Terminale maths expertes / Graphes et chaînes de Markov — corrigé

benprof
particulier.fr

1. *Sommets, arêtes, degrés et lemme des poignées de main*

Ex. 1 ★☆☆ **Lire un graphe avec une boucle**

(a) L'ordre est le nombre de sommets : A, B, C, D, E, F. L'ordre vaut 6, et non 8 : 8 est le nombre d'arêtes.

(b) On compte les 7 arêtes entre deux sommets distincts, plus la boucle : G possède 8 arêtes.

(c) Les voisins de B sont A, C et D : $d(B) = 3$.

(d) L'arête E–F compte pour 1 et la boucle compte pour 2 : $d(F) = 1 + 2 = 3$.

(e) $d(A) + d(B) + d(C) + d(D) + d(E) + d(F) = 2 + 3 + 3 + 2 + 3 + 3 = 16$, et $2 \times 8 = 16$: la somme des degrés vaut bien deux fois le nombre d'arêtes.

(f) Les sommets de degré impair sont B, C, E et F. Il y en a 4, et c'est bien un nombre pair.

Ex. 2 ★☆☆ **Calculs directs avec le lemme**

(a) K_6 a $\dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ arêtes.

(b) Dans K_4, chaque sommet est relié aux 3 autres : son degré vaut $4 - 1 = 3$.

(c) La somme des degrés vaut $6 \times 3 = 18 = 2m$, donc $m = 9$ arêtes.

(d) La somme des degrés vaut $1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 12 = 2m$, donc $m = 6$ arêtes.

(e) Un sommet a au plus 5 voisins, les autres sommets, sans boucle ni arête multiple : le degré maximal vaut $6 - 1 = 5$.

(f) On cherche n tel que $\frac{n(n-1)}{2} = 10$, soit $n(n-1) = 20 = 5 \times 4$: l'ordre vaut 5.

Ex. 3 ★★☆ **Ce graphe existe-t-il ?**

(a) La somme des degrés vaut $3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 13$, impaire. Or elle devrait valoir $2m$, un nombre pair : ce graphe n'existe pas. On peut aussi le voir ainsi : il y aurait 3 sommets de degré impair, un nombre impair.

(b) La somme vaut $14 = 2 \times 7$. On nomme les sommets A (degré 5), B (degré 3), C, D (degré 2), E, F (degré 1). Arêtes : A–B, A–C, A–D, A–E, A–F, B–C, B–D. On vérifie les degrés, et on trouve bien 7 arêtes : ce graphe existe.

Ex. 3 (suite)

(c) La somme vaut $6 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 16$, elle est paire. Mais dans un graphe simple d'ordre 6, un sommet a au plus $6 - 1 = 5$ voisins. Le degré 6 est donc impossible : ce graphe simple n'existe pas.

(d) La somme vaut 14, elle est paire, et tous les degrés sont au plus 4. Mais les trois sommets de degré 4 sont reliés à tous les autres sommets. Chacun des deux derniers sommets aurait donc au moins 3 voisins, et non 1 : ce graphe simple n'existe pas.

Ex. 4 ★★☆ **Poignées de main à Rennes**

(a) Les sommets sont les 5 personnes, et une arête relie deux personnes qui se sont serré la main. Il n'y a pas de boucle (personne ne se serre la main à soi-même) ni d'arête multiple (au plus une poignée de main par paire) : le graphe est simple, d'ordre 5.

(b) Si c'était le cas, la somme des degrés vaudrait $5 \times 3 = 15$, un nombre impair. Or, d'après le lemme des poignées de main, elle vaut $2m$, un nombre pair. Inès a tort.

(c) La somme des degrés vaut $4 + 4 \times 3 = 16 = 2m$, donc $m = 8$. Il y a eu 8 poignées de main.

(d) Le graphe est simple et d'ordre 5 : une personne a au plus $5 - 1 = 4$ voisins. Elle a donc serré au plus 4 mains. Hugo a tort.

(e) D'après le lemme des poignées de main, la somme des degrés vaut $2m$, un nombre pair. La somme des degrés pairs est paire, donc la somme des degrés impairs est paire aussi. Or une somme de nombres impairs est paire seulement s'il y a un nombre pair de termes. Le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est donc pair.

Ex. 5 ★★★ **Deux sommets de même degré**

(a) Dans un graphe simple, le degré d'un sommet est son nombre de voisins. Un sommet n'est pas voisin de lui-même (pas de boucle) et il a au plus une arête vers chacun des $n - 1$ autres sommets (pas d'arête multiple). Il a donc entre 0 et $n - 1$ voisins : $0 \leqslant d(s) \leqslant n - 1$.

Ex. 5 **(suite)**

(b) Supposons qu'un sommet u soit de degré $n-1$: il est alors voisin des $n-1$ autres sommets. Tout autre sommet v est donc voisin de u, d'où $d(v) \geqslant 1$. Ainsi, aucun sommet n'est isolé. Conclusion : G ne peut pas avoir à la fois un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n-1$.

(c) D'après la question 1, les degrés prennent leurs valeurs dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$, qui contient n valeurs. D'après la question 2, les valeurs 0 et $n-1$ ne sont pas atteintes toutes les deux. Les degrés prennent donc au plus $n-1$ valeurs distinctes pour n sommets. Par le principe des tiroirs, au moins deux sommets ont le même degré.

(d) Les sommets sont les 6 joueurs, et une arête relie deux joueurs qui se sont affrontés. Il n'y a pas de boucle (personne ne joue contre soi-même) ni d'arête multiple (au plus un match par paire) : le graphe est simple, d'ordre 6. Le degré d'un joueur est son nombre d'adversaires, compris entre 0 et $6-1=5$. D'après la question 3, deux joueurs au moins ont eu le même nombre d'adversaires.

