49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

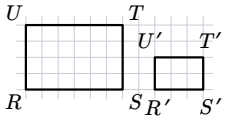
1. *Rappels de 4e : agrandissement et réduction*

À retenir : k = longueur obtenue ÷ longueur de départ (même unité) : $k > 1$ agrandit, $k < 1$ réduit. Longueurs et périmètre $\times k$ (on n'ajoute pas), angles inchangés, retour $\times \frac{1}{k}$. Échelle $\frac{1}{n}$: réel = plan $\times n$. Ex. : 5 cm → 7 cm, $k = 1{,}4$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : trouver le rapport** — Pour chaque situation, calcule le rapport k, puis dis si c'est un agrandissement ou une réduction.

(a) Un segment de 4 cm devient un segment de 10 cm.

(b) Le rectangle R′S′T′U′ est obtenu en agrandissant ou en réduisant le rectangle RSTU. Lis les longueurs sur le quadrillage.

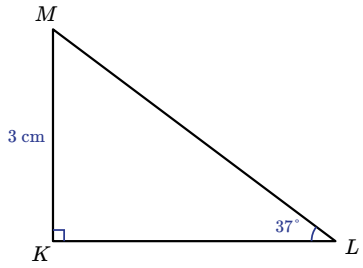


(c) Sur une affiche, une tour de 45 m de haut mesure 15 cm.

(d) Un logo triangulaire de périmètre 12 cm est réimprimé : son périmètre devient 9 cm.

(e) Léa affirme : « Une longueur de 6 cm devient 4 cm, donc $k = \frac{6}{4} = 1{,}5$: c'est un agrandissement. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : calculer sur un agrandissement** — Le triangle KLM est rectangle en K, avec KL = 4 cm, KM = 3 cm, LM = 5 cm et $\widehat{KLM} \approx 37°$. On l'agrandit avec le rapport $k = 1{,}8$ et on obtient le triangle K′L′M′.



(a) Calcule K′L′, K′M′ et L′M′.

(b) Donne la mesure de l'angle $\widehat{K'L'M'}$ et la nature du triangle K′L′M′.

(c) Calcule le périmètre de KLM, puis déduis-en celui de K′L′M′ à l'aide de k.

Ex. 2 (suite)

(d) Par quel nombre faut-il multiplier les longueurs de K′L′M′ pour revenir au triangle KLM ? Donne-le sous forme de fraction.

Ex. 3 ★★☆ **Le plan d'un studio** — Sur le plan d'un studio à l'échelle $\frac{1}{150}$, la pièce principale est le rectangle EFGH de 5 cm sur 3 cm. Arrondis au centième si besoin.



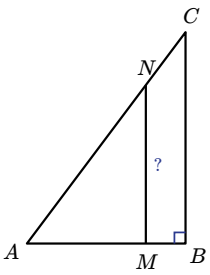
(a) Calcule les dimensions réelles de la pièce, en mètres.

(b) Une armoire mesure 2,1 m de long. Quelle longueur doit-elle avoir sur le plan ?

(c) Pour avoir un plan plus grand, Malo ajoute 1 cm à chaque côté et trace un rectangle de 6 cm sur 4 cm. Est-ce un agrandissement de EFGH ? Justifie avec le quotient longueur ÷ largeur.

(d) Quelle largeur Malo aurait-il dû tracer pour obtenir un vrai agrandissement de 6 cm de long ?

Ex. 4 ★★☆ **Réduction et théorème de Thalès** — Le triangle ABC est rectangle en B, avec AB = 6 cm et BC = 8 cm. M est sur [AB] avec AM = 45 mm, N est sur [AC] et $(MN) \parallel (BC)$.



(a) Explique pourquoi le triangle AMN est une réduction du triangle ABC, puis calcule son rapport k.

(b) Calcule MN.

(c) Calcule AC, puis le périmètre du triangle AMN à l'aide de k.

Ex. 5 ★★★ **La photocopieuse de Lina** — Lina photocopie le rectangle RSTU, avec RS = 8 cm et ST = 5 cm. Elle veut un agrandissement R′S′T′U′ avec R′S′ = 10 cm. Son ami Hugo l'aide. Arrondis au centième si besoin.



(a) Hugo calcule $k = \frac{8}{10} = 0{,}8$ et dit que c'est une réduction. Explique son erreur, puis donne le bon rapport k.

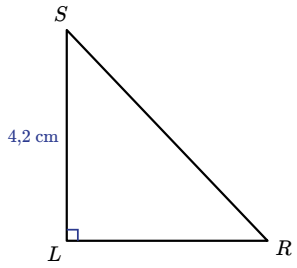
(b) Pour S′T′, Hugo ajoute 2 cm à ST, comme pour RS. Calcule le quotient longueur ÷ largeur de RSTU et celui du rectangle de Hugo. Conclus.

(c) Calcule la bonne longueur S′T′, puis vérifie que les proportions de RSTU sont conservées.

(d) Calcule le périmètre de RSTU, puis celui de R′S′T′U′ de deux façons différentes.

(e) Lina veut retrouver RSTU à partir de R′S′T′U′. Par quel nombre doit-elle multiplier les longueurs ? Vérifie avec R′S′.

Ex. 6 ★★★ **La randonnée de Mia** — Mia prépare une randonnée près d'Annecy. Sur sa carte, une route droite de 1,2 km est représentée par un segment de 3 cm. Sur la carte, le refuge R, le lac L et le sommet S forment le triangle RLS rectangle en L.



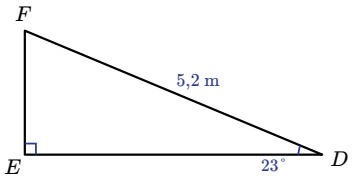
(a) Tom écrit : « $k = 3 \div 1{,}2 = 2{,}5$, donc la carte est un agrandissement. » Explique ses deux erreurs, puis donne l'échelle de la carte.

(b) Calcule les distances réelles RL et LS, en km.

(c) Calcule RS sur la carte, puis la longueur réelle de la boucle R → L → S → R, en km.

(d) Le lendemain, Mia veut faire une balade de 3,4 km en ligne droite. Quelle longueur doit mesurer son tracé sur la carte ?

Ex. 7 ★★★ **La maquette du voilier** — Le club de voile de Brest construit la maquette d'un voilier. La vraie voile est le triangle DEF rectangle en E, avec DE = 4,8 m, EF = 2 m et DF = 5,2 m. Sur la maquette, la voile D′E′F′ est une réduction de DEF, avec D′E′ = 12 cm.



