1. Développer $(a+b)^2$

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : le carré d'une somme**

(a) $a=x$, $b=9$: $(x+9)^2 = x^2 + 2\times x\times 9 + 9^2 = x^2 + 18x + 81$

(b) $a=4$, $b=x$: $(4+x)^2 = 4^2 + 2\times 4\times x + x^2 = 16 + 8x + x^2$, soit $x^2+8x+16$

(c) $a=y$, $b=40$: $(y+40)^2 = y^2 + 2\times y\times 40 + 40^2 = y^2 + 80y + 1\,600$

(d) $a=x$, $b=0{,}7$: $(x+0{,}7)^2 = x^2 + 2\times x\times 0{,}7 + 0{,}7^2 = x^2 + 1{,}4x + 0{,}49$

(e) $a=n$, $b=\frac{3}{4}$: $\left(n+\frac{3}{4}\right)^2 = n^2 + 2\times n\times\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{9}{16}$

(f) $a=t$, $b=2{,}5$: $(t+2{,}5)^2 = t^2 + 2\times t\times 2{,}5 + 2{,}5^2 = t^2 + 5t + 6{,}25$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : je nomme a et b**

(a) $a=2x$, $b=7$: $(2x+7)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 7 + 7^2 = 4x^2 + 28x + 49$

(b) $a=6$, $b=5x$: $(6+5x)^2 = 6^2 + 2\times 6\times 5x + (5x)^2 = 36 + 60x + 25x^2$

(c) $a=10x$, $b=3$: $(10x+3)^2 = (10x)^2 + 2\times 10x\times 3 + 3^2 = 100x^2 + 60x + 9$

(d) $a=x^2$, $b=3$: $(x^2+3)^2 = (x^2)^2 + 2\times x^2\times 3 + 3^2 = x^4 + 6x^2 + 9$

(e) $a=5t$, $b=y$: $(5t+y)^2 = (5t)^2 + 2\times 5t\times y + y^2 = 25t^2 + 10ty + y^2$

(f) $a=0{,}5$, $b=4y$: $(0{,}5+4y)^2 = 0{,}5^2 + 2\times 0{,}5\times 4y + (4y)^2 = 0{,}25 + 4y + 16y^2$

Ex. 3 ★★☆ **Retrouve les termes manquants**

(a) $2\times x\times b = 60x$ donc $b=30$ et $b^2=900$: $(x+30)^2 = x^2 + 60x + 900$.

(b) $a^2 = 4x^2$ donc $a=2x$; le double produit vaut $2\times 2x\times 1 = 4x$: $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

(c) $b^2 = 49$ donc $b=7$ (et bien $2\times 3x\times 7 = 42x$) ; $a^2 = (3x)^2 = 9x^2$: $(3x+7)^2 = 9x^2 + 42x + 49$.

(d) $a^2 = 25x^2$ donc $a=5x$; $b^2=16$ donc $b=4$; on vérifie $2\times 5x\times 4 = 40x$: $(5x+4)^2 = 25x^2 + 40x + 16$.

(e) $2\times x\times b = \frac{2}{5}x$ donc $b=\frac{1}{5}$ et $b^2 = \frac{1}{25}$: $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$.

Ex. 4 ★★☆ **Les erreurs d'Inès**

(a) Pour $x=1$: $(1+6)^2 = 49$, mais $1^2+36 = 37$. L'égalité est donc fausse : Inès a oublié le double produit. $a=x$, $b=6$: $(x+6)^2 = x^2 + 2\times x\times 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$.

(b) Inès a écrit $8x^2$ au lieu de $(8x)^2 = 64x^2$. $a=8x$, $b=3$: $(8x+3)^2 = (8x)^2 + 2\times 8x\times 3 + 3^2 = 64x^2 + 48x + 9$.

(c) Inès a additionné 6 et 7 : le double produit vaut $2\times 6x\times 7 = 84x$, pas $13x$. $a=6x$, $b=7$: $(6x+7)^2 = (6x)^2 + 2\times 6x\times 7 + 7^2 = 36x^2 + 84x + 49$.

(d) Le double produit est faux : $2\times x\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}x$. $a=x$, $b=\frac{1}{3}$: $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$.

Ex. 5 ★★☆ **Deux méthodes pour un même carré**

(a) $E = 4x\times 4x + 4x\times 3 + 3\times 4x + 3\times 3 = 16x^2 + 12x + 12x + 9 = 16x^2 + 24x + 9$. Les deux produits du milieu sont égaux : ils forment le double produit.

(b) $a=4x$, $b=3$: $E = (4x)^2 + 2\times 4x\times 3 + 3^2 = 16x^2 + 24x + 9$. On retrouve le même résultat, plus vite.

(c) Avec la forme carrée : $(4\times 3+3)^2 = 15^2 = 225$. Avec la forme développée : $16\times 3^2 + 24\times 3 + 9 = 144 + 72 + 9 = 225$. Les deux valeurs sont égales : c'est un bon contrôle.

(d) $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$, donc $F = 16x^2 + 24x + 9 - (x^2 + 4x + 4) = 16x^2 + 24x + 9 - x^2 - 4x - 4 = 15x^2 + 20x + 5$.

Ex. 6 ★★★ **Le pari de Malik et Lou**

(a)

x	0	1	-1
$(3x+4)^2$	16	49	1
$9x^2+24x+16$	16	49	1
$3x^2+12x+16$	16	31	7

Par exemple, pour $x=-1$: $(3\times(-1)+4)^2 = 1^2 = 1$ et $9 - 24 + 16 = 1$.

(b) Non. Le tableau ne teste que trois valeurs. D'ailleurs, pour $x=0$, l'expression de Lou donne aussi 16 alors qu'elle est fausse. Pour prouver qu'une égalité est vraie pour tout x, il faut développer.

(c) $a=3x$, $b=4$: $(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$. L'égalité est vraie pour tout x : Malik a raison.

Ex. 6 **(suite)**

(d) Oui. Pour $x = 1$: $(3x+4)^2 = 49$, mais $3x^2 + 12x + 16 = 31$. Un seul contre-exemple suffit à prouver qu'une égalité est fausse : Lou a tort. Ses erreurs : $(3x)^2 = 9x^2$ et pas $3x^2$; le double produit vaut $2 \times 3x \times 4 = 24x$ et pas $12x$ (elle a oublié le facteur 2).