(e) Par exemple : A–D, B–D, C–D, B–C. On obtient $d(A)=1$, $d(B)=2$, $d(C)=2$ et $d(D)=3$. Contrôle : $1+2+2+3=8=2\times 4$, soit 4 arêtes. Seuls B et C ont le même degré, ce qui répond à la question.

Ex. 6 ★★★ **Câbler un centre de données**

(a) Les sommets sont les 7 serveurs, et une arête relie deux serveurs reliés par un câble. Il n'y a ni boucle ni arête multiple, donc le graphe est simple et d'ordre 7. Le degré d'un serveur est k. Dans un graphe simple d'ordre 7, un sommet a au plus $7-1=6$ voisins, donc $k \leqslant 6$.

(b) Soit m le nombre de câbles. Les 7 sommets sont tous de degré k, donc, d'après le lemme des poignées de main, $7k = 2m$. Ainsi $7k$ est pair. Comme 7 est impair, k est pair. On a donc $k \in \{2; 4; 6\}$. Par exemple, $k=3$ est impossible, car $7\times 3 = 21$ est impair.

(c) Pour $k=4$: $2m = 7\times 4 = 28$, d'où $m = 14$ câbles. Pour $k = 6 = 7-1$, chaque serveur est relié à tous les autres : on obtient le graphe complet K_7, qui a $\frac{7\times 6}{2} = 21$ câbles.

Ex. 6 **(suite)**

(d) Les indices $i+1$, $i+2$, $i-1$ et $i-2$ sont deux à deux distincts modulo 7 : leurs différences valent 1, 2, 3 ou 4, qui ne sont pas multiples de 7. Aucun d'eux n'est congru à i, donc il n'y a pas de boucle. De plus, la relation est symétrique : si $j \equiv i \pm 1$ ou $j \equiv i \pm 2$, alors $i \equiv j \mp 1$ ou $i \equiv j \mp 2$, donc un même câble est vu des deux côtés. Chaque serveur est ainsi relié à exactement 4 autres serveurs, avec $\frac{7\times 4}{2} = 14$ câbles : 7 du type S_iS_{i+1} et 7 du type S_iS_{i+2}. Le réseau convient.

(e) Une boucle compte pour 2 dans le degré, donc $d(S_0) = 4+2 = 6$, et non 5. La somme des degrés passe de 28 à $28+2=30=2\times 15$, ce qui correspond à 15 câbles. Elle reste paire, comme le veut le lemme des poignées de main. Sacha se trompe deux fois.

Ex. 7 ★★★ **Reconstituer un graphe à partir d'indices**

(a) L'ordre d'un graphe est son nombre de sommets, et non son nombre d'arêtes. G a 6 sommets, donc il est d'ordre 6. Lina a tort : 10 est le nombre d'arêtes.

(b) D'après le lemme des poignées de main, la somme des degrés vaut $2\times 10 = 20$. En posant $c = d(C) = d(D)$, on obtient $5+4+2c+2+1 = 20$, donc $2c = 8$ et $d(C) = d(D) = 4$.

(c) G est simple et d'ordre 6, donc un sommet a au plus $6-1=5$ voisins. Comme $d(A)=5$, A est voisin des 5 autres sommets. En particulier, F est voisin de A. Comme $d(F)=1$, l'unique voisin de F est A.

(d) B n'est voisin ni de lui-même ni de F, car le seul voisin de F est A. Ses voisins possibles sont donc A, C, D et E. Comme $d(B)=4$, B est voisin de A, C, D et E. Alors E est voisin de A et de B, et $d(E)=2$: E n'a pas d'autre voisin, en particulier pas C. Les voisins possibles de C sont donc A, B et D, soit au plus 3, alors qu'il faudrait $d(C)=4$. C'est une contradiction : G n'existe pas, bien que la somme des degrés, 20, soit paire.

(e) La somme des degrés vaut $2\times 9 = 18$, donc $5+4+2c+2+1 = 18$, d'où $2c = 6$ et $d(C) = d(D) = 3$. Un exemple de graphe : A–B, A–C, A–D, A–E, A–F, B–C, B–D, B–E, C–D. On vérifie les degrés : $d(A)=5$, $d(B)=4$, $d(C)=3$, $d(D)=3$, $d(E)=2$, $d(F)=1$. Leur somme vaut $18 = 2\times 9$. Le graphe G' est simple et convient.

2. *Graphes orientés, chaînes, cycles et connexité*

Ex. 8 ★☆☆ Rues à sens unique

(a) Arcs qui partent de C : $C \to A$ et $C \to D$, donc le demi-degré sortant vaut 2. Arcs qui arrivent en C : $B \to C$ et $E \to C$, donc le demi-degré entrant vaut 2.

(b) Demi-degrés sortants : A : 1, B : 1, C : 2, D : 1, E : 1. Somme : $1+1+2+1+1=6$. C'est le nombre d'arcs, car chaque arc part d'un seul sommet.

(c) Le seul arc qui sort de A va vers B, le seul qui sort de B va vers C, et C mène seulement à A ou D. Aucun chemin de longueur 1, 2 ou 3 n'atteint donc E. Le chemin $A \to B \to C \to D \to E$ est le plus court, de longueur 4.

(d) L'arc $E \to A$ n'existe pas, mais $E \to C \to A$ est un chemin. Le plus court chemin de E vers A a donc une longueur 2, alors que celui de A vers E a une longueur 4 : on ne parcourt les arcs que dans leur sens.

(e) Le chemin revient à C, et ses six arcs $C \to D$, $D \to E$, $E \to C$, $C \to A$, $A \to B$, $B \to C$ existent et sont tous différents. C'est donc un cycle, même s'il repasse par C. Sa longueur est 6 : on compte les arcs, pas les 7 sommets écrits.

