1. Rappels de 4e : agrandissement et réduction

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : trouver le rapport**

(a) $k = \frac{10}{4} = 2{,}5$. Comme $2{,}5 > 1$, c'est un agrandissement.

(b) Sur le quadrillage, RS = 6 cm et R′S′ = 3 cm, donc $k = \frac{3}{6} = 0{,}5$. Vérification sur les largeurs : $\frac{2}{4} = 0{,}5$. Comme $0{,}5 < 1$, c'est une réduction.

(c) On convertit d'abord dans la même unité : 45 m = 4 500 cm. $k = \frac{15}{4\,500} = \frac{1}{300}$. Comme $\frac{1}{300} < 1$, c'est une réduction.

(d) Le périmètre est multiplié par le même rapport que les longueurs : $k = \frac{9}{12} = 0{,}75$. Comme $0{,}75 < 1$, c'est une réduction.

(e) Non. Le rapport, c'est la longueur obtenue divisée par la longueur de départ : $k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Comme $\frac{2}{3} < 1$, c'est une réduction
(la longueur diminue).

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : calculer sur un agrandissement**

(a) Un agrandissement de rapport 1,8 multiplie toutes les longueurs par 1,8 : K′L′ = $1{,}8 \times 4 = 7{,}2$ cm ; K′M′ = $1{,}8 \times 3 = 5{,}4$ cm ; L′M′ = $1{,}8 \times 5 = 9$ cm.

(b) Un agrandissement conserve les angles : $\widehat{K'L'M'} \approx 37°$ (on ne multiplie pas par 1,8). Il conserve aussi la nature de la figure : K′L′M′ est rectangle en K′.

(c) Périmètre de KLM : $4 + 3 + 5 = 12$ cm. Le périmètre est lui aussi multiplié par k : $1{,}8 \times 12 = 21{,}6$ cm. Vérification : $7{,}2 + 5{,}4 + 9 = 21{,}6$ cm.

(d) On multiplie par $\frac{1}{k} = \frac{1}{1{,}8} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$. Vérification : $\frac{5}{9} \times 9 = 5$ cm = LM.

Ex. 3 ★★☆ **Le plan d'un studio**

(a) Échelle $\frac{1}{150}$: 1 cm sur le plan représente 150 cm en réalité. Longueur : $5 \times 150 = 750$ cm = 7,5 m. Largeur : $3 \times 150 = 450$ cm = 4,5 m.

(b) On convertit : 2,1 m = 210 cm. Sur le plan : $210 \div 150 = 1{,}4$ cm.

(c) Non. Pour EFGH : $\frac{5}{3} \approx 1{,}67$; pour le dessin de Malo : $\frac{6}{4} = 1{,}5$. Les quotients sont différents, donc la forme a changé : Malo a ajouté la même longueur au lieu de multiplier.

Ex. 3 (suite)

(d) Le rapport est $k = \frac{6}{5} = 1{,}2$. On multiplie la largeur par k : $3 \times 1{,}2 = 3{,}6$ cm. Vérification : $\frac{6}{3{,}6} \approx 1{,}67$, mêmes proportions que EFGH.

Ex. 4 ★★☆ **Réduction et théorème de Thalès**

(a) M ∈ [AB], N ∈ [AC] et $(MN) \parallel (BC)$: ce sont des triangles emboîtés. D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, donc AMN est une réduction de ABC de rapport $k = \frac{AM}{AB}$. On convertit : AM = 45 mm = 4,5 cm, donc $k = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$
($0{,}75 < 1$: réduction).

(b) MN = $k \times$ BC = $0{,}75 \times 8 = 6$ cm.

(c) ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, donc AC = 10 cm. Périmètre de ABC : $6 + 8 + 10 = 24$ cm. Le périmètre est multiplié par k : périmètre de AMN = $0{,}75 \times 24 = 18$ cm.

Ex. 5 ★★★ **La photocopieuse de Lina**

(a) Hugo a divisé la longueur de départ par la longueur obtenue : c'est l'inverse. On divise la longueur obtenue par la longueur de départ : $k = \frac{R'S'}{RS} = \frac{10}{8} = 1{,}25$. Comme $1{,}25 > 1$, c'est un agrandissement.

(b) Pour RSTU : $8 \div 5 = 1{,}6$. Hugo obtient un rectangle de 10 cm sur $5 + 2 = 7$ cm : $10 \div 7 \approx 1{,}43$. Les quotients ne sont pas égaux, donc la forme a changé : ce n'est pas un agrandissement. Agrandir, c'est multiplier toutes les longueurs par k, pas leur ajouter la même longueur.

(c) S′T′ = $1{,}25 \times 5 = 6{,}25$ cm. On vérifie : $10 \div 6{,}25 = 1{,}6$, le même quotient que $8 \div 5$. Les proportions sont donc conservées.

(d) Périmètre de RSTU : $2 \times (8 + 5) = 26$ cm. Périmètre de R′S′T′U′ : $2 \times (10 + 6{,}25) = 32{,}5$ cm. Autre façon : le périmètre est lui aussi multiplié par k, donc $1{,}25 \times 26 = 32{,}5$ cm.

(e) Elle multiplie par $\frac{1}{k} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$ (et non par $1 - 0{,}25$). Vérification : $10 \times 0{,}8 = 8$ cm, c'est bien RS.

Ex. 6 ★★★ **La randonnée de Mia**

(a) Première erreur : Tom a divisé des cm par des km. On convertit d'abord : 1,2 km = 120 000 cm, donc $k = \frac{3}{120\,000} = \frac{1}{40\,000}$. Deuxième erreur : $k < 1$, donc la carte est une réduction et non un agrandissement. L'échelle est $\frac{1}{40\,000}$: 1 cm sur la carte représente 40 000 cm en réalité.

(b) RL $= 4 \times 40\,000 = 160\,000$ cm $= 1{,}6$ km. LS $= 4{,}2 \times 40\,000 = 168\,000$ cm $= 1{,}68$ km.

(c) Le triangle RLS est rectangle en L, donc, d'après le théorème de Pythagore, $\text{RS}^2 = 4^2 + 4{,}2^2 = 16 + 17{,}64 = 33{,}64$, d'où RS $= 5{,}8$ cm. Le périmètre sur la carte vaut $4 + 4{,}2 + 5{,}8 = 14$ cm. Le périmètre réel s'obtient avec la même échelle : $14 \times 40\,000 = 560\,000$ cm $= 5{,}6$ km.

(d) 3,4 km = 340 000 cm. Pour passer du réel à la carte, on multiplie par $\frac{1}{40\,000}$: $340\,000 \div 40\,000 = 8{,}5$ cm.

Ex. 7 ★★★ **La maquette du voilier**

(a) On met les deux longueurs dans la même unité : DE = 4,8 m = 480 cm. $k = \frac{D'E'}{DE} = \frac{12}{480} = \frac{1}{40}$.

(b) Toutes les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{40}$: EF = 200 cm donc E′F′ $= 200 \div 40 = 5$ cm, et DF = 520 cm donc D′F′ $= 520 \div 40 = 13$ cm. Périmètre : $12 + 5 + 13 = 30$ cm.
(Vérification : le périmètre de DEF vaut 12 m = 1 200 cm et $1\,200 \div 40 = 30$ cm.)

(c) Non. Une réduction conserve les angles : ils ne sont pas multipliés par k.
Donc $\widehat{E'D'F'} = \widehat{EDF} \approx 23°$.