(e) Faux. Pour $x = 2$: $\left(\frac{2}{2}+3\right)^2 = 4^2 = 16$, mais $\frac{2^2}{2} + 3 \times 2 + 9 = 2 + 6 + 9 = 17$. Malik a écrit $\frac{x^2}{2}$ au lieu de $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$. Bon développement : $a = \frac{x}{2}$, $b = 3$: $\left(\frac{x}{2}+3\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{x}{2} \times 3 + 3^2 = \frac{x^2}{4} + 3x + 9$.

Ex. 7 ★★★ **Le programme de calcul de Nadia**

(a) $2 + 0{,}3 = 2{,}3$; $2{,}3^2 = 5{,}29$; $2^2 = 4$; $5{,}29 - 4 = 1{,}29$. Avec 2, le programme donne 1,29.

(b) $-1 + 0{,}3 = -0{,}7$; $(-0{,}7)^2 = 0{,}49$; $(-1)^2 = 1$; $0{,}49 - 1 = -0{,}51$. Avec -1, le programme donne $-0{,}51$.

(c) Le résultat est $(x+0{,}3)^2 - x^2$. $a = x$, $b = 0{,}3$: $(x+0{,}3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 0{,}3 + 0{,}3^2 = x^2 + 0{,}6x + 0{,}09$ (attention : $0{,}3^2 = 0{,}09$ et pas $0{,}9$). Donc le résultat vaut $x^2 + 0{,}6x + 0{,}09 - x^2 = 0{,}6x + 0{,}09$.

(d) On cherche x tel que $0{,}6x + 0{,}09 = 3{,}09$, donc $0{,}6x = 3$ et $x = 5$. Vérification : $5{,}3^2 - 5^2 = 28{,}09 - 25 = 3{,}09$. Il faut choisir 5.

Ex. 8 ★★★ **Le carré découpé de Sacha**

(a) Aires : $(2a)^2 = 4a^2$, b^2, puis deux fois $2a \times b = 2ab$. Somme : $4a^2 + b^2 + 2ab + 2ab = 4a^2 + 4ab + b^2$.

(b) $(2a+b)(2a+b) = 2a \times 2a + 2a \times b + b \times 2a + b \times b = 4a^2 + 2ab + 2ab + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$. On retrouve la somme des aires : chaque produit correspond à un morceau, et les deux rectangles donnent le double produit $4ab$.

(c) Côté : $2 \times 4 + 3 = 11$, donc l'aire vaut $11^2 = 121$. Avec la forme développée : $4 \times 4^2 + 4 \times 4 \times 3 + 3^2 = 64 + 48 + 9 = 121$. L'aire est de 121 cm².

(d) Pour $x = 1$: $(1^2+2)^2 = 3^2 = 9$, mais $1^4 + 4 = 5$. Comme $9 \neq 5$, Sacha se trompe : il a oublié le double produit. $a = x^2$, $b = 2$: $(x^2+2)^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times 2 + 2^2 = x^4 + 4x^2 + 4$.

2. *Développer $(a-b)^2$*

Ex. 9 ★☆☆ **Développer en ligne**

(a) $a = x$, $b = 9$: $(x-9)^2 = x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2 = x^2 - 18x + 81$

(b) $a = x$, $b = 20$: $(x-20)^2 = x^2 - 2 \times x \times 20 + 20^2 = x^2 - 40x + 400$

(c) $a = 3x$, $b = 7$: $(3x-7)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 7 + 7^2 = 9x^2 - 42x + 49$

(d) $a = 4x$, $b = 3$: $(4x-3)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9$

(e) $a = 6x$, $b = 0{,}4$: $(6x-0{,}4)^2 = (6x)^2 - 2 \times 6x \times 0{,}4 + 0{,}4^2 = 36x^2 - 4{,}8x + 0{,}16$

(f) $a = \frac{x}{3}$, $b = 6$: $\left(\frac{x}{3}-6\right)^2 = \frac{x^2}{9} - 2 \times \frac{x}{3} \times 6 + 6^2 = \frac{x^2}{9} - 4x + 36$

Ex. 10 ★☆☆ **Qui est a, qui est b ?**

(a) $a = 8$, $b = 3x$: $(8-3x)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 3x + (3x)^2 = 64 - 48x + 9x^2$

(b) $a = 1$, $b = 4y$: $(1-4y)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times 4y + (4y)^2 = 1 - 8y + 16y^2$

(c) $a = 3t$, $b = 2y$: $(3t-2y)^2 = (3t)^2 - 2 \times 3t \times 2y + (2y)^2 = 9t^2 - 12ty + 4y^2$

(d) $a = x^2$, $b = 6$: $(x^2-6)^2 = (x^2)^2 - 2 \times x^2 \times 6 + 6^2 = x^4 - 12x^2 + 36$

Ex. 11 ★★☆ **Le cahier d'Inès**

(a) Le dernier terme b^2 est toujours précédé de $+$. $a = x$, $b = 7$: $(x-7)^2 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$.

(b) Inès a oublié le double produit. $a = x$, $b = 10$: $(x-10)^2 = x^2 - 2 \times x \times 10 + 10^2 = x^2 - 20x + 100$.

(c) $(2x)^2$ vaut $4x^2$, pas $2x^2$. $a = 2x$, $b = 9$: $(2x-9)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 9 + 9^2 = 4x^2 - 36x + 81$.

(d) Le double produit est faux. $a = \frac{x}{4}$, $b = 2$: $2 \times \frac{x}{4} \times 2 = x$, donc $\left(\frac{x}{4}-2\right)^2 = \frac{x^2}{16} - x + 4$.

Ex. 12 ★★☆ **Le test de Lucas**

(a)

x	0	1	3	-2
$(x-6)^2$	36	25	9	64
$x^2 - 6x + 36$	36	31	27	52

(b) Non. Un essai réussi ne prouve rien. Pour $x = 1$: $(1-6)^2 = 25$ et $1^2 - 6 \times 1 + 36 = 31$. Comme $25 \neq 31$, $x = 1$ est un contre-exemple : l'égalité est fausse.

Ex. 12 **(suite)**

(c) $a = x$, $b = 6$: $(x-6)^2 = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$. Lucas a oublié le 2 du double produit : il faut $-12x$, pas $-6x$.

Ex. 13 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Vrai. $a = 4$, $b = x$: $(4-x)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times x + x^2 = 16 - 8x + x^2$. $a = x$, $b = 4$: $(x-4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$. On obtient la même expression : l'égalité est vraie pour tout x.