Ex. 9 ★☆☆ Sentiers entre refuges

(a) Le graphe a 6 sommets : son ordre est 6. Degrés : F : 2, G : 3, H : 2, I : 3, J : 3, K : 1. Vérification : $2+3+2+3+3+1=14=2\times 7$.

(b) La chaîne emprunte les arêtes K–I, I–J, J–G, G–F : sa longueur est 4
(elle a 5 sommets, mais on compte les arêtes).

(c) Le seul voisin de K est I, et I n'est pas adjacent à F : aucune chaîne de longueur 1 ou 2 ne relie K à F. K–I–J–F a une longueur 3, donc la distance entre K et F est 3.

(d) H–J n'est pas une arête, mais H–I–J est une chaîne de longueur 2. La distance entre H et J est 2.

(e) F–G–J–F est fermée et emprunte trois arêtes différentes (F–G, G–J, J–F) : c'est un cycle de longueur 3. En revanche, F–G–F emprunte deux fois l'arête F–G : ce n'est pas un cycle.

Ex. 10 ★★☆ Un réseau social en morceaux

(a) Non. Un graphe connexe d'ordre 7 a au moins 6 arêtes, mais la réciproque est fausse. Ici, G n'a aucune arête (degré 0) : aucune chaîne ne relie G à A, donc le graphe n'est pas connexe.

(b) A, B, C sont reliés entre eux (A–B, A–C), de même que D, E, F (D–E, D–F). Aucune arête ne relie $\{A,B,C\}$ ni $\{D,E,F\}$ à un autre sommet, et G est isolé. Il y a donc 3 groupes : $\{A,B,C\}$, $\{D,E,F\}$ et $\{G\}$.

(c) Faux. Avec C–D, les sommets A, B, C, D, E, F sont reliés entre eux. Mais G reste isolé : aucune chaîne ne relie G à A. Le graphe n'est toujours pas connexe.

(d) Une arête ajoutée relie au plus deux groupes : elle fait baisser le nombre de groupes d'au plus 1. Pour passer de 3 groupes à 1, il faut donc au moins 2 arêtes. Avec C–D et F–G, chaque sommet est relié à A : le graphe devient connexe. Le minimum est donc 2 arêtes.

Ex. 11 ★★☆ Le tramway de Brest

(a) On relie chaque sommet à H : G–H, M–H, U–H, P–M–H, S–U–H. Deux sommets quelconques sont donc reliés par une chaîne passant par H : le graphe est connexe.

(b) La distance est la longueur de la plus courte chaîne, pas d'une chaîne quelconque. Le seul voisin de G est H, dont les voisins G, M, U sont différents de S : aucune chaîne de longueur 1 ou 2 ne relie G à S. Or G–H–U–S a une longueur 3.
Donc la distance entre G et S vaut 3.

(c) Plus grande distance depuis chaque sommet : G : 3 (en P et en S) ; H : 2 (H–M–P, H–U–S) ; M : 2 (en G et en S) ; P : 3 (en G) ; S : 3 (en G) ; U : 2 (en G et en P). La plus grande distance entre deux sommets est 3 : le diamètre vaut 3.

(d) Seules les paires G–P et G–S étaient à distance 3. Maintenant, $d(G,S)=1$ et G–S–P donne $d(G,P)=2$. Ajouter une arête ne fait augmenter aucune distance. Mais G et M ne sont pas adjacents, donc $d(G,M)=2$. Le nouveau diamètre vaut 2.

Ex. 12 ★★★ Pistes cyclables à Tours

(a) A–C, C–D, D–F, F–G sont des arêtes : A–C–D–F–G est une chaîne de longueur 4. A–B, B–C, C–D, D–E, E–F, F–G sont des arêtes : A–B–C–D–E–F–G est une chaîne de longueur 6
(elle a 7 sommets, mais on compte les arêtes).

Ex. 12 **(suite)**

(b) Les voisins de A sont B et C (distance 1). Le seul nouveau sommet adjacent à B ou à C est D (distance 2). Les nouveaux voisins de D sont E et F (distance 3). Le seul voisin de G est F, donc G n'est atteint qu'à l'étape suivante. Aucune chaîne de longueur 1, 2 ou 3 ne relie A à G, et la chaîne A–C–D–F–G a une longueur 4. La distance entre A et G est donc 4.

(c) On fait le même raisonnement depuis chaque sommet. Depuis A : 4 (atteinte en G). Depuis B : 4 (atteinte en G, car B joue le même rôle que A). Depuis C : A, B, D à 1, E, F à 2, G à 3, donc 3. Depuis D : C, E, F à 1, A, B, G à 2, donc 2. Depuis E : D, F à 1, C, G à 2, A, B à 3, donc 3. Depuis F : D, E, G à 1, C à 2, A, B à 3, donc 3. Depuis G : 4 (atteinte en A et en B). Le diamètre est la plus grande de ces distances, il vaut donc 4.

(d) On ajoute par exemple la piste A–G. Plus grande distance depuis chaque sommet : depuis A, 3 (en E) ; depuis B, 3 (en E et en F, car B–A–G–F et B–C–D–E) ; depuis C, 2 ; depuis D, 2 ; depuis E, 3 ; depuis F, 3 (en B) ; depuis G, 2 (G–A–B, G–A–C, G–F–D, G–F–E). Toutes les distances valent au plus 3, donc le nouveau graphe a un diamètre au plus égal à 3. La piste C–G convient aussi.

Ex. 13 ★★★ **Tapis roulants à l'aéroport de Nantes**

(a) $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to E$, $E \to F$ sont des arcs, donc $A \to B \to C \to D \to E \to F$ est un chemin de A vers F. Il emprunte 5 arcs : sa longueur est 5.