(a) Calcule le rapport k de cette réduction, sous la forme d'une fraction.

(b) Calcule E′F′ et D′F′, puis le périmètre de la voile de la maquette.

(c) Nour affirme : « $\widehat{EDF} \approx 23°$, donc sur la maquette $\widehat{E'D'F'} \approx 23 \div 40$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Sur la maquette, le mât mesure 18 cm. Calcule la hauteur du vrai mât, en mètres.

(e) Une voile de rechange pour la maquette a pour côtés 6 cm, 2,5 cm et 7 cm. Est-ce une réduction de DEF ? Justifie.

2. *Centre, rapport et image d'un point : rapport positif*

À retenir : Homothétie de centre O et de rapport $k > 0$: M' est sur $[OM)$ et $OM' = k \times OM$. Le centre O est sa propre image ; si $k = 1$, $M' = M$. k multiplie OM, pas MM′ : $k = 3$ et $OM = 2$ cm donnent $OM' = 6$ cm et $MM' = 4$ cm. On retrouve $k = OM' \div OM$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : distances au centre** — Dans chaque question, A', B', C'… sont les images de A, B, C… par l'homothétie de centre O et de rapport k positif.

(a) A' est sur $[OA)$, $OA = 4{,}5$ cm et $OA' = 18$ cm. Calcule le rapport k.

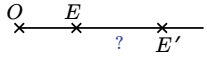
(b) $k = 0{,}5$ et $OB = 7$ cm. Où se trouve B' par rapport à O et B ? Calcule BB'.

(c) $k = \frac{3}{5}$ et $OC' = 4{,}2$ cm. Calcule la distance OC de l'antécédent C au centre.

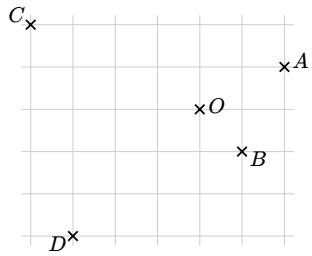
(d) $k = 1$ et $OD = 5{,}8$ cm. Où se trouve D' ? Calcule DD'.

(e) $k = 7$. Quelle est l'image du centre O ? Justifie.

(f) $k = 2{,}5$ et $OE = 2$ cm. Hugo écrit : « $EE' = 2{,}5 \times 2 = 5$ cm ». A-t-il raison ? Justifie.



Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : construire sur quadrillage** — Le quadrillage a des carreaux de 1 cm. Toutes les homothéties ont pour centre O.



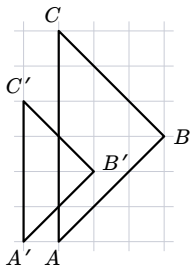
(a) Construis A', image de A par l'homothétie de rapport 2, en comptant les carreaux de O à A dans les deux directions.

(b) Construis B', image de B par l'homothétie de rapport 3, au compas : reporte la longueur OB sur la demi-droite $[OB)$.

(c) Construis C', image de C par l'homothétie de rapport 0,5.

(d) Le point D est l'image d'un point P par l'homothétie de rapport 1,5. Place le point P.

Ex. 10 ★★☆ **Retrouver le centre et le rapport** — Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par une homothétie de rapport positif. Le quadrillage a des carreaux de 1 cm.



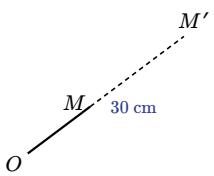
(a) Trace les droites (AA') et (BB'), puis place le centre O de l'homothétie. Contrôle avec (CC').

(b) Lis OA et OA' sur le quadrillage, puis calcule le rapport k de l'homothétie.

(c) Est-ce un agrandissement ou une réduction ? Calcule $A'C'$ à partir de $AC = 6$ cm, puis vérifie en comptant les carreaux.

Ex. 11 ★★☆ **Le pantographe de Ben** — Ben recopie un dessin avec un pantographe. La pointe fixe O, la pointe sèche M et le crayon M' restent alignés : M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $k > 0$.

(a) Sur la figure, $OM = 12$ cm et $OM' = 30$ cm. Calcule le rapport k.

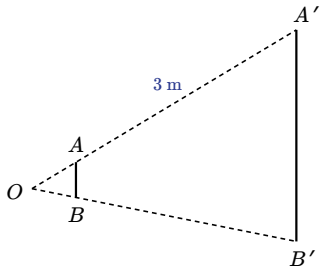


Ex. 11 (suite)

(b) Avec ce même réglage, la pointe sèche est à 16 cm de O. À quelle distance de la pointe sèche se trouve le crayon ?

(c) Ben règle le pantographe sur $k = 0{,}4$. La pointe sèche N est à 15 cm de O. Calcule ON', puis la distance NN' entre la pointe et le crayon.

Ex. 12 ★★★ **L'ombre de la marionnette** — Une lampe O éclaire une marionnette en carton posée devant un mur. Le point A' de l'ombre est l'image du point A de la marionnette par une homothétie de centre O et de rapport k positif. Les points O, A et A' sont alignés, $OA = 15$ cm et $AA' = 3$ m.



La figure n'est pas à l'échelle.

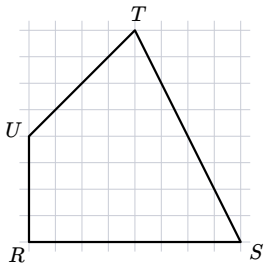
(a) Noé affirme : « $k = 300 \div 15 = 20$ ». Explique son erreur, puis calcule OA' et le vrai rapport k.

(b) La marionnette mesure $AB = 12$ cm et son ombre est $A'B'$. Calcule $A'B'$.

(c) Ben veut une ombre de rapport 25 sans bouger la lampe ni la marionnette. Calcule la nouvelle distance AA' entre la marionnette et le mur, puis dis de combien il doit reculer le mur.

(d) L'ombre est-elle à l'envers de la marionnette ? Justifie avec le signe du rapport.

Ex. 13 ★★★ **Réduire un logo à partir d'un sommet** — Le quadrillage a des carreaux de 1 cm. Un logo a la forme du quadrilatère RSTU. On le réduit avec l'homothétie de centre R et de rapport $\frac{3}{4}$. Arrondis au dixième.



(a) Quelle est l'image du point R par cette homothétie ? Justifie.