(d) Pour revenir à la taille réelle, on multiplie par $\frac{1}{k} = 40$: $18 \times 40 = 720$ cm $= 7{,}2$ m.

(e) On divise chaque côté par le côté correspondant de DEF, en cm : $\frac{6}{480} = \frac{1}{80}$, $\frac{2{,}5}{200} = \frac{1}{80}$, mais $\frac{7}{520} \approx 0{,}0135$, alors que $\frac{1}{80} = 0{,}0125$. Les longueurs ne sont pas toutes multipliées par le même nombre : ce n'est pas une réduction de DEF. Il aurait fallu un côté de $520 \div 80 = 6{,}5$ cm.

2. *Centre, rapport et image d'un point : rapport positif*

Ex. 8 ★★☆ **Automatismes : distances au centre**

(a) A' est sur $[OA]$, donc k est positif et $k = OA' \div OA = 18 \div 4{,}5 = 4$.

(b) $OB' = 0{,}5 \times 7 = 3{,}5$ cm. Le rapport est positif et inférieur à 1 (c'est une réduction), donc B' est sur $[OB]$, entre O et B : c'est le milieu de [OB]. $BB' = OB - OB' = 7 - 3{,}5 = 3{,}5$ cm.

(c) $OC' = \frac{3}{5} \times OC$, donc $OC = 4{,}2 \div \frac{3}{5} = 4{,}2 \times \frac{5}{3} = 7$ cm.

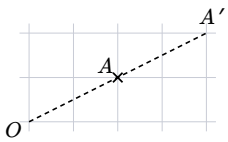
(d) $OD' = 1 \times 5{,}8 = 5{,}8$ cm et D' est sur $[OD)$, donc D' est confondu avec D : $DD' = 0$ cm.

(e) Le centre est sa propre image : $OO' = 7 \times OO = 7 \times 0 = 0$ cm, donc $O' = O$.

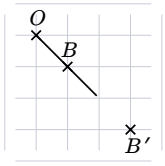
(f) Non. Le rapport multiplie la distance au centre : $OE' = 2{,}5 \times 2 = 5$ cm, c'est OE' qui vaut 5 cm. E est entre O et E', donc $EE' = 5 - 2 = 3$ cm.

Ex. 9 ★★☆ **Automatismes : construire sur quadrillage**

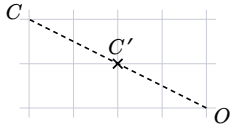
(a) De O à A : 2 carreaux à droite et 1 en haut. Avec $k = 2$: 4 à droite et 2 en haut, sur $[OA]$.



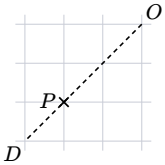
(b) On trace la demi-droite $[OB)$ et, à partir de O, on reporte trois fois la longueur OB au compas : $OB' = 3 \times OB$. Contrôle : de O à B, 1 carreau à droite et 1 en bas, donc B' est à 3 à droite et 3 en bas.



(c) De O à C : 4 carreaux à gauche et 2 en haut. Avec $k = 0{,}5$: 2 à gauche et 1 en haut, donc C' est entre O et C.

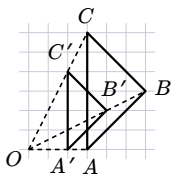


(d) De O à D : 3 carreaux à gauche et 3 en bas. Comme $OD = 1{,}5 \times OP$, on divise par 1,5 : P est à 2 carreaux à gauche et 2 en bas de O, entre O et D.



Ex. 10 ★★☆ **Retrouver le centre et le rapport**

(a) Le centre, le point et son image sont alignés, donc O est sur (AA') et sur (BB') : O est leur point d'intersection. (CC') passe aussi par O.



(b) $OA = 3$ cm et $OA' = 2$ cm, et A' est sur $[OA]$, donc k est positif : $k = OA' \div OA = \frac{2}{3}$ (et non $\frac{3}{2}$).

(c) $0 < k < 1$, c'est donc une réduction. Une homothétie multiplie les longueurs par $|k|$, donc $A'C' = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ cm. Sur le quadrillage, de A' à C' il y a bien 4 carreaux.

Ex. 11 ★★☆ **Le pantographe de Ben**

(a) O, M et M' sont alignés et M' est sur $[OM]$, donc $k = OM' \div OM = 30 \div 12 = 2{,}5$.

(b) $OM' = 2{,}5 \times 16 = 40$ cm. $k > 1$, donc M est entre O et M' : $MM' = OM' - OM = 40 - 16 = 24$ cm.

(c) $ON' = 0{,}4 \times 15 = 6$ cm. $0 < k < 1$, donc N' est entre O et N : $NN' = ON - ON' = 15 - 6 = 9$ cm.

Ex. 12 ★★★ **L'ombre de la marionnette**

(a) Noé a divisé AA' par OA : or le rapport multiplie la distance au centre. A est entre O et A', donc $OA' = OA + AA' = 15 + 300 = 315$ cm. Alors $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{315}{15} = 21$.

(b) Une homothétie de rapport 21 multiplie les longueurs par 21, donc $A'B' = 21 \times 12 = 252$ cm, soit 2,52 m.

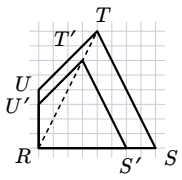
(c) Avec $k = 25$: $OA' = 25 \times 15 = 375$ cm, donc $AA' = 375 - 15 = 360$ cm. Avant, $AA' = 300$ cm : le mur doit reculer de $360 - 300 = 60$ cm.

(d) Le rapport est positif, donc chaque point de l'ombre est sur la demi-droite qui part de O et passe par le point de la marionnette, du même côté de O. Le haut reste en haut : l'ombre n'est pas à l'envers.

Ex. 13 ★★★ **Réduire un logo à partir d'un sommet**

(a) R est le centre de l'homothétie, et le centre est sa propre image : $R' = R$.

(b) De R à S : 8 carreaux à droite, donc $\frac{3}{4} \times 8 = 6$ à droite. De R à T : 4 à droite et 8 en haut, donc 3 à droite et 6 en haut. De R à U : 4 en haut, donc 3 en haut.



Ex. 13 (suite)

(c) De R à T : 4 carreaux à droite et 8 en haut, donc $RT = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} \approx 8{,}9$ cm. $RT' = \frac{3}{4} \times \sqrt{80} \approx 6{,}7$ cm. Le rapport est inférieur à 1, donc T' est entre R et T et $TT' = RT - RT' = \frac{1}{4} \times \sqrt{80} \approx 2{,}2$ cm.

(d) T est sur la demi-droite $[RT')$, donc le rapport est positif. Comme $RT' = \frac{3}{4} \times RT$, il vaut $\frac{RT}{RT'} = 1 \div \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$: c'est un agrandissement.

Ex. 14 ★★★ **Quatre points alignés**

(a) $OF = OE + EF = 2 + 1 = 3$ cm et $1{,}5 \times OE = 1{,}5 \times 2 = 3$ cm. De plus F est sur la demi-droite $[OE)$. Donc F est l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport 1,5.

(b) $OG = 2 + 1 + 3 = 6$ cm. E est sur $[OG]$, donc le rapport est positif et $k = \frac{OE}{OG} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (l'image au numérateur).

(c) Le rapport 0,5 est positif et inférieur à 1, donc H est entre O et G et $OH = 0{,}5 \times 6 = 3$ cm. Or $OF = 3$ cm et F est sur $[OG]$: H est le point F.