(b) Vrai. $a = x$, $b = 1$: $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. $a = x$, $b = 12$: $(x-12)^2 = x^2 - 2 \times x \times 12 + 12^2 = x^2 - 24x + 144$.
Donc $(x-1)^2 - (x-12)^2 = x^2 - 2x + 1 - x^2 + 24x - 144 = 22x - 143$: l'égalité est vraie pour tout x.

(c) Faux. Pour $x = 0$: $-(0-3)^2 = -9$ et $(3-0)^2 = 9$. Comme $-9 \neq 9$, c'est un contre-exemple.

(d) Faux. Pour $x = 1$: $(0{,}3-2)^2 = 2{,}89$ et $0{,}09 - 0{,}6 + 4 = 3{,}49$. Comme $2{,}89 \neq 3{,}49$, $x = 1$ est un contre-exemple. En fait, $a = 0{,}3x$, $b = 2$: $(0{,}3x - 2)^2 = (0{,}3x)^2 - 2 \times 0{,}3x \times 2 + 2^2 = 0{,}09x^2 - 1{,}2x + 4$.

Ex. 14 ★★★ **Le programme du club de Vannes**

(a) $3 - 4 = -1$; $(-1)^2 = 1$; $1 + 8 \times 3 = 1 + 24 = 25$. Avec 3, on obtient 25.

(b) $-2 - 4 = -6$; $(-6)^2 = 36$; $36 + 8 \times (-2) = 36 - 16 = 20$. Avec -2, on obtient 20.

(c) $0 - 4 = -4$; $(-4)^2 = 16$; $16 + 8 \times 0 = 16$. On a $25 = 3^2 + 16$, $20 = (-2)^2 + 16$ et $16 = 0^2 + 16$.
Conjecture : le résultat est toujours le carré du nombre de départ plus 16.

(d) Le résultat est $(x-4)^2 + 8x$. $a = x$, $b = 4$: $(x-4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$.
Donc $(x-4)^2 + 8x = x^2 - 8x + 16 + 8x = x^2 + 16$. La conjecture est prouvée : pour tout nombre x, le résultat vaut $x^2 + 16$.

(e) Jade obtient $x^2 - 16 + 8x = x^2 + 8x - 16$. Avec $x = 3$: $9 + 24 - 16 = 17$, alors que le programme donne 25.
Son calcul est faux : elle a oublié le double produit $-8x$, et $b^2 = 16$ est précédé de $+$.

Ex. 15 ★★★ **L'allée du jardin de Rodez**

(a) $a = 2x$, $b = 0{,}5$: $(2x - 0{,}5)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 0{,}5 + 0{,}5^2 = 4x^2 - 2x + 0{,}25$. L'aire de la pelouse est $4x^2 - 2x + 0{,}25$ m².

(b) $(2x)^2 = 4x^2$: l'aire du jardin est $4x^2$ m².

Ex. 15 **(suite)**

(c) Aire de l'allée $= 4x^2 - (4x^2 - 2x + 0{,}25) = 4x^2 - 4x^2 + 2x - 0{,}25 = 2x - 0{,}25$. Le signe $-$ devant la parenthèse change tous les signes. L'allée a une aire de $2x - 0{,}25$ m².

(d) $2 \times 5 - 0{,}25 = 9{,}75$. Vérification : le jardin a pour côté 10 m et la pelouse 9,5 m, donc $100 - 90{,}25 = 9{,}75$. L'allée mesure 9,75 m².

(e) $2x - 0{,}25 = 19{,}75$ donne $2x = 20$, donc $x = 10$. Pour $x = 10$, l'allée a une aire de 19,75 m².

Ex. 16 ★★★ **Deux expressions à la loupe**

(a) $a = 7$, $b = 3x$: $(7 - 3x)^2 = 7^2 - 2 \times 7 \times 3x + (3x)^2 = 49 - 42x + 9x^2$.

(b) $a = -x$, $b = 3$: $(-x - 3)^2 = (-x)^2 - 2 \times (-x) \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$. Or $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Sacha a raison : $-x - 3$ est l'opposé de $x + 3$, et deux nombres opposés ont le même carré.

(c) $E = 49 - 42x + 9x^2 - (x^2 + 6x + 9) = 49 - 42x + 9x^2 - x^2 - 6x - 9 = 8x^2 - 48x + 40$.

(d) $a = \frac{x}{2}$, $b = 4$: $F = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{x}{2} \times 4 + 4^2 = \frac{x^2}{4} - 4x + 16$.

(e) Pour $x = 1$: $(7-3)^2 - (-1-3)^2 = 16 - 16 = 0$ et $8 - 48 + 40 = 0$. Pour $x = 10$: $(5-4)^2 = 1$ et $\frac{100}{4} - 40 + 16 = 25 - 40 + 16 = 1$. Les deux façons donnent le même résultat : les développements sont cohérents.

3. *Développer $(a+b)(a-b)$*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : développer en ligne**

(a) $a = x$, $b = 15$: $(x+15)(x-15) = x^2 - 15^2 = x^2 - 225$

(b) $a = t$, $b = 14$: $(t-14)(t+14) = t^2 - 14^2 = t^2 - 196$

(c) $a = 6x$, $b = 11$: $(6x+11)(6x-11) = (6x)^2 - 11^2 = 36x^2 - 121$

(d) $a = 9x$, $b = 2$: $(9x-2)(9x+2) = (9x)^2 - 2^2 = 81x^2 - 4$

(e) $a = 0{,}3x$, $b = 1$: $(0{,}3x+1)(0{,}3x-1) = (0{,}3x)^2 - 1^2 = 0{,}09x^2 - 1$

(f) $a = \frac{2}{3}x$, $b = \frac{1}{2}$: $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}$

(g) Le terme qui joue le rôle de a est $5a$, celui qui joue le rôle de b est $4b$: $(5a-4b)(5a+4b) = (5a)^2 - (4b)^2 = 25a^2 - 16b^2$

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : qui change de signe ?**

(a) x garde son signe, 3 en change : $(3+x)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

(b) 3 garde son signe, x en change : $(3+x)(3-x) = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$

(c) 4 garde son signe, x en change : $(-x+4)(x+4) = 4^2 - x^2 = 16 - x^2$

(d) 7 garde son signe, $2y$ en change : $(2y+7)(7-2y) = 7^2 - (2y)^2 = 49 - 4y^2$

(e) 1 garde son signe, $5t$ en change : $(-5t+1)(5t+1) = 1^2 - (5t)^2 = 1 - 25t^2$