(b) Non. Les seuls arcs qui partent de D, E ou F sont $D \to E$, $E \to F$ et $F \to D$: ils arrivent tous dans $\{D, E, F\}$. Depuis F, on ne peut donc atteindre que D, E et F. Il n'existe aucun chemin de F vers A. Dans un graphe orienté, un arc ne se parcourt que dans son sens.

(c) Depuis B, le seul arc sortant est $B \to C$. Depuis C, on va en A ou en D. Depuis D, le seul arc sortant est $D \to E$, puis $E \to F$. Le plus court chemin est $B \to C \to D \to E \to F$, de longueur 4. Il n'y a pas d'arc $E \to D$: l'arc $D \to E$ ne se parcourt que de D vers E. Le seul arc qui part de E est $E \to F$, puis $F \to D$. Le plus court chemin de E vers D est donc $E \to F \to D$, de longueur 2.

Ex. 13 **(suite)**

(d) Aucun arc ne va de $\{D, E, F\}$ vers $\{A, B, C\}$, il faut donc en ajouter un. On ajoute par exemple $F \to A$. Alors $A \to B \to C \to D \to E \to F \to A$ est un chemin fermé qui passe par les six zones. Depuis n'importe quelle zone, on suit ce chemin jusqu'à la zone voulue. Chaque zone peut donc atteindre toutes les autres. Tout arc de D, E ou F vers A, B ou C convient aussi.

(e) Soit un chemin d'un sommet $X \neq G$ vers G. Ce chemin a une longueur au moins 1. Son dernier arc est donc un arc $Y \to G$ qui arrive en G. Le demi-degré entrant de G serait alors au moins 1, ce qui contredit l'hypothèse. Aucun chemin ne mène donc d'un autre sommet à G.

Ex. 14 ★★★ **Les salles d'un musée à Toulouse**

(a) Le seul voisin de V est N. Un cycle qui passerait par V y arriverait et en repartirait par deux arêtes distinctes : c'est impossible, car V n'en a qu'une. Aucun cycle n'emprunte donc N–V. Comme W n'a aucune arête, un cycle utilise au plus les 6 autres arêtes. Or K–L–N–K–H–J–K est fermée et emprunte ces 6 arêtes une seule fois : c'est un cycle (repasser par K est permis). La plus grande longueur d'un cycle est donc 6.

(b) W n'apparaît dans aucune arête : c'est un sommet isolé. Aucune chaîne ne relie W à H, donc le graphe n'est pas connexe. Les arêtes K–H, K–J, K–L, K–N et la chaîne K–N–V montrent que H, J, L, N, V sont reliées à K : ce sont toutes les salles sauf W.

(c) Les 7 portes relient toutes des salles parmi H, J, K, L, N, V. Un graphe connexe d'ordre 6 a au moins $6 - 1 = 5$ arêtes, donc on ne peut pas fermer plus de $7 - 5 = 2$ portes. On peut en fermer 2, par exemple H–J et K–L. Il reste H–K, J–K, K–N, L–N, N–V, et chaque salle reste reliée à K : H–K, J–K, N–K, L–N–K, V–N–K. Le musée peut donc fermer au maximum 2 portes.

(d) Si W est relié à la seule salle X, toute chaîne qui part de W commence par W–X.
Donc $d(W, Y) = 1 + d(X, Y)$ pour toute salle $Y \neq X$. Plus grande distance depuis chaque salle (sans W) : K : 2 (en V) ; L : 2 (L–K–H, L–K–J, L–N–V) ; N : 2 (en H et en J) ; H et J : 3 (en V, car le seul voisin de V est N, qui n'est adjacent ni à H ni à J) ; V : 3 (en H). Il faut donc relier W à K, à L ou à N. La plus grande distance entre W et une autre salle vaut alors $1 + 2 = 3$.

3. Chaînes et cycles eulériens

Ex. 15 ★☆☆ **Les allées d'un jardin à Nantes**

(a) Le graphe a 6 sommets : il est d'ordre 6. Il a 8 arêtes.

(b) $d(P) = 2$, $d(Q) = 3$, $d(R) = 3$, $d(S) = 4$, $d(T) = 2$, $d(U) = 2$.

(c) $2 + 3 + 3 + 4 + 2 + 2 = 16 = 2 \times 8$: la somme des degrés vaut bien deux fois le nombre d'arêtes.

(d) La chaîne P–Q–S–T–U et l'arête P–R relient P à tous les autres sommets. Deux sommets quelconques sont donc reliés par une chaîne qui passe par P : le graphe est connexe.

(e) Deux sommets sont de degré impair : Q et R. Le graphe est connexe, donc d'après le théorème d'Euler il admet une chaîne eulérienne non fermée, d'extrémités Q et R. Il n'admet pas de cycle eulérien.

(f) Non. Une chaîne eulérienne a pour extrémités les deux sommets de degré impair, Q et R. Elle doit donc partir de Q ou de R, et pas de S, qui est de degré 4.

(g) Par exemple Q–P–R–Q–S–T–U–S–R. Elle emprunte Q–P, P–R, R–Q, Q–S, S–T, T–U, U–S, S–R : ce sont les 8 arêtes, chacune une fois.

Ex. 16 ★☆☆ **Cycle, chaîne ou rien ?**

(a) Le graphe est connexe et tous ses degrés sont pairs : d'après le théorème d'Euler, il admet un cycle eulérien. Il a $\frac{2+4+2+4+2}{2} = 7$ arêtes, donc le cycle est de longueur 7.

(b) Le graphe est connexe et a exactement deux sommets de degré impair : ceux de degré 3. D'après le théorème d'Euler, il n'a pas de cycle eulérien, mais il admet une chaîne eulérienne qui va de l'un de ces deux sommets à l'autre. Il a $\frac{2+3+2+4+2+3+2}{2} = 9$ arêtes : la chaîne est de longueur 9.