(d) Non. Le rapport multiplie la distance au centre E, pas FG. $EG = 1 + 3 = 4$ cm et $EF = 1$ cm, G est sur $[EF]$, donc $k = \frac{4}{1} = 4$: G est l'image de F par l'homothétie de centre E et de rapport 4.

(e) G est sur $[OP]$, donc P est sur $[OG]$ et $OG = 4 \times OP$, d'où $OP = 6 \div 4 = 1{,}5$ cm. P et E sont sur $[OG]$ avec $OP < OE$, donc P est entre O et E et $PE = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$ cm.

3. *Image d'un point : rapport négatif*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : distances avec un rapport négatif**

(a) M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport -2.
Donc O, M et M' sont alignés, M' est de l'autre côté de O par rapport à M, et $OM' = |-2| \times OM = 2 \times 3 = 6$ cm.

(b) Le rapport est négatif, donc O est entre M et M'. Ainsi $MM' = OM + OM' = 3 + 6 = 9$ cm.

(c) $OM' = |-\frac{1}{3}| \times OM = \frac{1}{3} \times 3 = 1$ cm, de l'autre côté de O. La distance à zéro de k vaut $\frac{1}{3}$, qui est inférieure à 1 : c'est une réduction.

Ex. 15 **(suite)**

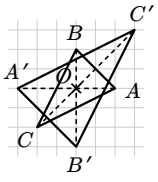
(d) $OM' = |-1| \times 3 = 3$ cm et M' est de l'autre côté de O. O est donc le milieu de $[MM']$: M' est le symétrique de M par rapport à O. C'est la symétrie centrale de centre O.

(e) Une longueur n'est jamais négative. On multiplie par la distance à zéro de k : $OM' = |-1{,}5| \times 3 = 1{,}5 \times 3 = 4{,}5$ cm. Le signe $-$ ne change pas la distance, il indique seulement que M' est de l'autre côté de O.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : construire sur quadrillage avec k = −1,5**

(a) $|k| = 1{,}5$, donc le trajet est multiplié par $1{,}5 : 2 \times 1{,}5 = 3$ carreaux. Comme $k < 0$, on part de l'autre côté de O : 3 carreaux vers la gauche. A' est 3 carreaux à gauche de O.

(b) B est 2 carreaux au-dessus de O, donc B' est 3 carreaux en dessous de O. C est 2 carreaux à gauche et 2 carreaux en bas de O, donc C' est 3 carreaux à droite et 3 carreaux en haut de O.



(c) Le rapport est négatif, donc chaque trajet depuis O change de sens (droite devient gauche, haut devient bas). Le triangle $A'B'C'$ est retourné : c'est un demi-tour autour de O. Il est aussi agrandi, car $|k| = 1{,}5 > 1$.

(d) D' est 3 carreaux à droite de O. On a $OD' = 1{,}5 \times OD$, donc $OD = 3 \div 1{,}5 = 2$ carreaux. Comme $k < 0$, D est de l'autre côté de O : 2 carreaux à gauche de O.

Ex. 17 ★★☆ **Retrouver le rapport, puis s'en servir**

(a) $|k| = \frac{OE'}{OE} = \frac{3}{4}$. E' est de l'autre côté de O par rapport à E, donc le rapport est négatif : $k = -\frac{3}{4}$. Comme $\frac{3}{4} < 1$, c'est une réduction.

(b) $OF' = |k| \times OF = \frac{3}{4} \times 2 = 1{,}5$ cm. F' est sur la droite (OF), de l'autre côté de O : à 1,5 cm au-dessus de O.

(c) Le rapport est négatif, donc O est entre F et F'. Ainsi $FF' = OF + OF' = 2 + 1{,}5 = 3{,}5$ cm.

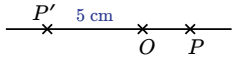
Ex. 18 ★★☆ **Les erreurs de Jade**

(a) Non. C'est la distance à zéro de k qui compte : $|-2| = 2 > 1$, donc l'homothétie est un agrandissement. Le signe indique seulement le côté où se trouve l'image.

Ex. 18 **(suite)**

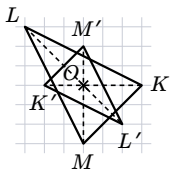
(b) Le rapport multiplie la distance au centre OP, pas la distance PP'. $OP' = |-2| \times OP = 2 \times 2{,}5 = 5$ cm. Comme $k < 0$, O est entre P et P', donc $PP' = OP + OP' = 2{,}5 + 5 = 7{,}5$ cm.

(c) P' est sur la droite (OP), de l'autre côté de O, à 5 cm de O. À la règle, on mesure bien $PP' = 7{,}5$ cm.



Ex. 19 ★★★ **Un centre à l'intérieur du triangle**

(a) $k = -\frac{2}{3}$ est négatif, donc chaque image est de l'autre côté de O, et sa distance à O est multipliée par $|k| = \frac{2}{3}$. Pour aller de O à K, on fait 3 carreaux vers la droite. Pour aller de O à K', on fait donc $\frac{2}{3} \times 3 = 2$ carreaux vers la gauche. De la même façon : L est à 3 carreaux à gauche et 3 carreaux en haut de O, donc L' est à 2 carreaux à droite et 2 carreaux en bas de O. M est à 3 carreaux en dessous de O, donc M' est à 2 carreaux au-dessus de O.

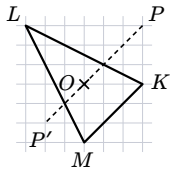


(b) K' est l'image de K par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{2}{3}$.
Donc O, K et K' sont alignés, K' est de l'autre côté de O et $OK' = \frac{2}{3} \times OK = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ cm. Le point O est entre K et K', donc $KK' = OK + OK' = 3 + 2 = 5$ cm (et non pas $\frac{2}{3} \times 3 = 2$ cm).

(c) Non. Un simple glissement laisserait le triangle dans le même sens. Ici, le rapport est négatif, donc chaque point passe de l'autre côté de O. M est en dessous de O, mais M' est au-dessus. L est en haut à gauche de O, mais L' est en bas à droite. Le triangle $K'L'M'$ est donc réduit (car $|k| = \frac{2}{3} < 1$) et retourné : c'est un demi-tour autour de O.

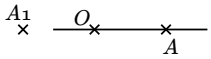
Ex. 19 **(suite)**

(d) P' est l'image de P et k est négatif, donc P est de l'autre côté de O par rapport à P'. De plus, $OP' = \frac{2}{3} \times OP$, donc $OP = OP' \div \frac{2}{3}$. Pour aller de O à P', on fait 2 carreaux à gauche et 2 carreaux vers le bas. Pour aller de O à P, on fait donc $2 \div \frac{2}{3} = 3$ carreaux à droite et 3 carreaux vers le haut.

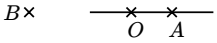


Ex. 20 ★★★ **Même distance, rapports différents**

(a) Le rapport est -1, donc A_1 est de l'autre côté de O et $OA_1 = 1 \times 2{,}4 = 2{,}4$ cm. O est donc le milieu de $[AA_1]$: A_1 est le symétrique de A par rapport à O. C'est la symétrie centrale de centre O. Comme O est entre A et A_1 : $AA_1 = 2{,}4 + 2{,}4 = 4{,}8$ cm.



(b) Première erreur : une longueur n'est jamais négative. On multiplie par la distance à zéro $|k| = 2{,}5$: $OB = 2{,}5 \times 2{,}4 = 6$ cm. Le signe de k indique seulement que B est de l'autre côté de O. Deuxième erreur : comme $k < 0$, O est entre A et B, donc on additionne : $AB = OA + OB = 2{,}4 + 6 = 8{,}4$ cm.