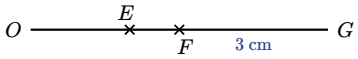
(b) Construis S', T' et U', les images de S, T et U, en comptant les carreaux depuis R dans les deux directions.

(c) Calcule RT avec le théorème de Pythagore, puis RT' et TT'.

Ex. 13 **(suite)**

(d) Quel rapport positif doit avoir l'homothétie de centre R qui transforme T' en T ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Quatre points alignés** — Les points O, E, F et G sont alignés dans cet ordre, avec $OE = 2$ cm, $EF = 1$ cm et $FG = 3$ cm.



(a) Montre que F est l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport 1,5.

(b) Calcule le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme G en E.

(c) H est l'image de G par l'homothétie de centre O et de rapport 0,5. Calcule OH. Quel point de la figure est H ?

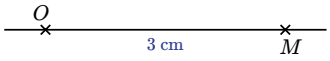
(d) Max affirme : « G est l'image de F par l'homothétie de centre E et de rapport 3, car $FG = 3 \times EF$. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) G est l'image d'un point P par l'homothétie de centre O et de rapport 4. Calcule OP, puis la distance PE.

3. *Image d'un point : rapport négatif*

À retenir : Si $k < 0$: M' est sur (OM), de l'autre côté de O, et $OM' = |k| \times OM$ (une longueur est positive). $|k| > 1$ agrandit, même $k = -2$. $k = -1$: symétrie centrale. Ex. : $k = -3$ et $OM = 2$ cm donnent $OM' = 6$ cm et $MM' = 2 + 6 = 8$ cm.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : distances avec un rapport négatif** — Sur la droite ci-dessous, $OM = 3$ cm. On considère l'homothétie de centre O et de rapport k. L'image M' de M change avec k.



(a) Pour $k = -2$, calcule OM', puis indique de quel côté de O se trouve M'.

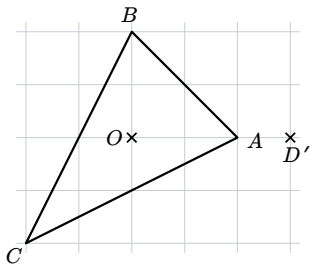
(b) Pour $k = -2$, calcule la distance MM'.

(c) Pour $k = -\frac{1}{3}$, calcule OM'. Cette homothétie est-elle un agrandissement ou une réduction ? Justifie.

(d) Pour $k = -1$, calcule OM'. Quelle transformation déjà connue retrouves-tu ?

(e) Pour $k = -1{,}5$, Tom écrit : « $OM' = -1{,}5 \times 3 = -4{,}5$ cm ». Corrige son erreur.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : construire sur quadrillage avec k = −1,5** — Sur le quadrillage, on considère l'homothétie de centre O et de rapport $k = -1{,}5$.



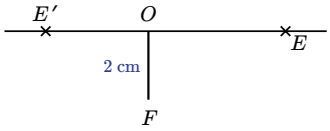
(a) Pour aller de O à A, on fait 2 carreaux vers la droite. Décris le trajet de O à A', puis place A'.

(b) Place les points B' et C', images de B et C.

(c) Trace le triangle $A'B'C'$. Est-il « à l'endroit » ou « retourné » par rapport à ABC ? Justifie.

(d) Le point D' est l'image d'un point D par cette homothétie. Place le point D.

Ex. 17 ★★☆ **Retrouver le rapport, puis s'en servir** — Une homothétie de centre O transforme E en E'. Les points E, O et E' sont alignés, et O est entre E et E'. On a $OE = 4$ cm, $OE' = 3$ cm et $OF = 2$ cm.

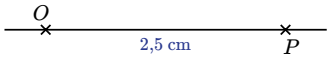


(a) Retrouve le rapport k de cette homothétie : donne son signe et sa valeur.

(b) Calcule OF', où F' est l'image de F, et précise où placer F'.

(c) Calcule la distance FF'.

Ex. 18 ★★☆ **Les erreurs de Jade** — On considère l'homothétie de centre O et de rapport $k = -2$, avec $OP = 2{,}5$ cm. Jade a fait l'exercice, mais sa copie contient des erreurs.

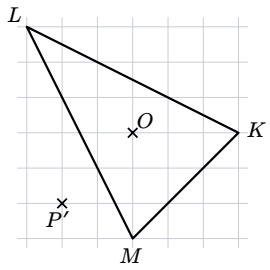


(a) Jade écrit : « $k = -2$ est négatif, donc cette homothétie est une réduction. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Jade écrit : « $PP' = 2 \times OP = 5$ cm. » Explique son erreur, puis calcule correctement OP' et PP'.

(c) Place P' sur la figure en vraie grandeur, puis vérifie ta valeur de PP' à la règle.

Ex. 19 ★★★ **Un centre à l'intérieur du triangle** — Sur le quadrillage (1 carreau = 1 cm), on considère l'homothétie de centre O et de rapport $k = -\frac{2}{3}$. Le point O est à l'intérieur du triangle KLM. Le point P' est l'image d'un point P par cette homothétie.



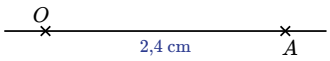
(a) Pour aller de O à K, on fait 3 carreaux vers la droite. Décris le trajet de O à K', puis construis l'image $K'L'M'$ du triangle KLM.

(b) Calcule la distance KK'. Justifie à l'aide de la position du point O.

(c) Noé affirme : « $K'L'M'$, c'est le triangle KLM réduit et simplement glissé sur le quadrillage. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Place le point P sur le quadrillage. Explique tes calculs.

Ex. 20 ★★★ **Même distance, rapports différents** — Sur la droite ci-dessous, $OA = 2{,}4$ cm. Toutes les homothéties ont pour centre O, et tous les points construits sont sur la droite (OA).



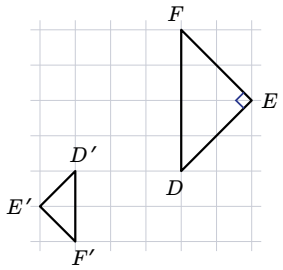
(a) Construis l'image A_1 de A par l'homothétie de rapport -1. Quelle transformation vue en 5e reconnais-tu ? Calcule AA_1.

(b) Léo cherche l'image B de A par l'homothétie de rapport $-2{,}5$. Il écrit : « $OB = -2{,}5 \times 2{,}4 = -6$ cm, donc $AB = 6 - 2{,}4 = 3{,}6$ cm. » Corrige ses deux erreurs.