(c) La chaîne V–W–X–Y–Z passe par tous les sommets : le graphe est connexe. $d(V) = 2$, $d(W) = 2$, $d(X) = 4$, $d(Y) = 2$, $d(Z) = 2$: tous les degrés sont pairs. D'après le théorème d'Euler, il admet un cycle eulérien, par exemple V–W–X–Y–Z–X–V, qui emprunte les 6 arêtes une fois chacune.

(d) Tous les degrés valent 2, mais le graphe n'est pas connexe : aucune chaîne ne passe d'un triangle à l'autre. Le théorème d'Euler ne s'applique pas, et le graphe n'admet ni cycle ni chaîne eulérienne.

Ex. 16 (suite)

(e) Le graphe est connexe : A–B–C–D passe par tous les sommets. $d(A) = 1$, $d(B) = 3$, $d(C) = 2$, $d(D) = 2$: exactement deux sommets impairs, A et B. Il admet une chaîne eulérienne de A à B, par exemple A–B–C–D–B, qui emprunte les 4 arêtes.

(f) Les sommets de degré impair sont les quatre sommets de degré 3. Le graphe est connexe et a 4 sommets impairs : d'après le théorème d'Euler, il n'admet ni cycle ni chaîne eulérienne.

Ex. 17 ★★☆ **Les pistes cyclables d'Annecy**

(a) Un cycle eulérien emprunte chaque arête une fois, pas seulement chaque sommet. Le parcours de Malo n'emprunte que 6 des 8 pistes : il oublie B–C et D–E. Ce n'est donc pas un cycle eulérien.

(b) Le graphe est connexe : la chaîne A–B–D–F–E–C passe par tous les sommets. $d(A) = 2$, $d(B) = 3$, $d(C) = 3$, $d(D) = 3$, $d(E) = 3$, $d(F) = 2$. Il y a 4 sommets de degré impair (B, C, D, E), donc le réseau n'admet aucune chaîne eulérienne.

(c) La nouvelle piste ajoute 1 au degré de B et à celui de E : $d(B) = 4$ et $d(E) = 4$. Le graphe reste connexe et seuls C et D sont de degré impair. D'après le théorème d'Euler, le nouveau réseau admet une chaîne eulérienne d'extrémités C et D.

(d) Par exemple C–A–B–C–E–B–D–E–F–D. Elle emprunte C–A, A–B, B–C, C–E, E–B, B–D, D–E, E–F, F–D : ce sont les 9 pistes, chacune une fois.

(e) Une piste change la parité du degré de ses deux extrémités seulement. Avec 4 sommets impairs au départ, il en reste donc au moins 2 : une seule piste ne suffit pas. Deux pistes suffisent, par exemple B–E et C–D : tous les degrés deviennent pairs (2, 4, 4, 4, 4, 2) dans un graphe connexe. Il faut donc créer au minimum 2 pistes.

Ex. 18 ★★☆ **La tournée d'Inès à Colmar**

(a) La chaîne L–M–R–O–S–N passe par tous les sommets : le graphe est connexe. $d(L) = 2$, $d(M) = 4$, $d(N) = 4$, $d(O) = 4$, $d(R) = 2$, $d(S) = 2$.

(b) Oui. Le graphe est connexe et tous ses sommets sont de degré pair : d'après le théorème d'Euler, il admet un cycle eulérien. Ce cycle passe par L, donc Inès peut le commencer et le finir en L.

Ex. 18 **(suite)**

(c) Par exemple L–M–R–O–M–N–O–S–N–L. Il emprunte L–M, M–R, R–O, O–M, M–N, N–O, O–S, S–N, N–L : ce sont les 9 rues, chacune une fois, et il revient en L.

(d) Sans la rue M–N, on a $d(M) = 3$ et $d(N) = 3$, les autres degrés ne changent pas. Le graphe reste connexe (la chaîne L–M–R–O–S–N n'utilise pas M–N). Il a exactement deux sommets impairs, M et N : la chaîne eulérienne va de M à N. Elle ne peut pas partir de L, donc Inès ne peut pas partir de la poste.

(e) Inès doit partir de M (ou de N). Par exemple M–L–N–O–M–R–O–S–N. Ce parcours emprunte M–L, L–N, N–O, O–M, M–R, R–O, O–S, S–N : les 8 rues ouvertes, chacune une fois.

Ex. 19 ★★★ **Les portes d'un musée à Lyon**

(a) La chaîne A–B–E–F–D–C passe par les six sommets : deux sommets quelconques sont reliés par une partie de cette chaîne, donc le graphe est connexe. Degrés : $d(A) = 3$, $d(B) = 3$, $d(C) = 4$, $d(D) = 3$, $d(E) = 2$, $d(F) = 3$ (somme $18 = 2 \times 9$, on a bien 9 arêtes). Le graphe est connexe et a quatre sommets de degré impair, A, B, D et F. D'après le théorème d'Euler, il n'a ni cycle ni chaîne eulérienne : aucun visiteur ne peut franchir chaque porte une fois et une seule.

(b) Ajouter une arête change la parité du degré de ses deux extrémités, et d'elles seules. Si les deux salles sont paires, on passe à 6 sommets impairs. Si l'une est paire et l'autre impaire, il en reste 4. Pour descendre à 2, il faut deux sommets impairs : la porte relie deux salles parmi A, B, D, F. Or A–B, A–D et D–F existent déjà. Il reste trois choix : A–F, B–D ou B–F. Le graphe reste connexe, donc chacun de ces choix permet une chaîne eulérienne.

