.
Ligne 1 : $A = (2x-6)^2 - (x^2+2x+1)$
Ligne 2 : $A = 4x^2 - 24x + 36 - x^2 + 2x + 1$
Ligne 3 : $A = 3x^2 - 22x + 37$

(a) Quelle erreur Inès fait-elle à la ligne 1 ? Explique.

(b) Quelle erreur fait-elle à la ligne 2 ? Explique.

(c) Développe et réduis A correctement.

(d) Calcule A pour $x = 1$ à partir de l'expression de départ. Ton résultat est-il confirmé ? Et celui d'Inès ?

Ex. 45 ★★☆ **Carrés et cadre photo** — Les longueurs sont en cm et x est un nombre positif.

(a) Dans un carré de côté $x+4$, Malo découpe un carré de côté 4. Exprime l'aire restante en fonction de x, développée et réduite.

(b) Une photo carrée de côté x est entourée d'un cadre de 1,5 cm de large. Exprime l'aire du cadre seul, développée et réduite.

(c) Calcule l'aire du cadre de la question précédente pour $x = 10$.

Ex. 46 ★★★ **Le vrai ou faux d'Élise** — Élise, élève de 3e à Lorient, a écrit cinq affirmations. Pour chacune, réponds par vrai ou faux et justifie : développe pour prouver, ou donne un contre-exemple.

(a) Pour tout x, $5(x+1)^2 = (5x+5)^2$.

(b) Pour tout x, $-(x-6)^2 = -x^2+12x-36$.

(c) Pour tout x, $(-6x+1)^2 = 36x^2+12x+1$.

(d) Pour tout x, $(x^2+8)(x^2-8) = x^4-64$.

(e) Pour tout x, $(3x)^2 - (3x-1)(3x+1) = 1$.

Ex. 47 ★★★ **La conjecture de Lina** — On pose $E = (x+6)^2 - (x+6)(x-6)$. Lina calcule E pour quelques valeurs de x.

x	0	1	-2
E			
$12x+72$			

(a) Complète le tableau. Que remarques-tu ?

(b) Hugo écrit : « $E = x^2 + 36 - x^2 - 36 = 0$ ». Le tableau montre qu'il a tort. Trouve ses deux erreurs.

(c) Prouve que, pour tout x, $E = 12x + 72$.

(d) Déduis-en, sans calculatrice, la valeur de $106^2 - 106 \times 94$. Explique ton choix de x.

Ex. 48 ★★★ **Le cadre de Soline** — Les longueurs sont en dm et $x > 1{,}5$. Le tableau de Soline, à Colmar, est un carré de côté $2x-3$. Avec son cadre, l'ensemble forme un carré de côté $2x+3$.

(a) Exprime l'aire du grand carré sous forme développée et réduite.

(b) Montre que l'aire du cadre est égale à $24x$.

(c) Ethan calcule l'aire du cadre avec $2 \times 3(2x+3) + 2 \times 3(2x-3)$. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Soline affirme : « Si on double x, l'aire du cadre double aussi. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Le cadre a une aire de 1,2 m², soit 120 dm². Calcule x, puis le côté du tableau.