(c) Le point C est de l'autre côté de O par rapport à A, avec $AC = 3$ cm. C est l'image de A par une homothétie. Retrouve le rapport de cette homothétie.

(d) Inès place D sur le segment $[OA]$, à la même distance de O que C. Elle dit : « D est l'image de A par la même homothétie que C. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Retrouver le centre caché** — Sur le quadrillage (1 carreau = 1 cm), le triangle DEF est rectangle isocèle en E. Le triangle $D'E'F'$ est son image par une homothétie de centre O. Le point O n'est pas dessiné.



(a) Trace les droites (DD') et (EE'), puis place le centre O. Décris sa position par rapport à D et à D'.

(b) Retrouve le signe et la valeur du rapport k de cette homothétie. Justifie.

(c) Sami écrit : « Pour trouver $|k|$, je divise DD' par OD. » Explique pourquoi sa méthode est fausse, en montrant ce qu'elle donnerait ici.

(d) On note G le milieu de $[DF]$. Sans calcul, où se trouve son image G' ? Place G', puis vérifie sa position à partir de O.

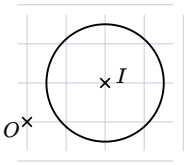
4. *Image d'une figure, retrouver le centre ou le rapport*

À retenir : J'image chaque sommet puis je relie dans le même ordre. Longueurs × $|k|$; angles et parallélisme conservés. Centre : point commun à (AA') et (BB'). $|k| = \frac{A'B'}{AB}$, et $k < 0$ si l'image est de l'autre côté du centre.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : longueurs, angles et cercle image** — Dans chaque question, on utilise une homothétie de centre O. Son rapport k est donné, sauf dans la dernière question, où tu le cherches.

(a) Avec $k = -3$ et $AB = 2{,}4$ cm, calcule la longueur $A'B'$.

(b) Avec $k = 2$, construis l'image du cercle de centre I et de rayon 1,5 cm.

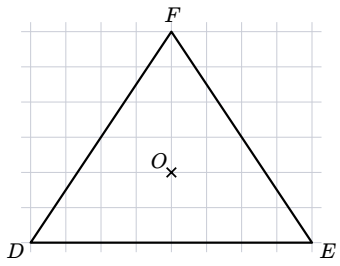


(c) Avec $k = -1{,}25$, l'image du segment [AB] mesure $A'B' = 10$ cm. Calcule AB.

(d) Avec $k = 0{,}4$, le triangle XYZ a un angle $\widehat{XYZ} = 48°$ et un côté $YZ = 5{,}5$ cm. Donne $\widehat{X'Y'Z'}$ et calcule $Y'Z'$.

(e) On a $AB = 6$ cm et $A'B' = 2$ cm, avec A′ sur [OA] et B′ sur [OB]. Donne le rapport k.

Ex. 23 ★☆☆ **Construire l'image d'un triangle, centre à l'intérieur** — Sur le quadrillage, le centre O est à l'intérieur du triangle DEF. On utilise l'homothétie de centre O et de rapport $k = -\frac{1}{2}$.



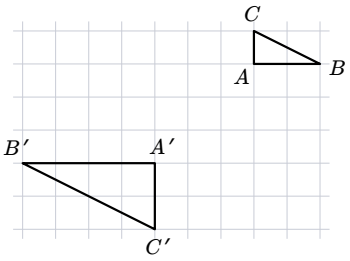
a) Construis les points D′, E′ et F′, puis le triangle D′E′F′.

b) Compte DE et D′E′ en carreaux. Vérifie que $D'E' = |k| \times DE$.

c) Quel côté de D′E′F′ doit être parallèle à [DF] ? Vérifie-le sur ta figure.

d) Le triangle DEF est isocèle en F. Quelle est la nature du triangle D′E′F′ ? Justifie.

Ex. 24 ★★☆ **Pantographe : retrouver le centre et le rapport** — Avec un pantographe, Maëlle a tracé le triangle A′B′C′, image du triangle ABC par une homothétie. Le centre O n'est pas dessiné.

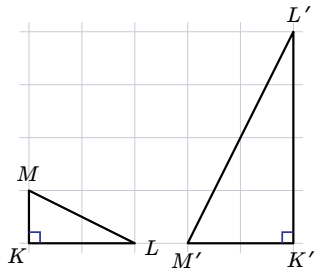


a) Trace la droite (AA′). Explique pourquoi elle ne suffit pas pour placer O, puis place O à l'aide de (BB′).

b) Vérifie que (CC′) passe aussi par O et que $(A'C') \parallel (AC)$.

c) Retrouve le rapport k de l'homothétie (sa valeur et son signe). Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **Logo agrandi : homothétie ou pas ?** — Pour son logo, Samir a dessiné le triangle KLM rectangle en K. Il l'a ensuite agrandi et a obtenu le triangle K′L′M′.

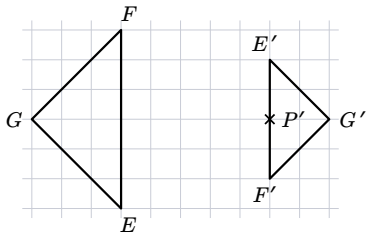


a) Compte les longueurs en carreaux, puis calcule $\frac{K'L'}{KL}$ et $\frac{K'M'}{KM}$.

b) Samir dit : « Les longueurs sont multipliées par 2, donc K′L′M′ est l'image de KLM par une homothétie de rapport 2. » A-t-il raison ? Justifie.

c) Construis les images L1 et M1 de L et de M par l'homothétie de centre K et de rapport 2. Vérifie que $(L_1M_1) \parallel (LM)$.

Ex. 26 ★★★ **Figure retournée : centre, rapport et antécédent** — Sur le quadrillage (1 carreau = 1 cm), le triangle E′F′G′ est l'image du triangle EFG par une homothétie. Son centre O n'est pas dessiné. Le point P′ est le milieu de [E′F′].



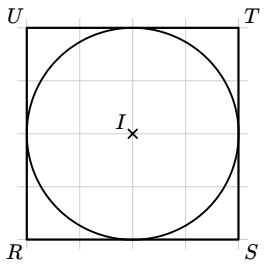
a) Inès trace les droites (EF′) et (FE′) pour trouver le centre. Explique son erreur, puis place le centre O à l'aide de deux droites bien choisies.

b) Compte EF et E′F′ en carreaux, puis donne le rapport k de l'homothétie (valeur et signe). Justifie le signe.

c) On a OP′ = 2 cm. Place le point P dont l'image est P′, calcule OP, puis dis ce que représente P pour le segment [EF].

d) L'angle $\widehat{EFG}$ mesure 45°. Donne la mesure de $\widehat{E'F'G'}$ et la position de la droite (E′G′) par rapport à (EG). Justifie.