(c) Avec B–D, on a $d(B) = 4$ et $d(D) = 4$: seuls A et F restent de degré impair. Le graphe est connexe : il existe donc une chaîne eulérienne, qui part obligatoirement de l'un de ces deux sommets et finit à l'autre. Par exemple A–B–E–F–D–B–C–A–D–C–F. Elle emprunte A–B, B–E, E–F, F–D, D–B, B–C, C–A, A–D, D–C et C–F, soit les 10 portes, chacune une fois. Le parcours part de A et arrive en F.

Ex. 19 **(suite)**

(d) Pour obtenir un cycle eulérien, il faut que les quatre sommets impairs A, B, D, F deviennent pairs : les deux portes doivent les regrouper deux par deux. Avec des salles qui ne communiquent pas encore, le seul choix est A–F et B–D (car A–B, D–F et A–D existent déjà). Le graphe est alors connexe et tous ses degrés sont pairs : il admet un cycle eulérien, et on peut le faire partir de n'importe quel sommet, E compris. Par exemple E–F–D–B–C–A–D–C–F–A–B–E, qui emprunte les 11 portes une fois chacune. Zoé a raison.

Ex. 20 ★★★ **Graphes complets et parité**

(a) Chaque sommet est adjacent aux $n - 1$ autres : il est de degré $n - 1$. D'après le lemme des poignées de main, la somme des degrés vaut deux fois le nombre d'arêtes : $n(n-1) = 2m$, donc $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Par exemple, K_5 a 10 arêtes et K_6 en a 15.

(b) K_n est connexe. Si n est impair, tous les sommets ont le degré pair $n - 1$: il y a 0 sommet impair, donc un cycle eulérien d'après le théorème d'Euler. Si n est pair, les n sommets sont tous impairs. Comme $n \geqslant 4$, cela fait au moins 4 sommets impairs : ni cycle ni chaîne eulérienne. Et quand n est impair, il y a 0 sommet impair et non 2. Donc, pour $n \geqslant 3$, K_n n'a jamais de chaîne eulérienne non fermée. Il a un cycle eulérien si et seulement si n est impair.

(c) Par exemple 1–2–3–4–5–1–3–5–2–4–1. Il emprunte 1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–1, 1–3, 3–5, 5–2, 2–4 et 4–1. Ce sont 10 arêtes distinctes : ce sont toutes les arêtes de K_5. Le cycle revient à son départ 1, c'est donc un cycle eulérien.

(d) Dans K_6, les 6 sommets sont de degré 5, donc impairs. Retirer une arête change la parité de ses deux extrémités seulement : il reste 4 sommets impairs, donc aucune chaîne eulérienne. Si l'on retire deux arêtes qui ont une extrémité commune, ce sommet change deux fois de parité et reste impair : il reste encore 4 sommets impairs. Il faut donc deux arêtes sans extrémité commune, par exemple 1–2 et 3–4. Alors 1, 2, 3, 4 sont de degré 4 et 5, 6 de degré 5. Le graphe reste connexe, car 5 est adjacent à tous les autres sommets. Il a exactement deux sommets impairs : il admet une chaîne eulérienne de 5 à 6, de longueur $15 - 2 = 13$.

Ex. 21 ★★★ **Le chasse-neige de Briançon**

(a) Les degrés valent $d(D) = d(E) = d(F) = 2$, $d(G) = 3$, $d(H) = 2$, $d(I) = 3$, $d(J) = 2$: seuls G et I sont bien impairs. Mais aucune rue ne relie un carrefour de $\{D, E, F\}$ à un carrefour de $\{G, H, I, J\}$: le graphe n'est pas connexe. Le théorème d'Euler ne s'applique pas. Une chaîne partie de G ne peut jamais emprunter D–E, par exemple. Il n'y a donc pas de chaîne eulérienne : Lucas a tort.

(b) Chaque pont relie les deux parties, donc le graphe devient connexe dans les deux cas. Ajouter une arête change la parité de ses deux extrémités seulement. Avec E–G : $d(E) = 3$ et $d(G) = 4$, donc les sommets impairs sont E et I. Il y en a exactement deux, donc il existe une chaîne eulérienne. Avec F–H : $d(F) = 3$ et $d(H) = 3$, donc les sommets impairs sont F, G, H et I. Il y en a quatre : ni chaîne ni cycle eulérien. Il faut rouvrir le pont E–G.

(c) Après réouverture de E–G, le graphe est connexe et a exactement deux sommets impairs, E et I. Tous les degrés ne sont pas pairs, donc il n'y a pas de cycle eulérien. Une chaîne eulérienne commence obligatoirement en E ou en I. Or $d(D) = 2$ est pair, donc D n'est pas une extrémité possible. Le chasse-neige ne peut pas partir du dépôt.

(d) Par exemple E–D–F–E–G–H–I–J–G–I. Il emprunte E–D, D–F, F–E, E–G, G–H, H–I, I–J, J–G et G–I, soit 9 rues distinctes : les 8 rues et le pont. Il repasse deux fois par E et par G, ce qui est permis : seules les arêtes doivent être empruntées une seule fois. C'est une chaîne eulérienne de E à I, de longueur 9.

4. *Matrice d'adjacence et chemins comptés avec M^n*

Ex. 22 ★☆☆ **Les refuges de Gap**

(a) Le graphe a 5 sommets, donc il est d'ordre 5. Il a 6 arêtes.

(b)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Le graphe n'est pas orienté : une arête i–j est aussi une arête j–i. On a donc $m_{ij} = m_{ji}$ pour tous i et j, ce qui veut dire que M est symétrique.

Ex. 22 (suite)

(d) La ligne de D est $(0\ 1\ 1\ 0\ 1)$ et la somme de ses coefficients vaut 3. C'est le degré de D : trois sentiers partent du refuge D.

(e) $(M^2)_{14} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 2$. D'après le théorème, il y a 2 chemins de longueur 2 de A à D : A–B–D et A–C–D.