(f) b garde son signe (il joue le rôle de a), a en change (il joue le rôle de b) : $(a+b)(b-a) = b^2 - a^2$

Ex. 19 ★☆☆ **Compléter les pointillés**

(a) $2\,500 = 50^2$: $(x+50)(x-50) = x^2 - 2\,500$

(b) $64x^2 = (8x)^2$: $(8x+5)(8x-5) = 64x^2 - 25$

(c) $0{,}36 = 0{,}6^2$: $(x-0{,}6)(x+0{,}6) = x^2 - 0{,}36$

(d) $100 = 10^2$: $(10+3t)(10-3t) = 100 - 9t^2$

(e) $4 = 2^2$ et 2 garde son signe : $(x+2)(2-x) = 4 - x^2$

(f) $9b^2 = (3b)^2$: $(7a+3b)(7a-3b) = 49a^2 - 9b^2$

Ex. 20 ★★☆ **Les développements de Lina**

(a) $a = x$, $b = 9$: $(x+9)(x-9) = x^2 - 9^2 = x^2 - 81$. Lina a tort : elle a calculé 2×9 au lieu de 9^2.

(b) $a = x$, $b = 30$: $(x-30)(x+30) = x^2 - 30^2 = x^2 - 900$. Lina a tort : on soustrait b^2, le signe est $-$.

(c) $a = 4x$, $b = 3$: $(4x+3)(4x-3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$. Lina a tort : $(4x)^2 = 16x^2$, pas $4x^2$.

(d) Les deux parenthèses sont identiques : c'est $(2x+7)^2$, avec $a = 2x$, $b = 7$: $(2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = 4x^2 + 28x + 49$. Lina a tort : ce n'est pas une somme fois une différence.

(e) $a = 1$, $b = 6y$: $(1-6y)(1+6y) = 1^2 - (6y)^2 = 1 - 36y^2$. Lina a raison.

Ex. 21 ★★☆ **Enchaîner et réduire**

(a) $(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$, puis $a = 4x^2$, $b = 1$: $A = (4x^2-1)(4x^2+1) = (4x^2)^2 - 1^2 = 16x^4 - 1$.
Donc $A = 16x^4 - 1$.

(b) $(x+6)(x-6) = x^2 - 36$ et $(x-6)^2 = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$. $B = x^2 - 36 - x^2 + 12x - 36$, donc $B = 12x - 72$.

Ex. 21 (suite)

(c) $3(2x+1)(2x-1) = 3(4x^2-1) = 12x^2 - 3$ et $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$. $C = 12x^2 - 3 - x^2 + 9$, donc $C = 11x^2 + 6$.

(d) $a = 1{,}5x$, $b = 2$: $(1{,}5x)^2 - 2^2 = 2{,}25x^2 - 4$. $D = 2{,}25x^2 - 4 - 2{,}25x^2$, donc $D = -4$ pour tout x.

Ex. 22 ★★★ **Tester, puis prouver ou réfuter**

(a)

x	0	1	3
$(6+x)(x-6)$	-36	-35	-27
$36 - x^2$	36	35	27
$(-x+10)(x+10)$	100	99	91
$100 - x^2$	100	99	91

(b) Pour $x = 0$: $(6+0)(0-6) = -36$, mais $36 - 0^2 = 36$. C'est un contre-exemple : l'égalité (1) est fausse. Le terme qui garde son signe est x : $a = x$, $b = 6$, donc $(x+6)(x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$.

(c) Non : trois valeurs ne prouvent rien pour tous les nombres. On développe : $(-x+10)(x+10) = (10-x)(10+x)$, avec $a = 10$ et $b = x$: $10^2 - x^2 = 100 - x^2$. L'égalité (2) est vraie pour tout x.

(d) On veut $x^2 - 100 = -(100 - x^2)$: il faut que $-x$ garde son signe. La parenthèse est $-x - 10$. Avec $a = -x$ et $b = 10$: $(-x+10)(-x-10) = (-x)^2 - 10^2 = x^2 - 100$
.
Donc $(-x+10)(-x-10) = x^2 - 100$.

Ex. 23 ★★★ **Le programme de Chloé**

(a) Avec 4 : $(4+7) \times (4-7) = 11 \times (-3) = -33$, puis $-33 + 49 = 16$. Avec 2,5 : $9{,}5 \times (-4{,}5) = -42{,}75$, puis $-42{,}75 + 49 = 6{,}25$. Les résultats sont 16 et 6,25.

(b) $16 = 4^2$ et $6{,}25 = 2{,}5^2$. On conjecture que le programme donne toujours le carré du nombre choisi.

(c) Le programme donne $(x+7)(x-7) + 49$. Avec $a = x$ et $b = 7$: $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$.
Donc le résultat vaut $x^2 - 49 + 49 = x^2$: on obtient toujours le carré du nombre choisi.

(d) Pour $x = 1$: $(1+7)(1-7) = 8 \times (-6) = -48$, alors que $(1+7)^2 = 64$. Théo a tort : le produit d'une somme par une différence n'est pas un carré, il vaut $x^2 - 49$.

(e) Lou obtient $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{9}$. Pour retrouver x^2, elle doit ajouter $\frac{1}{9}$.

Ex. 24 ★★★ **Les massifs du jardin de Rennes**

(a) Pour $x = 3$: le carré a pour côté 9 m, son aire est $9^2 = 81$ m². Le rectangle mesure 13 m sur 5 m, son aire est $13 \times 5 = 65$ m².

(b) Pour $x = 3$: $3 \times 3^2 - 16 = 11$, alors que l'aire vaut 65 m². Sacha a tort : il a oublié d'élever 3 au carré. Avec $a = 3x$ et $b = 4$: $(3x + 4)(3x - 4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$.

(c) L'aire du carré est $(3x)^2 = 9x^2$. L'écart vaut $9x^2 - (9x^2 - 16) = 9x^2 - 9x^2 + 16 = 16$. L'aire du carré dépasse toujours celle du rectangle de 16 m².

(d) $9x^2 - 1{,}44 = (3x)^2 - b^2$ avec $b^2 = 1{,}44$, donc $b = 1{,}2$ car $1{,}2^2 = 1{,}44$. Le massif mesure $3x + 1{,}2$ sur $3x - 1{,}2$: $(3x + 1{,}2)(3x - 1{,}2) = 9x^2 - 1{,}44$.