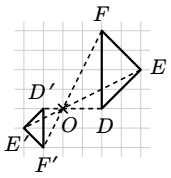
(c) O est entre A et C, donc $AC = OA + OC$ et $OC = 3 - 2{,}4 = 0{,}6$ cm. On a $OC = |k| \times OA$, donc $|k| = \frac{0{,}6}{2{,}4} = 0{,}25$. C est de l'autre côté de O, donc k est négatif : $k = -0{,}25$. C'est une réduction.

Ex. 20 **(suite)**

(d) Non. On a bien $OD = OC = 0{,}6$ cm, donc $|k| = \frac{0{,}6}{2{,}4} = 0{,}25$ dans les deux cas. Mais D est sur $[OA]$, du même côté de O que A, donc le rapport est positif. D est l'image de A par l'homothétie de rapport 0,25, et non $-0{,}25$. La distance donne la valeur de $|k|$, la position donne le signe.

Ex. 21 ★★★ **Retrouver le centre caché**

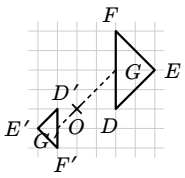
(a) Le centre d'une homothétie est aligné avec chaque point et son image. Il est donc sur (DD') et sur (EE') : c'est leur point d'intersection. On trouve O sur $[DD']$, à 1 carreau à droite de D' et à 2 carreaux à gauche de D. On vérifie que la droite (FF') passe aussi par O.



(b) O est entre D et D' : l'image est de l'autre côté du centre, donc k est négatif. On lit $OD = 2$ cm et $OD' = 1$ cm. Comme $OD' = |k| \times OD$, on a $|k| = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Donc $k = -0{,}5$. C'est une réduction.

(c) Le rapport multiplie la distance au centre : on doit calculer $|k| = \frac{OD'}{OD}$, et non utiliser DD'. Avec sa méthode, Sami trouverait $|k| = \frac{DD'}{OD} = \frac{3}{2} = 1{,}5 > 1$. Ce serait un agrandissement, alors que $D'E'F'$ est plus petit que DEF : c'est impossible.

(d) Une homothétie conserve les milieux, donc G' est le milieu de $[D'F']$. C'est le nœud à 1 carreau à gauche et 1 carreau en dessous de O.
Vérification : pour aller de O à G, on fait 2 carreaux à droite et 2 vers le haut. Avec $k = -0{,}5$, pour aller de O à G', on fait $0{,}5 \times 2 = 1$ carreau à gauche et 1 vers le bas : on retrouve le même point.

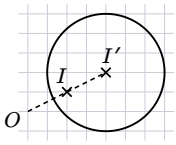


4. *Image d'une figure, retrouver le centre ou le rapport*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : longueurs, angles et cercle image**

(a) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, donc $A'B' = 3 \times 2{,}4 = 7{,}2$ cm. Une longueur n'est jamais négative : $-7{,}2$ cm est faux.

(b) L'image du cercle est un cercle de centre I′, image de I, et de rayon $|k| \times r$. Je place I′ sur $[OI)$ avec $OI' = 2 \times OI$, donc I′ est à 4 carreaux à droite et 2 carreaux vers le haut de O. Le rayon vaut $2 \times 1{,}5 = 3$ cm, et non $1{,}5 + 2$.



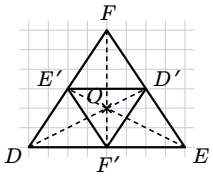
(c) Les longueurs sont multipliées par $|k| = 1{,}25$. Pour trouver l'antécédent, je divise par 1,25 : $AB = 10 \div 1{,}25 = 8$ cm.

(d) Une homothétie conserve les angles, donc $\widehat{X'Y'Z'} = 48°$. Elle multiplie les longueurs par $|k|$, donc $Y'Z' = 0{,}4 \times 5{,}5 = 2{,}2$ cm.

(e) $|k| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. A′ est sur [OA), du même côté de O que A, donc le rapport est positif : $k = \frac{1}{3}$. C'est une réduction.

Ex. 23 ★☆☆ **Construire l'image d'un triangle, centre à l'intérieur**

(a) Le rapport est négatif, donc chaque image est de l'autre côté de O, deux fois plus près. D est à 4 carreaux à gauche et 2 en bas de O, donc D′ est à 2 carreaux à droite et 1 en haut. De même, E′ est à 2 à gauche et 1 en haut, et F′ à 2 en bas. Je relie D′, E′, F′ dans le même ordre.



(b) DE mesure 8 carreaux et D′E′ en mesure 4. On a bien $D'E' = 0{,}5 \times 8 = 4$ carreaux : les longueurs sont multipliées par $|k|$.

Ex. 23 (suite)

(c) [D′F′] correspond à [DF], car D′ est l'image de D et F′ celle de F. Ce n'est pas [D′E′]. Pour aller de D à F, on fait 4 carreaux à droite et 6 en haut. Pour aller de D′ à F′, on fait 2 à gauche et 3 en bas : les directions sont les mêmes, donc $(D'F') \parallel (DF)$.

(d) Une homothétie conserve la nature des figures et multiplie toutes les longueurs par le même nombre. Comme $FD = FE$, on a $F'D' = F'E'$. Le triangle D′E′F′ est donc isocèle en F′.

Ex. 24 ★★☆ **Pantographe : retrouver le centre et le rapport**

(a) O, A et A′ sont alignés, donc O est sur (AA′), mais il peut être n'importe où sur cette droite. O est aussi sur (BB′). C'est donc le point d'intersection de (AA′) et (BB′) : il est à 2 carreaux à droite de A′ et 2 carreaux au-dessus.

(b) En partant de C′, (CC′) monte de 2 carreaux pour 1 carreau vers la droite : elle passe bien par O, qui est à 2 carreaux à droite de C′ et 4 au-dessus. [AC] et [A′C′] sont tous les deux verticaux, donc $(A'C') \parallel (AC)$: l'homothétie conserve le parallélisme.

(c) J'utilise une paire de points correspondants : $|k| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{2} = 2$. A′ est de l'autre côté de O par rapport à A, et la figure est retournée. Le rapport est donc négatif : $k = -2$.

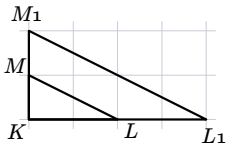
Ex. 25 ★★☆ **Logo agrandi : homothétie ou pas ?**

(a) KL = 2, K′L′ = 4, KM = 1 et K′M′ = 2.
Donc $\frac{K'L'}{KL} = \frac{4}{2} = 2$ et $\frac{K'M'}{KM} = \frac{2}{1} = 2$.

(b) Non. Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle. Or (KL) est horizontale et (K′L′) est verticale, donc elles ne sont pas parallèles. Les deux triangles ont la même forme, mais K′L′M′ n'est l'image de KLM par aucune homothétie.

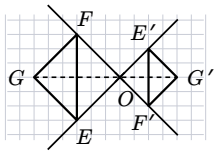
Ex. 25 **(suite)**

(c) K est le centre, donc il est sa propre image. L1 est sur [KL) avec $KL_1 = 2 \times 2 = 4$ carreaux, et M1 est sur [KM) avec $KM_1 = 2 \times 1 = 2$ carreaux. Pour aller de L1 à M1, on fait 4 carreaux à gauche et 2 en haut. Pour aller de L à M, on fait 2 à gauche et 1 en haut : les directions sont les mêmes, donc $(L_1M_1) \parallel (LM)$.