(f) $(M^2)_{11} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 2$. Ce sont les allers-retours A–B–A et A–C–A. On retrouve le degré de A, qui vaut 2.

(g) Non. $(M^2)_{15} = 0$ dit seulement qu'il n'existe aucun chemin de longueur exactement 2 de A à E. Le chemin A–B–D–E, de longueur 3, relie bien A à E.

Ex. 23 ★★☆ **Sens uniques à Nantes**

(a) Les 7 arcs sont $A \to B$, $A \to C$, $B \to C$, $C \to A$, $C \to D$, $D \to B$ et $D \to D$.

(b) On a $m_{12} = 1$ mais $m_{21} = 0$: il y a un arc $A \to B$ et aucun arc $B \to A$. M n'est donc pas symétrique, alors que la matrice d'un graphe non orienté l'est toujours.

(c) Un coefficient de la diagonale compte les boucles : $m_{44} = 1$ indique une boucle $D \to D$, c'est-à-dire une rue qui part de D et y revient.

(d) La ligne de C est $(1\ 0\ 0\ 1)$ et sa somme vaut 2 : le degré sortant de C est 2 (arcs $C \to A$ et $C \to D$).

(e) On fait chaque produit ligne par colonne et on obtient
$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Non. M^2 se calcule ligne par colonne : ce n'est pas la matrice des carrés des coefficients. Par exemple, $(M^2)_{11} = 1$ alors que $m_{11} = 0$, donc $M^2 \neq M$.

(g) $(M^2)_{32} = 2$: d'après le théorème, il y a 2 chemins de longueur 2 de C à B. Ce sont $C \to A \to B$ et $C \to D \to B$.

Ex. 24 ★★☆ **Un réseau d'amis**

(a) Comme $M^2 = M \times M$, la ligne A de M^2 est la somme des lignes de M des voisins de A, ici B et C : $(1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0) + (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) = (2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$.

(b) La colonne E de M est $(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$. On a $(M^3)_{15} = 2 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 1$. D'après le théorème, il y a un seul chemin de longueur 3 de A à E : A–C–D–E.

Ex. 24 **(suite)**

(c) On a $m_{15} = 0$ et $(M^2)_{15} = 0$: il n'existe aucun chemin de longueur 1 ni de longueur 2 de A à E. Comme $(M^3)_{15} = 1 \neq 0$, le plus petit n tel que $(M^n)_{15} \neq 0$ est 3. La distance entre A et E vaut donc 3.

(d) En Python, les indices commencent à 0 : A a l'indice 0 et E l'indice 4. Noé doit taper print(M3[0][4]), qui affiche 1.

Ex. 25 ★★☆ **Triangles dans un club d'échecs**

(a) Vrai. On a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(M^2)_{24} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 2$. D'après le théorème, il y a 2 chemins de longueur 2 de B à D : B–A–D et B–C–D.

(b) Faux. La ligne A de M^2 est (3 1 2 1), donc $(M^3)_{11} = 3 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 4$. Mais chaque triangle est parcouru dans les deux sens : A–B–C–A, A–C–B–A, A–C–D–A et A–D–C–A. A appartient donc à $4 \div 2 = 2$ triangles.

(c) Vrai. La diagonale de M^3 est (4 2 4 2), de somme 12. Chaque triangle est compté 6 fois (trois sommets de départ, deux sens), donc il y a $12 \div 6 = 2$ triangles : ABC et ACD.

(d) Faux. $(M^2)_{13} = 2$ ne compte que les chemins de longueur exactement 2 (A–B–C et A–D–C). Il faut y ajouter $m_{13} = 1$, le chemin A–C de longueur 1. Il y a donc $1 + 2 = 3$ chemins de longueur au plus 2 de A à C.

Ex. 26 ★★★ **Pistes cyclables de l'île de Ré**

(a) Ordre A, B, C, D, E ; m_{ij} est le nombre de pistes entre i et j : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le graphe est non orienté : chaque piste i–j donne $m_{ij} = 1$ et $m_{ji} = 1$. Elle est donc comptée deux fois dans la somme des coefficients. Cette somme vaut $2 + 3 + 3 + 2 + 2 = 12 = 2 \times 6$, et il y a bien 6 pistes. C'est le lemme des poignées de main : la somme des degrés vaut le double du nombre d'arêtes.

Ex. 26 **(suite)**

(b) La ligne i de M^2 est la somme des lignes de M des voisins de i. Par exemple, la ligne A est (1 0 1 0 1) + (1 0 1 0 0) = (2 0 2 0 1). On obtient $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. D'après le théorème, $(M^2)_{ij}$ est le nombre de chemins de longueur 2 de i à j. Les couples de sommets distincts non adjacents sont A et C, A et E, B et D, D et E. Pour eux, $(M^2)_{ij}$ vaut 2, 1, 2 et 1, et jamais 0. Deux villages distincts sont donc toujours à distance 1 ou 2. Or $m_{AC} = 0$ et $(M^2)_{AC} = 2 \neq 0$, donc $d(A, C) = 2$. Le diamètre, qui est la plus grande distance, vaut 2.

(c) Le graphe est non orienté : un chemin de longueur 2 de i à j, parcouru à l'envers, est un chemin de longueur 2 de j à i.
Donc $(M^2)_{ij} = (M^2)_{ji}$ et M^2 est symétrique. Comme $M^4 = M^2 \times M^2$, $(M^4)_{AA}$ est la ligne A de M^2 multipliée par la colonne A de M^2. Par symétrie, cette colonne a les mêmes coefficients que la ligne A.
Donc $(M^4)_{AA} = 2 \times 2 + 0 \times 0 + 2 \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 9$. D'après le théorème, il y a 9 chemins de longueur 4 qui partent de A et y reviennent.