Ex. 27 ★★★ **Pochoir d'affiche : carré, cercle et centre sur un sommet** — Pour une affiche, Mathis agrandit un motif : un carré RSTU de côté 4 cm et le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 cm. Il utilise l'homothétie de centre R et de rapport $k = -\frac{3}{2}$. Reproduis la figure sur ton cahier (1 carreau = 1 cm) en laissant de la place en bas à gauche.



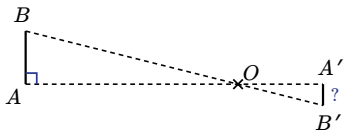
(a) Construis l'image R′S′T′U′ du carré : place l'image de chaque sommet, puis relie ces images dans le même ordre.

(b) Lou a obtenu un carré de 6 cm de côté, mais son côté [S′T′] est penché. Son carré peut-il être l'image de RSTU par cette homothétie ? Justifie.

(c) Mathis écrit : « Le cercle image a pour rayon 2 + 1,5 = 3,5 cm. » Corrige son erreur, puis construis l'image du cercle $\mathcal{C}$.

(d) Mathis affirme : « Comme k est négatif, le motif rétrécit. » Calcule le périmètre des deux carrés, puis réponds-lui.

Ex. 28 ★★★ **Chambre noire : papillon et distances** — Hugo fabrique une chambre noire : la lumière de la bougie [AB] passe par le trou O et forme une image [A′B′] au fond de la boîte. Les points A, O et A′ sont alignés, de même que B, O et B′. On a $(A'B') \parallel (AB)$, (AB) ⊥ (AA′), OA = 60 cm, OA′ = 24 cm et AB = 15 cm. Arrondis au dixième.



(a) Justifie que [A′B′] est l'image de [AB] par une homothétie de centre O, puis donne son rapport k sous forme de fraction irréductible.

(b) Hugo calcule A′B′ = k × AB et trouve une longueur négative. Explique son erreur, puis calcule A′B′.

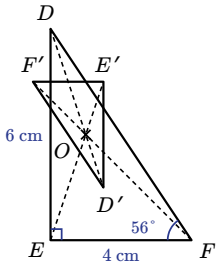
(c) Calcule OB, puis la distance BB′ entre le haut de la bougie et son image.

(d) Hugo garde la même boîte (OA′ = 24 cm) et veut une image de 9 cm pour cette bougie. À quelle distance du trou doit-il placer la bougie ?

5. *Propriétés conservées et lien avec Thalès*

À retenir : Une homothétie conserve les angles, l'alignement, le parallélisme, les milieux et la nature des figures. Elle multiplie les longueurs par $|k|$: avec $k = -2$, $A'B' = 2 \times AB$. Si AMN est l'image de ABC (Thalès) : $k = \frac{AM}{AB}$ emboîtés, $-\frac{AM}{AB}$ papillon.

Ex. 29 ★★★ **Automatismes : lire ce qui est conservé** — Le triangle $D'E'F'$ est l'image du triangle DEF, rectangle en E, par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -0{,}5$. On a $DE = 6$ cm et $EF = 4$ cm, et l'angle $\widehat{EFD}$ mesure 56°.



(a) Donne la mesure de l'angle $\widehat{E'F'D'}$.

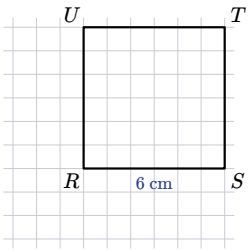
(b) Justifie que le triangle $D'E'F'$ est rectangle et précise en quel sommet.

(c) Calcule la longueur $E'F'$.

(d) Léo écrit : « $D'E' = -0{,}5 \times 6 = -3$ cm ». Corrige son erreur.

(e) Que peux-tu dire des droites $(D'F')$ et (DF) ? Justifie.

Ex. 30 ★★★ **Automatismes : l'image d'un carré** — $RSTU$ est un carré de côté 6 cm. On utilise l'homothétie de centre R et de rapport $k = -\frac{1}{3}$. Le quadrillage a des carreaux de 1 cm.



(a) Construis l'image $R'S'T'U'$ du carré $RSTU$ sur le quadrillage.

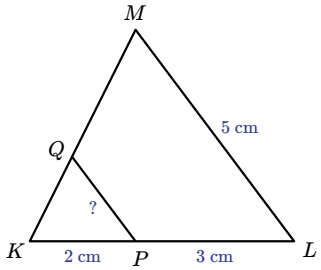
(b) Quelle est la nature du quadrilatère $R'S'T'U'$? Justifie sans mesurer.

(c) Calcule le périmètre de $R'S'T'U'$.

(d) Nina affirme : « Comme une symétrie, cette homothétie conserve les longueurs. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) I est le milieu de $[ST]$. Que représente son image I' pour le segment $[S'T']$? Justifie.

Ex. 31 ★★☆ **Triangles emboîtés et homothétie** — Sur la figure, $P \in [KL]$, $Q \in [KM]$ et $(PQ) \parallel (LM)$. On a $KP = 2$ cm, $PL = 3$ cm et $LM = 5$ cm.



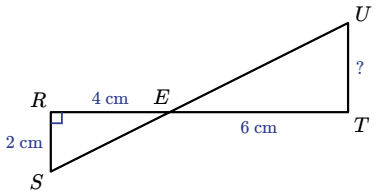
(a) Calcule la longueur KL.

(b) Écris l'égalité des trois quotients du théorème de Thalès, avec les longueurs du petit triangle KPQ au numérateur.

(c) Déduis-en que le triangle KPQ est l'image du triangle KLM par une homothétie : donne son centre, l'image de L et le rapport.

(d) Calcule la longueur PQ.

Ex. 32 ★★☆ **Configuration papillon : attention au signe** — Les droites (RT) et (SU) se coupent en E, et $(RS) \parallel (TU)$. Le triangle ERS est rectangle en R, avec $ER = 4$ cm, $ET = 6$ cm et $RS = 2$ cm. Arrondis au dixième.