Ex. 26 ★★★ **Figure retournée : centre, rapport et antécédent**

(a) F′ n'est pas l'image de E : il faut relier chaque point à SON image (E $\leftrightarrow$ E′, F $\leftrightarrow$ F′). Comme O, E et E′ sont alignés, et O, F et F′ aussi, O est le point d'intersection de (EE′) et (FF′). C'est le nœud situé 3 carreaux à droite et 3 carreaux au-dessus de E. Contrôle : (GG′) passe aussi par O.



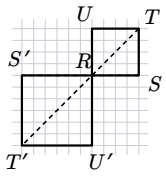
(b) EF = 6 carreaux et E′F′ = 4 carreaux, donc $|k| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. E′ est de l'autre côté de O par rapport à E (la figure est retournée), donc le rapport est négatif : $k = -\frac{2}{3}$.

(c) P′ est l'image de P, donc O, P et P′ sont alignés, P est de l'autre côté de O et $OP' = \frac{2}{3} \times OP$. Pour trouver l'antécédent, je divise : $OP = 2 \div \frac{2}{3} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$ cm. P est le nœud situé 3 carreaux à gauche de O. Une homothétie conserve les milieux, donc P est le milieu de [EF].

(d) Une homothétie conserve les angles, donc $\widehat{E'F'G'} = 45°$. Elle transforme une droite en une droite parallèle, donc $(E'G') \parallel (EG)$.

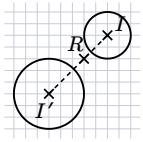
Ex. 27 ★★★ **Pochoir d'affiche : carré, cercle et centre sur un sommet**

(a) R est le centre, donc R′ = R. Le rapport est négatif, donc chaque image est de l'autre côté de R, à 1,5 fois la distance. S est à 4 carreaux à droite de R, donc S′ est à 6 carreaux à gauche de R. T est à 4 carreaux à droite et 4 carreaux au-dessus de R, donc T′ est à 6 carreaux à gauche et 6 carreaux en dessous. U est à 4 carreaux au-dessus de R, donc U′ est à 6 carreaux en dessous. On relie R, S′, T′ et U′ dans cet ordre.



(b) Non. Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle, donc (S′T′) doit être parallèle à (ST), c'est-à-dire verticale sur le quadrillage. Avoir la même forme et la même taille ne suffit pas : ce carré penché n'est pas l'image de RSTU par cette homothétie.

(c) Une homothétie multiplie les longueurs par $|k|$: le rayon devient $1{,}5 \times 2 = 3$ cm (on multiplie, on n'ajoute pas). Le centre du cercle image est I′, l'image de I : I est à 2 carreaux à droite et 2 carreaux au-dessus de R, donc I′ est à 3 carreaux à gauche et 3 carreaux en dessous de R.



(d) Le périmètre de RSTU vaut $4 \times 4 = 16$ cm. Une homothétie multiplie le périmètre par $|k| = 1{,}5$, donc le périmètre de R′S′T′U′ vaut $1{,}5 \times 16 = 24$ cm. Mathis a tort : le signe de k indique seulement que l'image est de l'autre côté du centre. Comme $|k| = 1{,}5 > 1$, c'est un agrandissement.

Ex. 28 ★★★ **Chambre noire : papillon et distances**

(a) A, O et A′ sont alignés, B, O et B′ aussi, et $(A'B') \parallel (AB)$: c'est une configuration papillon. D'après le lien avec le théorème de Thalès, le triangle OA′B′ est l'image du triangle OAB par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -\frac{OA'}{OA} = -\frac{24}{60} = -\frac{2}{5}$. Le rapport est négatif parce que A′ est de l'autre côté de O.

Ex. 28 **(suite)**

(b) Une longueur n'est jamais négative : une homothétie multiplie les longueurs par $|k|$, pas par k. Donc $A'B' = \frac{2}{5} \times 15 = 6$ cm.

(c) Le triangle OAB est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $OB^2 = 60^2 + 15^2 = 3\,825$, donc $OB = \sqrt{3\,825} \approx 61{,}8$ cm. Une homothétie multiplie les longueurs par $|k|$, donc $OB' = \frac{2}{5} \times OB \approx 24{,}7$ cm. B′ est de l'autre côté de O, donc $BB' = OB + OB' = \frac{7}{5} \times \sqrt{3\,825} \approx 86{,}6$ cm. J'utilise la valeur exacte, car additionner les arrondis donnerait 86,5.

(d) On cherche un antécédent. Le nouveau rapport vérifie $|k| = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ et $\mathrm{OA}' = \frac{3}{5} \times \mathrm{OA}$, donc $OA = 24 \div \frac{3}{5} = 24 \times \frac{5}{3} = 40$ cm. Hugo doit placer la bougie à 40 cm du trou.

5. *Propriétés conservées et lien avec Thalès*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : lire ce qui est conservé**

(a) Une homothétie conserve les angles. F', E' et D' sont les images de F, E et D, donc $\widehat{E'F'D'} = \widehat{EFD} = 56°$.

(b) Le triangle DEF est rectangle en E. Une homothétie conserve les angles, donc l'angle $\widehat{D'E'F'}$ est droit aussi : le triangle $D'E'F'$ est rectangle en E'.

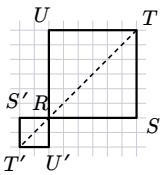
(c) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, donc $E'F' = |-0{,}5| \times EF = 0{,}5 \times 4 = 2$ cm.

(d) Une longueur n'est jamais négative. On multiplie par la distance à zéro du rapport, $|k| = 0{,}5$: $D'E' = 0{,}5 \times 6 = 3$ cm.

(e) Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle. $(D'F')$ est l'image de (DF), donc $(D'F') \parallel (DF)$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : l'image d'un carré**

(a) R est le centre, donc $R' = R$. S' est sur la droite (RS), de l'autre côté de R, avec $RS' = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ cm, soit 2 carreaux à gauche de R. On place de même T' sur (RT), 2 carreaux à gauche et 2 carreaux sous R, puis U' 2 carreaux sous R. On relie dans le même ordre.



(b) Une homothétie conserve la nature des figures. L'image d'un carré est donc un carré : $R'S'T'U'$ est un carré.

Ex. 30 **(suite)**

(c) Une homothétie multiplie les longueurs par $|k|$, donc aussi le périmètre. Le périmètre de $RSTU$ vaut $4 \times 6 = 24$ cm. Celui de $R'S'T'U'$ vaut $\frac{1}{3} \times 24 = 8$ cm.

(d) Non. Une homothétie multiplie les longueurs par $|k|$. Elle ne les conserve que si $k = 1$ ou $k = -1$. Ici $|k| = \frac{1}{3}$: $RS = 6$ cm mais $R'S' = 2$ cm. C'est une réduction.

(e) Une homothétie conserve les milieux. I est le milieu de $[ST]$, donc I' est le milieu de $[S'T']$, l'image de $[ST]$.

Ex. 31 ★★☆ **Triangles emboîtés et homothétie**

(a) P est sur le segment $[KL]$, donc $KL = KP + PL = 2 + 3 = 5$ cm.

(b) Les droites (LP) et (MQ) se coupent en K et $(PQ) \parallel (LM)$. D'après le théorème de Thalès, $\frac{KP}{KL} = \frac{KQ}{KM} = \frac{PQ}{LM}$.

(c) Le centre est le point commun K. P est l'image de L et Q celle de M. P est du même côté de K que L (triangles emboîtés), donc le rapport est positif : $k = \frac{KP}{KL} = \frac{2}{5} = 0{,}4$. C'est une réduction.