4. *Reconnaître une identité et factoriser avec*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : factoriser une différence de deux carrés**

(a) $x^2 - 81 = x^2 - 9^2 = (x + 9)(x - 9)$

(b) $100 - x^2 = 10^2 - x^2 = (10 + x)(10 - x)$: je garde l'ordre, 10 d'abord.

(c) $25x^2 - 4 = (5x)^2 - 2^2 = (5x + 2)(5x - 2)$: ici $a = 5x$, et non $25x$.

(d) $x^2 - 0{,}25 = x^2 - 0{,}5^2 = (x + 0{,}5)(x - 0{,}5)$

(e) $x^2 - \frac{1}{9} = x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

(f) $49a^2 - b^2 = (7a)^2 - b^2 = (7a + b)(7a - b)$

(g) $64 - 9t^2 = 8^2 - (3t)^2 = (8 + 3t)(8 - 3t)$

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : reconnaître un carré développé**

(a) $81 = 9^2$ et $2 \times x \times 9 = 18x$, donc $x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$.

(b) $100 = 10^2$ et $2 \times x \times 10 = 20x$, donc $x^2 + 20x + 100 = (x + 10)^2$.

(c) $4x^2 = (2x)^2$, $9 = 3^2$ et $2 \times 2x \times 3 = 12x$, donc $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$.

(d) Pour obtenir le double produit $10x$, il faudrait $b = 5$. Mais $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$ et $16 \neq 25$. Ce n'est donc pas un carré développé.

(e) $16x^2 = (4x)^2$, $25 = 5^2$ et $2 \times 4x \times 5 = 40x$, donc $16x^2 - 40x + 25 = (4x - 5)^2$.

(f) $9 = 3^2$ et $2 \times 3 \times y = 6y$, donc $9 - 6y + y^2 = (3 - y)^2$.

Ex. 27 ★★☆ **Factoriser au maximum**

(a) $3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x^2 - 4^2) = 3(x + 4)(x - 4)$. On obtient la forme factorisée $3(x + 4)(x - 4)$.

(b) $50 - 2x^2 = 2(25 - x^2) = 2(5^2 - x^2) = 2(5 + x)(5 - x)$. On obtient la forme factorisée $2(5 + x)(5 - x)$.

(c) $a = x - 2$ et $b = 5$: $(x - 2)^2 - 5^2 = (x - 2 + 5)(x - 2 - 5) = (x + 3)(x - 7)$. On obtient la forme factorisée $(x + 3)(x - 7)$.

(d) $a = 3x - 1$ et $b = x + 2$: $[(3x - 1) + (x + 2)][(3x - 1) - (x + 2)] = (3x - 1 + x + 2)(3x - 1 - x - 2) = (4x + 1)(2x - 3)$. On obtient la forme factorisée $(4x + 1)(2x - 3)$.

(e) $(x + 3)(x - 7) = x^2 - 7x + 3x - 21 = x^2 - 4x - 21$ et $(x - 2)^2 - 25 = x^2 - 4x + 4 - 25 = x^2 - 4x - 21$. Les deux développements sont égaux, donc la factorisation est juste.

Ex. 28 ★★☆ **Les factorisations de Yanis**

(a) Pour $x = 0$: $0^2 - 64 = -64$ mais $(0 - 8)^2 = 64$. Les deux résultats sont différents, donc l'égalité est fausse. La bonne factorisation est $x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x + 8)(x - 8)$.

(b) En développant, on trouve $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$ et non $x^2 + 49$. L'expression $x^2 + 49$ est une somme de deux carrés : elle ne se factorise pas avec $a^2 - b^2$.

(c) $81y^2$ est le carré de $9y$, pas de $81y$. La bonne factorisation est $81y^2 - 4 = (9y)^2 - 2^2 = (9y + 2)(9y - 2)$.

(d) Yanis n'a pas gardé $x + 5$ en bloc dans la seconde parenthèse. La bonne factorisation est $(x + 5)^2 - 4^2 = (x + 5 + 4)(x + 5 - 4) = (x + 9)(x + 1)$.

(e) Yanis a oublié que le signe $-$ porte sur toute la parenthèse $x - 1$. On a $(2x + 3) - (x - 1) = 2x + 3 - x + 1 = x + 4$, donc la bonne factorisation est $(3x + 2)(x + 4)$.

Ex. 29 ★★☆ **Choisir la bonne identité**

(a) $36 = 6^2$ et $2 \times t \times 6 = 12t$: c'est un carré développé. On a donc $t^2 - 12t + 36 = (t - 6)^2$.

(b) $4x^2 = (2x)^2$ et $1 = 1^2$: c'est une somme de deux carrés, pas une différence. Il n'y a pas de double produit, donc ce n'est pas non plus un carré développé. L'expression $4x^2 + 1$ ne se factorise pas avec ces identités.

(c) $\frac{x^2}{4} = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ et $9 = 3^2$: c'est une différence de deux carrés. On a donc $\frac{x^2}{4} - 9 = \left(\frac{x}{2} + 3\right)\left(\frac{x}{2} - 3\right)$.

Ex. 29 **(suite)**

(d) $25x^2 = (5x)^2$, $9 = 3^2$ et $2 \times 5x \times 3 = 30x$: c'est un carré développé. On a donc $25x^2 + 30x + 9 = (5x + 3)^2$.

(e) Elle a trois termes, donc ce n'est pas une différence de deux carrés. Le dernier terme -9 est négatif, alors qu'un carré b^2 est positif : ce n'est pas non plus un carré développé. Ce n'est aucun des deux.

Ex. 30 ★★★ **Le pari de Maëlle**

(a)

x	10	0	3
$x^2 - 100$	0	-100	-91
$(x-10)^2$	0	100	49
$(x+10)(x-10)$	0	-100	-91

(b) Non. Une seule valeur ne suffit pas à prouver une égalité. Pour $x = 0$: $x^2 - 100 = -100$ mais $(x-10)^2 = 100$. Ce contre-exemple prouve que l'égalité de Maëlle est fausse.

(c) $(x+10)(x-10) = x^2 - 10x + 10x - 100 = x^2 - 100$. Les termes $-10x$ et $+10x$ s'annulent, donc l'égalité d'Inès est vraie pour tout x.

(d) Avec $x = 100$: $110 \times 90 = (100+10)(100-10) = 100^2 - 100 = 10\,000 - 100 = 9\,900$.
Donc $110 \times 90 = 9\,900$.

(e) Non. Le tableau montre que pour $x = 10$, $x^2 - 100 = 0$ et $(x-10)^2 = 0$: les deux expressions prennent la même valeur. Un seul exemple suffit à contredire «jamais».