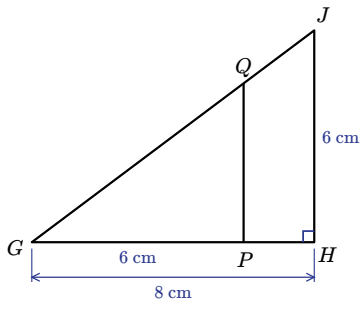


(a) Marius affirme : « ETU est l'image de ERS par l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{6}{4}$. » Corrige son erreur.

(b) Calcule la longueur TU.

(c) Calcule la longueur EU.

Ex. 33 ★★★ **Triangles emboîtés : du rapport à l'aire** — Sur la figure, le triangle GHJ est rectangle en H, $P \in [GH]$, $Q \in [GJ]$ et $(PQ) \parallel (HJ)$. On a $GH = 8$ cm, $HJ = 6$ cm et $GP = 6$ cm.



(a) Calcule la longueur GJ.

Ex. 33 (suite)

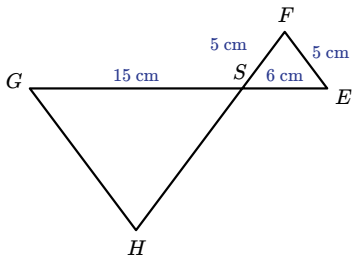
(b) Justifie que le triangle GPQ est l'image du triangle GHJ par une homothétie. Précise son centre et son rapport.

(c) Déduis-en les longueurs PQ et GQ.

(d) Léa affirme : « Le triangle GPQ n'est pas rectangle, car aucun angle droit n'est codé en P. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Calcule l'aire du triangle GHJ. Sami en déduit que l'aire de GPQ vaut $0{,}75 \times 24 = 18$ cm². Corrige son erreur.

Ex. 34 ★★★ **Configuration papillon : signe, agrandissement et milieu** — Les droites (EG) et (FH) se coupent en S, et $(EF) \parallel (GH)$. On a $SE = 6$ cm, $SF = 5$ cm, $EF = 5$ cm et $SG = 15$ cm.



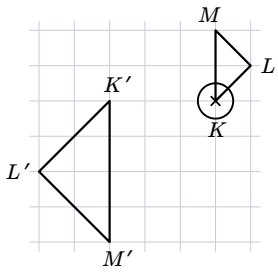
(a) Nour écrit : « SGH est l'image de SEF par l'homothétie de centre S et de rapport $-\frac{6}{15} = -0{,}4$. » Explique son erreur et donne le bon rapport.

(b) Ilyès affirme : « Le rapport est négatif, donc SGH est une réduction de SEF. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Calcule GH et SH, puis le périmètre du triangle SGH.

(d) I est le milieu de $[EF]$ et J celui de $[GH]$. Justifie que J est l'image de I, puis que S, I et J sont alignés.

Ex. 35 ★★★ **Retrouver le centre et le rapport, puis prolonger** — Pour un logo, Kenza a tracé sur un quadrillage (carreaux de 1 cm) le triangle KLM et son image $K'L'M'$ par une homothétie, dont le centre O et le rapport k sont inconnus. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre K et de rayon 0,5 cm.



(a) Trace les droites (KK') et (LL'), puis place le centre O. Vérifie avec la droite (MM').

(b) Détermine le rapport k de cette homothétie (signe et valeur).

Ex. 35 **(suite)**

(c) Inès affirme : « Une homothétie multiplie les longueurs par $|k|$, donc les angles aussi. » A-t-elle raison ? Donne la nature de $K'L'M'$ en justifiant.

(d) Construis l'image $\mathcal{C}'$ du cercle $\mathcal{C}$ et donne son rayon.

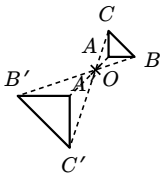
(e) P est le milieu de $[KM]$. Place son image P' et justifie que $(L'P') \parallel (LP)$.

6. *Effet sur les aires et les volumes*

À retenir : Longueurs et périmètres $\times\ |k|$; aires $\times\ k^2$; volumes, contenances, masses $\times\ |k|^3$. Ex. : $k = 3 \to$ aire $\times\ 9$ (pas $\times\ 3$). $k^2 > 0$ même si $k < 0$. Retrouver k : racine carrée du quotient des aires, ou nombre dont le cube vaut celui des volumes.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes · Le bon coefficient** — Avant chaque calcul, demande-toi si tu cherches une longueur, une aire ou un volume.

(a) Sur la figure, A′B′C′ est l'image de ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -2$. ABC a une aire de 2 cm². Calcule l'aire de A′B′C′.



(b) Un carré d'aire 5 cm² est agrandi avec le rapport $k = 4$. Quelle est l'aire du carré obtenu ?

(c) Un pentagone a un périmètre de 21 cm. Calcule le périmètre de son image par une homothétie de rapport $k = -\frac{2}{3}$.

(d) Une pyramide de volume 81 cm³ est réduite avec le rapport $k = \frac{1}{3}$. Quel est le volume de la pyramide réduite ?

(e) Une boîte de volume 125 cm³ est agrandie avec le rapport $k = 1{,}2$. Quel est le volume de la boîte agrandie ?

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes · Retrouver le rapport** — Dans chaque cas, la seconde figure ou le second solide est l'image du premier par un agrandissement ou une réduction. Retrouve le rapport k.

(a) Deux logos de même forme ont des aires de 4 cm² et 49 cm².

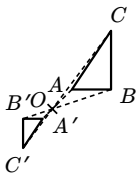
(b) Une affiche de 50 dm de périmètre est réduite par une photocopieuse en une affiche de 20 dm de périmètre.

(c) Deux flacons de même forme ont des contenances de 32 cL et 108 cL.

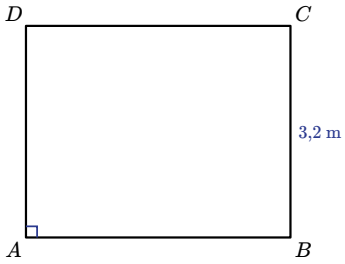
(d) Une sculpture de 375 dm³ est réduite en une maquette de 3 dm³.

Ex. 37 **(suite)**

(e) Sur la figure, A′B′C′ est l'image de ABC par une homothétie de centre O. ABC a une aire de 3 cm² et A′B′C′ une aire de 0,75 cm². Retrouve le rapport (signe et valeur).



Ex. 38 ★★☆ **La maquette de la citerne** — Inès construit une maquette au $\frac{1}{40}$ d'une citerne en forme de pavé de 4 m de long, 2,5 m de large et 3,2 m de haut. La figure montre la face avant de la vraie citerne.