(d) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$. $[PQ]$ est l'image de $[LM]$, donc $PQ = 0{,}4 \times 5 = 2$ cm.

Ex. 32 ★★☆ **Configuration papillon : attention au signe**

(a) Le centre est bien E, le point commun aux droites (RT) et (SU), et T est l'image de R. Mais R et T sont de part et d'autre de E (configuration papillon), donc le rapport est négatif : $k = -\frac{ET}{ER} = -\frac{6}{4} = -1{,}5$. Comme $|k| > 1$, c'est un agrandissement.

(b) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$. $[TU]$ est l'image de $[RS]$, donc $TU = |-1{,}5| \times 2 = 1{,}5 \times 2 = 3$ cm.

(c) Le triangle ERS est rectangle en R. D'après le théorème de Pythagore, $ES^2 = ER^2 + RS^2 = 16 + 4 = 20$, donc $ES = \sqrt{20}$ cm. $[EU]$ est l'image de $[ES]$, donc $EU = 1{,}5 \times \sqrt{20} \approx 6{,}7$ cm.

Ex. 33 ★★★ **Triangles emboîtés : du rapport à l'aire**

(a) Le triangle GHJ est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $GJ^2 = GH^2 + HJ^2 = 64 + 36 = 100$, donc $GJ = 10$ cm.

Ex. 33 **(suite)**

(b) Les points G, P, H sont alignés, ainsi que G, Q, J, et $(PQ) \parallel (HJ)$. P est du même côté de G que H : ce sont des triangles emboîtés.
Donc GPQ est l'image de GHJ par l'homothétie de centre G (le point commun) et de rapport positif $k = \frac{GP}{GH} = \frac{6}{8} = 0{,}75$
(petit ÷ grand).

(c) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$.
Donc $PQ = 0{,}75 \times HJ = 0{,}75 \times 6 = 4{,}5$ cm et $GQ = 0{,}75 \times GJ = 0{,}75 \times 10 = 7{,}5$ cm.

(d) Non. P est l'image de H par cette homothétie. Une homothétie conserve les angles, donc $\widehat{GPQ} = \widehat{GHJ} = 90°$. Le triangle GPQ est rectangle en P. (Autre justification : $(PQ) \parallel (HJ)$ et $(HJ) \perp (GH)$, donc $(PQ) \perp (GH)$.)

(e) Aire de GHJ : $\frac{8 \times 6}{2} = 24$ cm². Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2, et non par k. Aire de GPQ : $0{,}75^2 \times 24 = 0{,}5625 \times 24 = 13{,}5$ cm².
Vérification : $\frac{6 \times 4{,}5}{2} = 13{,}5$ cm².

Ex. 34 ★★★ **Configuration papillon : signe, agrandissement et milieu**

(a) Les points E et G sont de part et d'autre de S (configuration papillon), donc le rapport est bien négatif. Mais Nour a inversé le quotient : on divise une longueur de l'image par la longueur correspondante de départ. G est l'image de E, donc $k = -\frac{SG}{SE} = -\frac{15}{6} = -2{,}5$.

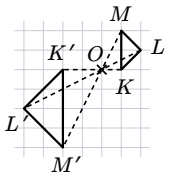
(b) Non. Ce n'est pas le signe de k qui compte, mais sa distance à zéro : $|k| = 2{,}5 > 1$. SGH est donc un agrandissement de SEF, « retourné » de l'autre côté de S.

(c) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$ (une longueur n'est jamais négative).
Donc $GH = 2{,}5 \times EF = 2{,}5 \times 5 = 12{,}5$ cm et $SH = 2{,}5 \times SF = 2{,}5 \times 5 = 12{,}5$ cm. Le périmètre de SGH vaut $15 + 12{,}5 + 12{,}5 = 40$ cm. Vérification : $2{,}5 \times (6 + 5 + 5) = 2{,}5 \times 16 = 40$ cm.

(d) L'image de $[EF]$ est $[GH]$. Une homothétie conserve les milieux, donc l'image du milieu I de $[EF]$ est le milieu J de $[GH]$. Par définition de l'homothétie, un point, son image et le centre sont alignés : S, I et J sont alignés, et S est entre I et J car $k < 0$.

Ex. 35 ★★★ **Retrouver le centre et le rapport, puis prolonger**

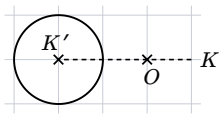
(a) Le centre d'une homothétie est aligné avec chaque point et son image, donc il se trouve sur (KK') et sur (LL'). Ces deux droites se coupent au nœud situé 1 carreau à gauche de K : c'est O. La droite (MM') passe aussi par ce nœud, ce qui confirme.



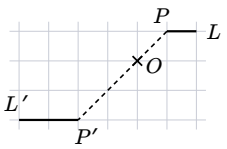
(b) K et K' sont de part et d'autre de O, donc $k < 0$. On compte $OK = 1$ carreau et $OK' = 2$ carreaux, donc $|k| = \frac{2}{1} = 2$ et $k = -2$.

(c) Non. Une homothétie conserve les angles : seules les longueurs sont multipliées par $|k|$. Sur le quadrillage, $[KL]$ et $[LM]$ sont deux diagonales de carreaux perpendiculaires et de même longueur : KLM est rectangle isocèle en L. Une homothétie conserve les angles et la nature des figures, donc $K'L'M'$ est rectangle isocèle en L', avec $K'L' = L'M' = 2 \times KL$.

(d) Le cercle de centre K et de rayon r a pour image le cercle de centre K' et de rayon $|k| \times r$. $\mathcal{C}'$ est donc le cercle de centre K' et de rayon $2 \times 0{,}5 = 1$ cm.



(e) Une homothétie conserve les milieux, donc P' est le milieu de $[K'M']$. On le place 2 carreaux sous K', et on vérifie que P, O et P' sont alignés avec $OP' = 2 \times OP$.
L'image de la droite (LP) est la droite $(L'P')$, et une homothétie transforme une droite en une droite parallèle, donc $(L'P') \parallel (LP)$.



6. *Effet sur les aires et les volumes*

Ex. 36 ★☆☆ Automatismes · Le bon coefficient

(a) Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2, et $(-2)^2 = 4$ est positif.
Donc l'aire de A′B′C′ vaut $2 \times 4 = 8$ cm².

(b) Les aires sont multipliées par $k^2 = 4^2 = 16$ (pas par 4).
Donc l'aire vaut $5 \times 16 = 80$ cm².

(c) Une homothétie multiplie les longueurs, donc les périmètres, par $|k| = \frac{2}{3}$ (pas par k^2).
Donc le périmètre de l'image vaut $21 \times \frac{2}{3} = 14$ cm.

(d) Les volumes sont multipliés par $k^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.
Donc le volume vaut $81 \div 27 = 3$ cm³.

(e) Les volumes sont multipliés par $k^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728$.
Donc le volume vaut $125 \times 1{,}728 = 216$ cm³.

Ex. 37 ★☆☆ Automatismes · Retrouver le rapport

(a) Les aires sont multipliées par k^2 : $k^2 = \frac{49}{4} = 12{,}25$, donc $k = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5$.

(b) Les périmètres sont multipliés par k (pas par k^2) : $k = \frac{20}{50} = 0{,}4$.

(c) Les contenances sont multipliées par k^3 : $k^3 = \frac{108}{32} = 3{,}375$. Or $1{,}5^3 = 3{,}375$, donc $k = 1{,}5$.