Ex. 31 ★★★ **Le programme de Noé**

(a) $A = (3 \times 1 + 4)^2 = 7^2 = 49$ et $B = (1-2)^2 = (-1)^2 = 1$. Le programme affiche $49 - 1 = 48$.

(b) $A = (3x+4)^2$ et $B = (x-2)^2$. Avec $a = 3x+4$ et $b = x-2$, le signe $-$ change tous les signes de la seconde parenthèse : $A - B = (3x + 4 + x - 2)(3x + 4 - x + 2) = (4x+2)(2x+6)$.

(c) $4x + 2 = 2(2x+1)$ et $2x + 6 = 2(x+3)$, donc $A - B = 4(2x+1)(x+3)$. C'est la forme factorisée au maximum.

(d) Pour $x = 1$: $4(2 \times 1 + 1)(1+3) = 4 \times 3 \times 4 = 48$. On retrouve bien le résultat de la question a).

(e) Le résultat vaut $4(2x+1)(x+3)$. Si x est entier, $(2x+1)(x+3)$ est un entier, donc le résultat est 4 fois un entier : c'est un multiple de 4.

Ex. 32 ★★★ **Le terrain de Dinan**

(a) $x^2 - 24x + 144 = x^2 - 2 \times x \times 12 + 12^2 = (x-12)^2$. L'aire est le carré de $x - 12$, donc le côté mesure $x - 12$ mètres.

(b) Aire restante : $(x-12)^2 - 6^2$. Je garde $x - 12$ en bloc : $(x-12)^2 - 6^2 = (x - 12 + 6)(x - 12 - 6) = (x - 6)(x - 18)$. L'aire restante est $(x-6)(x-18)$ m².

(c) $(x-6)(x-18) = x^2 - 18x - 6x + 108 = x^2 - 24x + 108$ et $(x-12)^2 - 36 = x^2 - 24x + 144 - 36 = x^2 - 24x + 108$. Les deux formes sont égales.

(d) $(30-6)(30-18) = 24 \times 12 = 288$. L'aire restante est 288 m².

(e) Non. Le double produit $14x = 2 \times x \times 7$ impose $b = 7$, or $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$ et $25 \neq 49$. Avec $25 = 5^2$, le double produit serait $2 \times x \times 5 = 10x$, pas $14x$. Ce n'est pas le carré d'une somme.

5. *Calcul mental et preuves avec les identités remarquables*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : des carrés de tête**

(a) $102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10\,000 + 400 + 4 = 10\,404$
(et non 10 004 : on n'oublie pas le double produit).

(b) $59^2 = (60-1)^2 = 60^2 - 2 \times 60 \times 1 + 1^2 = 3\,600 - 120 + 1 = 3\,481$

(c) $2{,}1^2 = (2 + 0{,}1)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 0{,}1 + 0{,}1^2 = 4 + 0{,}4 + 0{,}01 = 4{,}41$

(d) $98^2 = (100-2)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9\,604$

(e) $71^2 = (70+1)^2 = 70^2 + 2 \times 70 \times 1 + 1^2 = 4\,900 + 140 + 1 = 5\,041$

(f) $7{,}9^2 = (8 - 0{,}1)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 0{,}1 + 0{,}1^2 = 64 - 1{,}6 + 0{,}01 = 62{,}41$

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : produits et différences de carrés**

(a) $47 \times 53 = (50-3)(50+3) = 50^2 - 3^2 = 2\,500 - 9 = 2\,491$

(b) $9{,}9 \times 10{,}1 = (10 - 0{,}1)(10 + 0{,}1) = 10^2 - 0{,}1^2 = 100 - 0{,}01 = 99{,}99$

(c) $68^2 - 32^2 = (68+32)(68-32) = 100 \times 36 = 3\,600$

(d) $104 \times 96 = (100+4)(100-4) = 100^2 - 4^2 = 10\,000 - 16 = 9\,984$

Ex. 34 **(suite)**

(e) $91^2 - 9^2 = (91+9)(91-9) = 100 \times 82 = 8\,200$

Ex. 35 ★★☆ **Tester, puis prouver ou réfuter**

(a)

x	0	1	-2
$(x+1)^2 - 3$	-2	1	-2
$x^2 + 3x - 2$	-2	2	-4

(b) Non. Pour $x = 1$, le membre de gauche vaut 1 et celui de droite vaut 2 : $x = 1$ est un contre-exemple, donc l'égalité (2) est fausse. Un essai qui marche ($x = 0$) ne prouve rien. D'ailleurs, $(x+1)^2 - 3 = x^2 + 2x - 2$, qui n'est pas $x^2 + 3x - 2$.

(c) À gauche : $(x+6)(x-2) = x^2 - 2x + 6x - 12 = x^2 + 4x - 12$. À droite : $a = x$, $b = 2$: $(x+2)^2 - 16 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 16 = x^2 + 4x + 4 - 16 = x^2 + 4x - 12$. On obtient la même expression : l'égalité (1) est vraie pour tout x.

Ex. 36 ★★☆ **Des entiers bien encadrés**

(a) $2\,024 \times 2\,028 = (2\,026 - 2)(2\,026 + 2) = 2\,026^2 - 2^2 = 2\,026^2 - 4$.
Donc $2\,026^2$ est le plus grand, de 4.

(b) $14 \times 16 = 224$ et $15^2 = 225$; $29 \times 31 = 899$ et $30^2 = 900$. Chaque fois, le produit des deux entiers qui encadrent un nombre est égal au carré de ce nombre moins 1.

(c) $(n-1)(n+1) = n^2 + n - n - 1 = n^2 - 1$ (c'est $a^2 - b^2$ avec $a = n$, $b = 1$). Pour tout entier n, le produit des deux entiers qui encadrent n vaut $n^2 - 1$: la remarque est prouvée.

(d) Avec $n = 3\,000$: $2\,999 \times 3\,001 = 3\,000^2 - 1$.
Donc $3\,000^2 - 2\,999 \times 3\,001 = 3\,000^2 - (3\,000^2 - 1) = 1$.

Ex. 37 ★★☆ **Les deux programmes de Lina**

(a) Avec 10 : $14 \times 6 - 10^2 = 84 - 100 = -16$. Avec -3 : $1 \times (-7) - (-3)^2 = -7 - 9 = -16$.

(b) Avec x : $(x+4)(x-4) - x^2 = x^2 - 16 - x^2 = -16$. Le programme A donne toujours -16.