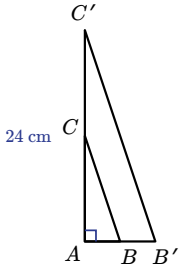


(a) Quelle est la hauteur de la maquette, en cm ?

(b) Calcule le volume de la vraie citerne, puis la contenance de la maquette en litres.

(c) Inès peint sa maquette : la surface peinte mesure 150 cm². Quelle surface faudrait-il peindre sur la vraie citerne, en m² ?

Ex. 39 ★★☆ **Les statuettes de Hugo** — Une statuette en bronze de 12 cm de haut pèse 0,9 kg. Hugo en commande une de même forme et du même bronze, deux fois plus haute (24 cm). Il affirme : « Elle pèsera 1,8 kg. »



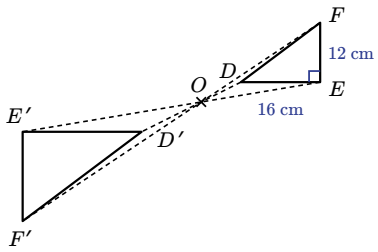
La figure n'est pas à l'échelle.

(a) Hugo a-t-il raison ? Justifie, puis calcule la masse de la grande statuette.

(b) Il faut 15 mL de peinture dorée pour la petite (la quantité est proportionnelle à l'aire). Hugo prévoit 30 mL pour la grande. Corrige-le.

(c) Une mini-statuette de même forme et du même bronze pèse 112,5 g. Quelle est sa hauteur ?

Ex. 40 ★★★ **Le triangle retourné** — Le triangle DEF est rectangle en E, avec DE = 16 cm et EF = 12 cm. Le triangle D′E′F′ est son image par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -1{,}5$.



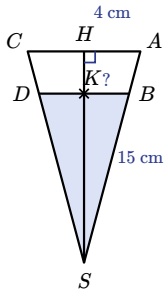
(a) Calcule DF, puis le périmètre et l'aire du triangle DEF.

(b) Calcule le périmètre du triangle D′E′F′.

(c) Malo écrit : « Comme $k = -1{,}5$, l'aire de D′E′F′ est égale à l'aire de DEF multipliée par $-1{,}5$. » Explique ses deux erreurs, puis calcule l'aire de D′E′F′.

(d) Une autre homothétie de centre O transforme DEF en un triangle D1E1F1 d'aire 24 cm², situé du même côté de O que DEF. Retrouve son rapport, puis calcule D1F1.

Ex. 41 ★★★ **Le verre à cocktail de Léon** — La partie conique d'un verre à cocktail a une profondeur SH = 15 cm, et son bord est un cercle de rayon HA = 4 cm. Pleine, elle contient environ 250 cm³. Léon verse du jus jusqu'à une hauteur SK = 12 cm : le cône de jus est une réduction du cône du verre. Arrondis au dixième.



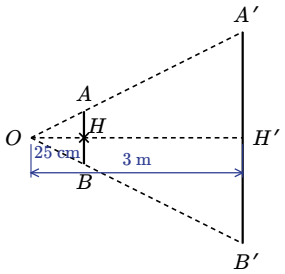
(a) Calcule le rapport de cette réduction, puis le rayon KB de la surface du jus.

(b) Calcule l'aire de la surface du jus, en cm².

(c) Léon affirme : « Le jus monte aux $\frac{12}{15}$ de la hauteur, donc il y a $\frac{12}{15}$ de 250 cm³. » A-t-il raison ? Donne le volume de jus en cm³, puis en cL.

(d) Pour un autre cocktail, il faut 54 cm³ de sirop au fond du verre vide. Jusqu'à quelle hauteur Léon doit-il le verser ?

Ex. 42 ★★★ **La fresque de Zoé** — Zoé projette sur un mur un dessin rectangulaire de 15 cm sur 10 cm, tracé sur un transparent. La lampe O est à OH = 25 cm du transparent et à OH′ = 3 m du mur, parallèle au transparent. La fresque est l'image du dessin par l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{\text{OH}'}{\text{OH}}$.



La figure n'est pas à l'échelle.

(a) Calcule le rapport k.

(b) Zoé borde la fresque d'un ruban. Quelle longueur de ruban lui faut-il, en m ?

(c) Calcule l'aire de la fresque, en m².

(d) Un pot de peinture couvre 1,5 m². Combien de pots Zoé doit-elle acheter ?

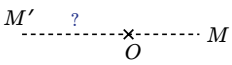
(e) Zoé recule le projecteur : les longueurs de la fresque sont multipliées par 2,5. Elle affirme : « Il me faudra 2,5 fois plus de peinture. » A-t-elle raison ? Combien de pots doit-elle acheter en tout ?

7. *Exercices type brevet*

À retenir : Longueurs × $|k|$ (jamais négatives), aires × k^2, volumes × $|k|^3$; angles et parallélisme conservés. Garde k en fraction : avec $k = -\frac{2}{3}$, une aire de 18 cm² devient $\frac{4}{9} \times 18 = 8$ cm².

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : distances, longueurs, aires et volumes** — Réponds à chaque question. Arrondis au dixième si besoin.

(a) Par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -1{,}5$, M′ est l'image de M, avec $OM = 4$ cm. Calcule OM′, puis MM′.



(b) Un cercle de rayon 1,6 cm a pour image, par une homothétie de rapport $k = -2{,}5$, un autre cercle. Calcule le rayon de ce cercle.

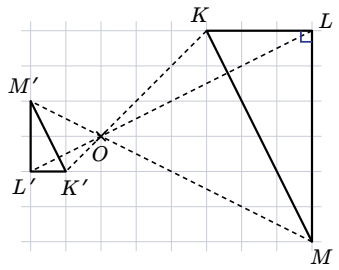
(c) Par une homothétie de rapport négatif, le segment [AB] de longueur 9 cm a pour image un segment [A′B′] de longueur 15 cm. Donne k sous forme de fraction.

(d) Un triangle d'aire 20 cm² a pour image, par une homothétie de rapport $k = \frac{4}{3}$, un autre triangle. Calcule l'aire de ce triangle.

Ex. 43 **(suite)**

(e) Un solide de volume 6 cm³ a pour image, par une homothétie de rapport -2, un autre solide. Léo dit que c'est une réduction. Calcule le volume de l'image, puis corrige Léo.