(d) Les volumes sont multipliés par k^3 : $k^3 = \frac{3}{375} = 0{,}008$. Or $0{,}2^3 = 0{,}008$, donc $k = 0{,}2$.

(e) Les aires sont multipliées par k^2 : $k^2 = \frac{0{,}75}{3} = 0{,}25$, donc $|k| = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$. L'image est de l'autre côté du centre O, donc le rapport est négatif : $k = -0{,}5$.

Ex. 38 ★★☆ La maquette de la citerne

(a) La maquette est une réduction de rapport $k = \frac{1}{40}$: les longueurs sont divisées par 40. 3,2 m = 320 cm, donc la hauteur vaut $320 \div 40 = 8$ cm.

(b) $V = 4 \times 2{,}5 \times 3{,}2 = 32$ m³. Les volumes sont divisés par $40^3 = 64\,000$: $32 \div 64\,000 = 0{,}0005$ m³ $= 500$ cm³ $= 0{,}5$ L, car 1 L = 1 000 cm³.

(c) Dans le sens maquette → citerne, $k = 40$: les aires sont multipliées par $40^2 = 1\,600$. $150 \times 1\,600 = 240\,000$ cm² $= 24$ m², car 1 m² = 10 000 cm².

Ex. 39 ★★☆ Les statuettes de Hugo

(a) Non. La grande statuette est un agrandissement de rapport $k = \frac{24}{12} = 2$. La masse est proportionnelle au volume, donc multipliée par $k^3 = 8$ (pas par 2) : $0{,}9 \times 8 = 7{,}2$ kg.

Ex. 39 (suite)

(b) La peinture recouvre une surface : les aires sont multipliées par $k^2 = 4$ (pas par 2). Il faut $15 \times 4 = 60$ mL. « Deux fois plus haute » ne veut pas dire « deux fois plus de peinture ».

(c) 0,9 kg = 900 g. $k^3 = \frac{112{,}5}{900} = 0{,}125$. Or $0{,}5^3 = 0{,}125$, donc $k = 0{,}5$ et la hauteur vaut $12 \times 0{,}5 = 6$ cm.

Ex. 40 ★★★ Le triangle retourné

(a) Le triangle DEF est rectangle en E. D'après le théorème de Pythagore : $DF^2 = DE^2 + EF^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$, donc DF = 20 cm. Périmètre : $16 + 12 + 20 = 48$ cm. Aire : $\frac{16 \times 12}{2} = 96$ cm².

(b) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs, donc le périmètre, par $|k| = 1{,}5$. Périmètre de D′E′F′ : $48 \times 1{,}5 = 72$ cm.

(c) Première erreur : une aire n'est pas multipliée par k mais par k^2. Deuxième erreur : une aire n'est jamais négative, et $k^2 = (-1{,}5)^2 = 2{,}25$ est positif. Aire de D′E′F′ : $96 \times 2{,}25 = 216$ cm².

(d) Les aires sont multipliées par k^2, donc $k^2 = \frac{24}{96} = 0{,}25$ et $|k| = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$. L'image est du même côté de O que DEF, donc $k > 0$: $k = 0{,}5$ (c'est une réduction). Les longueurs sont multipliées par 0,5, donc D1F1 $= 0{,}5 \times 20 = 10$ cm.

Ex. 41 ★★★ Le verre à cocktail de Léon

(a) Le cône de jus est une réduction du cône du verre, de rapport $k = \frac{SK}{SH} = \frac{12}{15} = 0{,}8$. Une réduction multiplie les longueurs par k, donc $KB = 0{,}8 \times 4 = 3{,}2$ cm.

(b) La surface du jus est un disque de rayon 3,2 cm : aire $= \pi \times 3{,}2^2 = 10{,}24\pi \approx 32{,}2$ cm².
(On peut aussi multiplier l'aire du bord, $\pi \times 4^2$, par $k^2 = 0{,}64$.)

(c) Non. Les volumes sont multipliés par $k^3 = 0{,}8^3 = 0{,}512$, et pas par 0,8. Volume de jus : $250 \times 0{,}512 = 128$, soit environ 128 cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, on a 1 cL = 10 cm³, donc il y a environ 12,8 cL de jus.

(d) Les volumes sont multipliés par k^3, donc $k^3 = \frac{54}{250} = 0{,}216$. Or $0{,}6^3 = 0{,}216$, donc $k = 0{,}6$. Hauteur de sirop : $0{,}6 \times 15 = 9$ cm.

Ex. 42 ★★★ **La fresque de Zoé**

(a) Les deux longueurs doivent être dans la même unité : $OH' = 3\text{ m} = 300\text{ cm}$, donc $k = \frac{300}{25} = 12$ (et non $\frac{3}{25} = 0{,}12$).

(b) Le périmètre du dessin vaut $2 \times (15 + 10) = 50$ cm. Une homothétie de rapport 12 multiplie les longueurs, donc le périmètre, par 12 (et non par 144) : $50 \times 12 = 600$ cm, soit 6 m de ruban.

(c) L'aire du dessin vaut $15 \times 10 = 150\text{ cm}^2$. Les aires sont multipliées par $k^2 = 12^2 = 144$: $150 \times 144 = 21\,600\text{ cm}^2$. Comme $1\text{ m}^2 = 10\,000\text{ cm}^2$, l'aire de la fresque vaut $2{,}16\text{ m}^2$.

(d) $2{,}16 \div 1{,}5 = 1{,}44$: un pot ne suffit pas, donc Zoé doit acheter 2 pots.

(e) Non. Si les longueurs sont multipliées par 2,5, l'aire est multipliée par $2{,}5^2 = 6{,}25$: il faut 6,25 fois plus de peinture. Nouvelle aire : $2{,}16 \times 6{,}25 = 13{,}5\text{ m}^2$. $13{,}5 \div 1{,}5 = 9$, donc Zoé doit acheter 9 pots.

7. *Exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : distances, longueurs, aires et volumes**

(a) M′ est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $-1{,}5$, donc O, M et M′ sont alignés, M′ est de l'autre côté de O et $OM' = 1{,}5 \times 4 = 6$ cm. Comme O est entre M et M′ : $MM' = OM + OM' = 4 + 6 = 10$ cm.

(b) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$ (une longueur n'est jamais négative), donc le rayon de l'image vaut $2{,}5 \times 1{,}6 = 4$ cm.

(c) $|k| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$. Comme le rapport est négatif, $k = -\frac{5}{3}$ (et non $-1{,}67$, qui est une valeur approchée).

(d) Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 (et non par k), donc l'aire de l'image vaut $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 20 = \frac{16}{9} \times 20 = \frac{320}{9} \approx 35{,}6\text{ cm}^2$. On garde la fraction jusqu'à la fin : avec 1,33, on trouverait $1{,}33^2 \times 20 \approx 35{,}4\text{ cm}^2$, ce qui est faux.

(e) Une homothétie de rapport k multiplie les volumes par $|k|^3$, donc le volume de l'image vaut $2^3 \times 6 = 8 \times 6 = 48\text{ cm}^3$. Léo se trompe : $|-2| = 2 > 1$, donc c'est un agrandissement. Le signe moins indique seulement que l'image est de l'autre côté du centre.

Ex. 44 ★★☆ **Lire une figure et son image sur quadrillage**

(a) O, K et K′ sont alignés et K′ est de l'autre côté de O par rapport à K, donc le rapport k est négatif.