(c) Sami n'a changé que le signe de x^2. Le signe $-$ devant la parenthèse change tous les signes : $-(x-7)^2 = -(x^2 - 14x + 49) = -x^2 + 14x - 49$.
Donc $(x+7)^2 - (x-7)^2 = x^2 + 14x + 49 - x^2 + 14x - 49 = 28x$. Le programme B donne toujours 28 fois le nombre choisi.

Ex. 37 **(suite)**

(d) Il faut que $28x = 700$, donc $x = 700 \div 28 = 25$. Il faut choisir 25.

Ex. 38 ★★★ **Le concours de calcul mental de Malik**

(a) Malik a oublié le double produit : $(90-1)^2 \neq 90^2 - 1^2$. $a = 90$, $b = 1$: $89^2 = (90-1)^2 = 90^2 - 2 \times 90 \times 1 + 1^2 = 8\,100 - 180 + 1 = 7\,921$.
Donc $89^2 = 7\,921$.

(b) Vrai. $a = 20$, $b = 0{,}2$: $19{,}8 \times 20{,}2 = (20 - 0{,}2)(20 + 0{,}2) = 20^2 - 0{,}2^2 = 400 - 0{,}04 = 399{,}96$, et $399{,}96 < 400$. Malik a raison.

(c) Faux. $73^2 - 27^2 = (73+27)(73-27) = 100 \times 46 = 4\,600$, alors que $46^2 = 2\,116$. Une différence de deux carrés s'écrit $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, et non $(a-b)^2$.

Ex. 39 ★★★ **Deux impairs qui se suivent**

(a) $5 \times 7 + 1 = 36 = 6^2$ et $11 \times 13 + 1 = 144 = 12^2$. On obtient à chaque fois le carré du nombre pair situé entre les deux impairs.

(b) Non : un essai (ou deux) qui marche ne prouve rien. Pour prouver que c'est toujours vrai, il faut un calcul avec une lettre, valable pour tous les entiers.

(c) $2n + 1$ est impair, et $2n + 3 = (2n+1) + 2$ est l'impair suivant. $(2n+1)(2n+3) + 1 = 4n^2 + 6n + 2n + 3 + 1 = 4n^2 + 8n + 4$.

(d) $a = 2n$, $b = 2$: $(2n+2)^2 = (2n)^2 + 2 \times 2n \times 2 + 2^2 = 4n^2 + 8n + 4$.
Donc $(2n+1)(2n+3) + 1 = (2n+2)^2$: le résultat est toujours le carré du nombre pair $2n + 2$ situé entre les deux impairs.

(e) 23 et 25 sont deux impairs consécutifs, encadrant 24 : $23 \times 25 + 1 = 24^2 = 576$.
Donc $23 \times 25 = 576 - 1 = 575$.

Ex. 40 ★★★ **Le programme d'Inès**

(a) Avec 2 : $8^2 - 2^2 - 36 = 64 - 4 - 36 = 24$. Avec 5 : $11^2 - 5^2 - 36 = 121 - 25 - 36 = 60$. On obtient 24, puis 60.

(b) Faux. Avec 5, on obtient 60, qui n'est pas un multiple de 24 ($60 = 2 \times 24 + 12$). 5 est un contre-exemple ; l'essai avec 2 qui marchait ne prouvait rien.

(c) Résultat : $(n+6)^2 - n^2 - 36$. $a = n$, $b = 6$: $(n+6)^2 = n^2 + 2 \times n \times 6 + 6^2 = n^2 + 12n + 36$.
Donc le résultat vaut $n^2 + 12n + 36 - n^2 - 36 = 12n$.

Ex. 40 (suite)

(d) Le résultat vaut $12n$ avec n entier : c'est toujours un multiple de 12. Or 100 n'est pas un multiple de 12 ($100 = 8 \times 12 + 4$) : on ne peut jamais obtenir 100.

(e) Il faut $12n = -60$, donc $n = -5$. Vérification : $(-5+6)^2 - (-5)^2 - 36 = 1 - 25 - 36 = -60$. Il faut choisir -5.

6. *Pièges : signe devant, ordre inversé, x^4, expressions combinées*

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : un nombre ou un signe devant**

(a) $a = x, b = 3$: $4(x+3)^2 = 4(x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) = 4(x^2 + 6x + 9) = 4x^2 + 24x + 36$ (et non $(4x+12)^2$).

(b) $a = x, b = 9$: $-(x-9)^2 = -(x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2) = -(x^2 - 18x + 81) = -x^2 + 18x - 81$.

(c) $a = 2x, b = 1$: $3(2x-1)^2 = 3((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2) = 3(4x^2 - 4x + 1) = 12x^2 - 12x + 3$.

(d) $a = x, b = 6$: $0{,}5(x+6)^2 = 0{,}5(x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2) = 0{,}5(x^2 + 12x + 36) = 0{,}5x^2 + 6x + 18$.

(e) $a = 4, b = x$: $-(4+x)(4-x) = -(4^2 - x^2) = -(16 - x^2) = x^2 - 16$.

(f) $a = x, b = 9$: $\frac{1}{3}(x+9)^2 = \frac{1}{3}(x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2) = \frac{1}{3}(x^2 + 18x + 81) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 27$.

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : ordre inversé, termes négatifs et x^4**

(a) $(-4x+3)^2 = (3-4x)^2$; $a = 3, b = 4x$: $3^2 - 2 \times 3 \times 4x + (4x)^2 = 16x^2 - 24x + 9$.

(b) $a = x^2, b = 4$: $(x^2)^2 - 2 \times x^2 \times 4 + 4^2 = x^4 - 8x^2 + 16$.

(c) $a = x^2, b = 6$: $(x^2)^2 - 6^2 = x^4 - 36$.

(d) $(-x - 0{,}4)^2 = (x + 0{,}4)^2$; $a = x, b = 0{,}4$: $x^2 + 2 \times x \times 0{,}4 + 0{,}4^2 = x^2 + 0{,}8x + 0{,}16$.

(e) $(2t+3)(2t-3)$; $a = 2t, b = 3$: $(2t)^2 - 3^2 = 4t^2 - 9$.

(f) $(7-y)(7+y)$; $a = 7, b = y$: $7^2 - y^2 = 49 - y^2$.

(g) $a = 2m^2, b = 1$: $(2m^2)^2 + 2 \times 2m^2 \times 1 + 1^2 = 4m^4 + 4m^2 + 1$.