Ex. 44 ★☆☆ **Lire une figure et son image sur quadrillage** — Sur le quadrillage (1 carreau = 1 cm), le triangle K′L′M′ est l'image du triangle KLM rectangle en L par une homothétie de centre O.



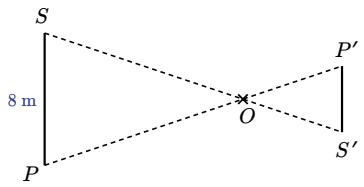
(a) Le rapport k de cette homothétie est-il positif ou négatif ? Justifie à l'aide des points O, K et K′.

(b) Compte les carreaux de KL et de K′L′, puis donne la valeur exacte de k sous forme de fraction.

(c) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{K'L'M'}$? Justifie avec une propriété de l'homothétie.

(d) Calcule l'aire du triangle KLM, puis déduis-en l'aire du triangle K′L′M′ en utilisant le rapport k.

Ex. 45 ★★☆ **La chambre noire d'Inès** — Inès fabrique une chambre noire : la lumière passe par un petit trou O et forme sur le fond de la boîte l'image renversée d'un arbre [PS] haut de 8 m. Le fond, parallèle à l'arbre, est à 15 cm du trou, et l'arbre est à 12 m du trou. L'image [P′S′] est l'image de [PS] par l'homothétie de centre O et de rapport k.



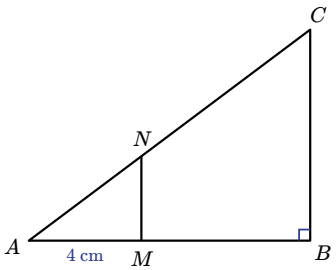
La figure n'est pas à l'échelle.

(a) Explique pourquoi le rapport k est négatif, puis calcule k sous forme de fraction (attention aux unités).

(b) Calcule la hauteur P′S′ de l'image de l'arbre sur le fond de la boîte.

(c) Inès vise maintenant un immeuble haut de 18 m, dont l'image mesure 12 cm sur le fond. À quelle distance du trou se trouve l'immeuble ?

Ex. 46 ★★☆ **Triangles emboîtés, Pythagore et aire** — Le triangle ABC est rectangle en B, avec $AB = 10$ cm et $BC = 7{,}5$ cm. Le point M est sur [AB] avec $AM = 4$ cm, le point N est sur [AC] et $(MN) \parallel (BC)$.

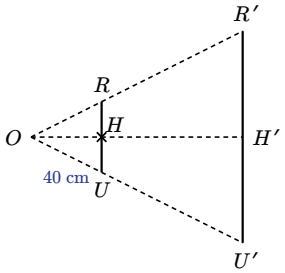


(a) Justifie que le triangle AMN est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre A, puis donne son rapport k sous forme de fraction.

(b) Calcule AC, puis déduis-en AN et MN.

(c) Calcule l'aire du triangle ABC, puis celle du triangle AMN à l'aide du rapport k.

Ex. 47 ★★★ **Le théâtre d'ombres de Lucie** — Lucie prépare un théâtre d'ombres. Une lampe ponctuelle O éclaire une plaque rectangulaire RSTU de 9 cm sur 6 cm, parallèle au mur. La plaque est à $OH = 40$ cm de la lampe et le mur à $OH' = 1{,}5$ m. On admet que l'ombre R′S′T′U′ est l'image de RSTU par l'homothétie de centre O qui transforme H en H′. Arrondis au dixième.



La figure n'est pas à l'échelle.

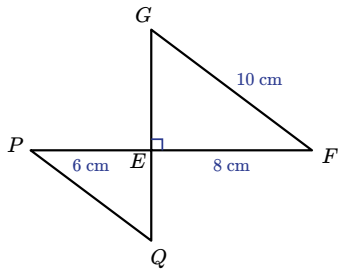
(a) Explique pourquoi le rapport k de cette homothétie est positif, puis calcule k sous forme de fraction irréductible.

(b) Quelle est la nature de l'ombre ? Justifie, puis calcule ses dimensions.

(c) Noah affirme : « L'aire de l'ombre vaut $3{,}75 \times 54 = 202{,}5$ cm². » A-t-il raison ? Justifie, puis calcule l'aire de l'ombre.

(d) Lucie veut une ombre de 45 cm de longueur, et le mur reste à 1,5 m de la lampe. À quelle distance de la lampe doit-elle placer la plaque ? Justifie.

Ex. 48 ★★★ **Configuration papillon et erreur de signe** — Les droites (FP) et (GQ) se coupent en E. P et F sont de part et d'autre de E, Q et G aussi, et $(PQ) \parallel (FG)$. Le triangle EFG est rectangle en E avec $EF = 8$ cm et $FG = 10$ cm, et $EP = 6$ cm.



a) Justifie que le triangle EPQ est l'image du triangle EFG par une homothétie de centre E, puis donne son rapport k sous forme de fraction irréductible (attention au signe).

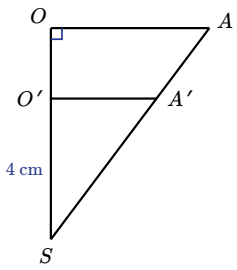
b) Calcule EG, puis EQ.

c) Yanis écrit : « $PQ = k \times FG = -\frac{3}{4} \times 10 = -7{,}5$ cm. » Explique son erreur, puis calcule PQ.

d) Quelle est la nature du triangle EPQ ? Justifie.

e) Calcule l'aire du triangle EFG, puis déduis-en celle du triangle EPQ à l'aide de k.

Ex. 49 ★★★ **Le verre conique d'Emma** — Un verre a la forme d'un cône de révolution de sommet S. Sur la coupe ci-dessous, O est le centre du bord du verre, le rayon mesure $OA = 4{,}5$ cm et $SA = 7{,}5$ cm. Emma verse du jus jusqu'à la hauteur $SO' = 4$ cm : la surface du jus est un disque de centre O′ et de rayon O′A′, avec A′ sur [SA] et $(O'A') \parallel (OA)$. Arrondis au dixième.



a) Calcule la hauteur SO du verre.

b) Justifie que le triangle SO′A′ est l'image du triangle SOA par une homothétie de centre S, donne son rapport k sous forme de fraction irréductible, puis calcule le rayon O′A′.

c) Calcule le volume du verre en valeur exacte, puis arrondi.

d) Emma affirme : « Le jus monte aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur, donc il occupe les $\frac{2}{3}$ du volume du verre. » Son affirmation est-elle juste ? Justifie, puis calcule le volume de jus.