(b) KL mesure 3 carreaux et K′L′ en mesure 1, donc $|k| = \frac{1}{3}$. Comme k est négatif, $k = -\frac{1}{3}$ (on n'écrit pas $-0{,}33$, qui est une valeur approchée).

(c) Le triangle KLM est rectangle en L, donc $\widehat{KLM} = 90°$. Une homothétie conserve les angles, donc $\widehat{K'L'M'} = 90°$.

(d) Aire de KLM : $\frac{KL \times LM}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = 9\text{ cm}^2$. Une homothétie multiplie les aires par k^2, donc l'aire de K′L′M′ vaut $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times 9 = \frac{1}{9} \times 9 = 1\text{ cm}^2$ (et non 3 cm², ce qu'on obtiendrait en multipliant par $|k|$).

Ex. 45 ★★☆ **La chambre noire d'Inès**

(a) L'arbre et son image sont de part et d'autre du trou O (l'image est renversée), donc $k < 0$. Les distances au centre sont multipliées par $|k|$; dans la même unité : $12\text{ m} = 1\,200\text{ cm}$, donc $|k| = \frac{15}{1\,200} = \frac{1}{80}$ et $k = -\frac{1}{80}$.

(b) L'homothétie multiplie les longueurs par $|k|$: $P'S' = \frac{1}{80} \times 800 = 10$ cm (8 m = 800 cm). L'image de l'arbre mesure 10 cm de haut.

(c) Ici $|k| = \frac{12}{1\,800} = \frac{1}{150}$ (18 m = 1 800 cm). La distance du trou au fond est $|k|$ fois celle du trou à l'immeuble, donc cette distance vaut $15 \times 150 = 2\,250$ cm. L'immeuble se trouve à 22,5 m du trou.

Ex. 46 ★★☆ **Triangles emboîtés, Pythagore et aire**

(a) M est sur [AB], N est sur [AC] et $(MN) \parallel (BC)$: ce sont des triangles emboîtés. D'après le lien avec le théorème de Thalès, AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport positif $k = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

(b) Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = 10^2 + 7{,}5^2 = 100 + 56{,}25 = 156{,}25$, d'où $AC = 12{,}5$ cm. L'homothétie multiplie les longueurs par $|k|$: $AN = \frac{2}{5} \times 12{,}5 = 5$ cm et $MN = \frac{2}{5} \times 7{,}5 = 3$ cm.

(c) Aire de ABC : $\frac{10 \times 7{,}5}{2} = 37{,}5\text{ cm}^2$. L'homothétie multiplie les aires par k^2, donc l'aire de AMN vaut $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times 37{,}5 = \frac{4}{25} \times 37{,}5 = 6\text{ cm}^2$. Contrôle : $\frac{4 \times 3}{2} = 6$. L'aire du triangle AMN est de 6 cm².

Ex. 47 ★★★ **Le théâtre d'ombres de Lucie**

(a) La lumière se propage en ligne droite, donc O, R et R′ sont alignés. Le point R′ de l'ombre est sur la demi-droite [OR), du même côté de O que R :
Donc $k > 0$. H′ est l'image de H, donc $OH' = k \times OH$.
Je mets tout dans la même unité : $OH' = 1{,}5$ m $= 150$ cm.
Donc $k = \frac{150}{40} = \frac{15}{4}$
(soit 3,75).

(b) Une homothétie conserve les angles et la nature des figures, donc l'ombre de la plaque rectangulaire est un rectangle. Elle multiplie les longueurs par $|k| = \frac{15}{4}$:
$9 \times \frac{15}{4} = 33{,}75$ cm et $6 \times \frac{15}{4} = 22{,}5$ cm. L'ombre est un rectangle de 33,75 cm sur 22,5 cm.

(c) Noah a tort : une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2, et non par k. L'aire de la plaque vaut $9 \times 6 = 54$ cm², donc l'aire de l'ombre vaut $54 \times \left(\frac{15}{4}\right)^2 = 54 \times \frac{225}{16} = 759{,}375$ cm². Contrôle :
$33{,}75 \times 22{,}5 = 759{,}375$. L'aire de l'ombre est d'environ 759,4 cm².

(d) La longueur 45 cm de l'ombre est l'image de la longueur 9 cm de la plaque, donc le nouveau rapport est $k = \frac{45}{9} = 5$. H′ est l'image de H, donc $OH' = 5 \times OH$, d'où $OH = \frac{150}{5} = 30$ cm. Lucie doit placer la plaque à 30 cm de la lampe.

Ex. 48 ★★★ **Configuration papillon et erreur de signe**

(a) On sait que P ∈ (EF), Q ∈ (EG) et $(PQ) \parallel (FG)$, avec P et F de part et d'autre de E : c'est une configuration papillon. D'après le lien avec le théorème de Thalès, EPQ est l'image de EFG par l'homothétie de centre E et de rapport $k = -\frac{EP}{EF} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$. Le rapport est négatif, car P est de l'autre côté de E par rapport à F.

(b) Le triangle EFG est rectangle en E, donc d'après le théorème de Pythagore : $EG^2 = FG^2 - EF^2 = 100 - 64 = 36$, d'où $EG = 6$ cm. Q est l'image de G, donc $EQ = |k| \times EG = \frac{3}{4} \times 6 = 4{,}5$ cm.

(c) Une longueur n'est jamais négative : une homothétie multiplie les longueurs par $|k|$, et non par k.
Donc $PQ = \left|-\frac{3}{4}\right| \times 10 = \frac{3}{4} \times 10 = 7{,}5$ cm.

(d) Une homothétie conserve les angles et la nature des figures. Le triangle EFG est rectangle en E, et E est sa propre image (c'est le centre), donc EPQ est un triangle rectangle en E.

Ex. 48 **(suite)**

(e) L'aire du triangle EFG vaut $\frac{8 \times 6}{2} = 24$ cm². Une homothétie de rapport k multiplie les aires par $k^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, donc l'aire du triangle EPQ vaut $\frac{9}{16} \times 24 = 13{,}5$ cm². Contrôle : $\frac{6 \times 4{,}5}{2} = 13{,}5$. L'aire du triangle EPQ est de 13,5 cm².

Ex. 49 ★★★ **Le verre conique d'Emma**

(a) Le triangle SOA est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 56{,}25 - 20{,}25 = 36$, d'où $SO = 6$ cm. La hauteur du verre est de 6 cm.

(b) On sait que O′ ∈ [SO], A′ ∈ [SA] et $(O'A') \parallel (OA)$: ce sont des triangles emboîtés. D'après le lien avec le théorème de Thalès, SO′A′ est l'image de SOA par l'homothétie de centre S et de rapport $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Ce rapport est positif, car O′ est sur [SO). Les longueurs sont multipliées par $\frac{2}{3}$, donc $O'A' = \frac{2}{3} \times 4{,}5 = 3$ cm.

(c) $V = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times SO = \frac{1}{3} \times \pi \times 4{,}5^2 \times 6 = 40{,}5\pi$ cm³. Le volume du verre est de $40{,}5\pi$ cm³, soit environ 127,2 cm³.

(d) Son affirmation est fausse. Le cône de jus est l'image du verre par l'homothétie de centre S et de rapport $\frac{2}{3}$, et une homothétie multiplie les volumes par $|k|^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, et non par $\frac{2}{3}$.
Donc $V_{\text{jus}} = \frac{8}{27} \times 40{,}5\pi = 12\pi$ cm³. Contrôle : $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$. Le verre contient environ 37,7 cm³ de jus (et non $27\pi \approx 84{,}8$ cm³).