Ex. 43 ★★☆ **Expressions combinées**

(a) $A = (x^2 + 14x + 49) - (x^2 - 14x + 49) = x^2 + 14x + 49 - x^2 + 14x - 49 = 28x$. Les x^2 et les 49 s'annulent : $A = 28x$.

Ex. 43 (suite)

(b) $B = (x^2 - 20x + 100) - (x^2 - 100) = x^2 - 20x + 100 - x^2 + 100 = -20x + 200$.
Donc $B = -20x + 200$.

(c) $C = (4x^2 - 28x + 49) + (4x^2 - 49) = 8x^2 - 28x$.
Donc $C = 8x^2 - 28x$.

(d) $D = (x^4 + 4x^2 + 4) - (x^4 - 9) = x^4 + 4x^2 + 4 - x^4 + 9 = 4x^2 + 13$.
Donc $D = 4x^2 + 13$.

Ex. 44 ★★☆ **Les trois lignes d'Inès**

(a) Le 2 n'entre pas dans le carré : $2(x-3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9)$, alors que $(2x-6)^2 = 4(x-3)^2$. Inès a donc multiplié par 4 au lieu de 2.

(b) Le signe $-$ change TOUS les signes de la parenthèse : $-(x^2 + 2x + 1) = -x^2 - 2x - 1$. Inès n'a changé que le premier signe.

(c) $A = 2(x^2 - 6x + 9) - (x^2 + 2x + 1) = 2x^2 - 12x + 18 - x^2 - 2x - 1 = x^2 - 14x + 17$.

(d) $A = 2 \times (1-3)^2 - (1+1)^2 = 2 \times 4 - 4 = 4$. On a bien $1^2 - 14 \times 1 + 17 = 4$, mais Inès trouve $3 - 22 + 37 = 18 \neq 4$: son résultat est faux.

Ex. 45 ★★☆ **Carrés et cadre photo**

(a) Aire restante $= (x+4)^2 - 4^2 = x^2 + 8x + 16 - 16 = x^2 + 8x$. L'aire restante est $x^2 + 8x$ cm².

(b) Le grand carré a pour côté $x + 2 \times 1{,}5 = x + 3$. Aire du cadre $= (x+3)^2 - x^2 = x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$.
L'aire du cadre est $6x + 9$ cm².

(c) $6 \times 10 + 9 = 69$. L'aire du cadre est 69 cm² (vérification : $13^2 - 10^2 = 169 - 100 = 69$).

Ex. 46 ★★★ **Le vrai ou faux d'Élise**

(a) Faux. Contre-exemple $x = 0$: $5(0+1)^2 = 5 \times 1 = 5$, mais $(5 \times 0 + 5)^2 = 5^2 = 25$. Le nombre 5 n'entre pas dans le carré : $5(x+1)^2 = 5(x^2 + 2x + 1) = 5x^2 + 10x + 5$.

(b) Vrai. $a = x, b = 6$: $(x-6)^2 = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$, donc $-(x-6)^2 = -(x^2 - 12x + 36) = -x^2 + 12x - 36$. L'égalité est vraie pour tout x.

(c) Faux. Contre-exemple $x = 1$: $(-6+1)^2 = (-5)^2 = 25$, mais $36 + 12 + 1 = 49$. En fait, $a = -6x, b = 1$: $(-6x+1)^2 = (-6x)^2 + 2 \times (-6x) \times 1 + 1^2 = 36x^2 - 12x + 1$. Le double produit est négatif.

(d) Vrai. $a = x^2, b = 8$: $(x^2+8)(x^2-8) = (x^2)^2 - 8^2 = x^4 - 64$. L'égalité est vraie pour tout x.

Ex. 46 **(suite)**

(e) Vrai. $a = 3x$, $b = 1$: $(3x-1)(3x+1) = (3x)^2 - 1^2 = 9x^2 - 1$, donc $(3x)^2 - (9x^2 - 1) = 9x^2 - 9x^2 + 1 = 1$. L'égalité est vraie pour tout x.

Ex. 47 ★★★ **La conjecture de Lina**

(a) $x = 0$: $E = 6^2 - 6 \times (-6) = 36 + 36 = 72$; $x = 1$: $E = 7^2 - 7 \times (-5) = 49 + 35 = 84$; $x = -2$: $E = 4^2 - 4 \times (-8) = 16 + 32 = 48$.

x	0	1	-2
E	72	84	48
$12x + 72$	72	84	48

Les deux lignes sont identiques : Lina conjecture que $E = 12x + 72$ pour tout x.

(b) Première erreur : $(x+6)^2 \neq x^2 + 36$, il oublie le double produit : $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$. Deuxième erreur : $(x+6)(x-6) = x^2 - 36$, et le signe $-$ change tous les signes : $-(x^2 - 36) = -x^2 + 36$, pas $-x^2 - 36$.

(c) $a = x$, $b = 6$: $(x+6)^2 = x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$ et $(x+6)(x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$. Donc $E = x^2 + 12x + 36 - (x^2 - 36) = x^2 + 12x + 36 - x^2 + 36 = 12x + 72$. L'égalité est prouvée pour tout x.

(d) Je prends $x = 100$: $106 = 100 + 6$ et $94 = 100 - 6$. Donc $106^2 - 106 \times 94 = 12 \times 100 + 72 = 1\,272$.

Ex. 48 ★★★ **Le cadre de Soline**

(a) $a = 2x$, $b = 3$: $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$. L'aire du grand carré est $4x^2 + 12x + 9$ dm².

(b) $a = 2x$, $b = 3$: $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$. Aire du cadre : $(4x^2 + 12x + 9) - (4x^2 - 12x + 9) = 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 + 12x - 9 = 24x$. L'aire du cadre est bien $24x$ dm².

(c) La largeur du cadre est $[(2x+3) - (2x-3)] \div 2 = 6 \div 2 = 3$. Le cadre se découpe en deux bandes de 3 sur $2x + 3$ et deux bandes de 3 sur $2x - 3$. Et $6(2x+3) + 6(2x-3) = 12x + 18 + 12x - 18 = 24x$. Ethan a raison.

(d) Vrai. Si on remplace x par $2x$, l'aire devient $24 \times 2x = 48x = 2 \times 24x$: l'aire du cadre double.

(e) $24x = 120$, donc $x = 120 \div 24 = 5$. Le côté du tableau est $2 \times 5 - 3 = 7$ dm. Vérification : $13^2 - 7^2 = 169 - 49 = 120$.