(d) $(M^3)_{ii}$ est la ligne i de M^2 multipliée par la colonne i de M. Ainsi $(M^3)_{AA} = 2 \times 0 + 0 \times 1 + 2 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$ et $(M^3)_{BB} = 0 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 2$. De même, $(M^3)_{CC} = 2$, $(M^3)_{DD} = 0$ et $(M^3)_{EE} = 2$. Le graphe n'a pas de boucle. Un chemin fermé de longueur 3, i–j–k–i, passe donc par trois sommets distincts deux à deux : c'est un triangle. Réciproquement, un triangle donne 6 chemins fermés de longueur 3 : 3 sommets de départ possibles et 2 sens de parcours. Le nombre de triangles est donc $\frac{0+2+2+0+2}{6} = 1$. Le seul triangle est B–C–E.

Ex. 27 ★★★ **Le visiteur du musée de Lyon**

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, ligne par colonne, $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. D'après le théorème, $(M^2)_{AA} = 3$ est le nombre de chemins de longueur 2 de A à A. Ce sont les parcours de 2 minutes qui ramènent Malik en A : A–B–A, A–C–A et A–D–A.

Ex. 27 **(suite)**

(b) Chaque salle a 3 portes. À chaque minute, Malik a donc 3 choix, quelle que soit sa salle. Par le principe multiplicatif, il y a 3^n chemins de longueur n qui partent de A. Chacun arrive en A, B, C ou D. On a donc $3^n = (M^n)_{AA} + (M^n)_{AB} + (M^n)_{AC} + (M^n)_{AD}$, c'est-à-dire $u_n + 3v_n = 3^n$.

(c) $u_{n+1} = (M^n \times M)_{AA}$ est la ligne A de M^n multipliée par la colonne A de M. On obtient $u_n \times 0 + v_n \times 1 + v_n \times 1 + v_n \times 1 = 3v_n$. Comme $3v_n = 3^n - u_n$, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 3^n - u_n$.

(d) On note $P(n)$: « $u_n = \frac{3^n + 3\times(-1)^n}{4}$ ». Initialisation : $u_1 = m_{AA} = 0$ et $\frac{3-3}{4} = 0$, donc $P(1)$ est vraie. Hérédité : supposons $P(n)$ vraie. Alors $u_{n+1} = 3^n - \frac{3^n+3(-1)^n}{4} = \frac{3\times 3^n - 3(-1)^n}{4} = \frac{3^{n+1}+3(-1)^{n+1}}{4}$, donc $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

(e) $u_6 = \frac{729+3}{4} = 183$ et $v_6 = \frac{3^6 - u_6}{3} = \frac{729-183}{3} = 182$. Il y a 183 parcours de 6 minutes qui finissent en A et 182 qui finissent en B. Malik a donc un parcours de plus pour finir en A.

Ex. 28 ★★★ **Le jeu de plateau de Lille**

(a) $m_{AB} = 1$ mais $m_{BA} = 0$: il y a une flèche $A \to B$, mais pas de flèche $B \to A$. Le graphe est orienté et M n'est pas symétrique. Le coefficient $m_{BB} = 1$ est sur la diagonale. Il correspond à une boucle $B \to B$: depuis B, le pion peut rester sur B en un coup.

(b) Une ligne donne les flèches qui partent d'un sommet. Une colonne donne les flèches qui y arrivent. La ligne D est $(1\ 0\ 0\ 0)$: une seule flèche part de D ($D \to A$). Les deux 1 de la colonne D correspondent aux flèches $B \to D$ et $C \to D$, qui arrivent en D. Hugo a tort. Le nombre d'arcs est la somme de tous les coefficients : $2 + 2 + 2 + 1 = 7$, boucle $B \to B$ comprise.

(c) La ligne i de M^2 est la somme des lignes de M des successeurs de i. On obtient $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. De même, avec $M^3 = M \times M^2$, on obtient $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ex. 28 **(suite)**

(d) En Python, les indices commencent à 0 : l'indice 0 correspond à A et l'indice 3 à D. Le programme affiche donc $(M^3)_{AD} = 1$. D'après le théorème, il existe un seul chemin de longueur 3 de A à D : $A \to B \to B \to D$. Le pion utilise la boucle sur B.

(e) L'instruction est `print(produit(M3, M)[0][3])`. D'après le théorème, $(M^4)_{AD}$ est le produit de la ligne A de M^3 par la colonne D de M : $2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 3$. Il y a 3 chemins de longueur 4 de A à D : $A \to B \to B \to B \to D$, $A \to C \to A \to B \to D$ et $A \to C \to A \to C \to D$.

5. *Graphe probabiliste et matrice de transition*

Ex. 29 ★☆☆ **Lire une matrice de transition 3 × 3**

(a) On cherche la probabilité de passer de L (état 1) à T (état 2). C'est $p_{12} = 0{,}8$.

(b) p_{21} est la probabilité de passer de T (état 2) à L (état 1) : celle d'être sur la lavande juste après avoir été sur le trèfle. $p_{21} = 0{,}35$.

(c) Chaque coefficient non nul donne un arc : $L \to L$ (0,2), $L \to T$ (0,8), $T \to L$ (0,35), $T \to T$ (0,4), $T \to R$ (0,25), $R \to R$ (1). Les arcs $L \to R$, $R \to L$ et $R \to T$ n'existent pas, car leur coefficient est nul.

(d) $0{,}35 + 0{,}4 + 0{,}25 = 1$. Les probabilités de départ de T somment bien à 1.

(e) Non. La ligne R de P est $(0\ \ 0\ \ 1)$: $p_{31} = p_{32} = 0$ et $p_{33} = 1$. Sur le graphe, le seul arc qui part de R est sa boucle, de poids 1. Une fois à la ruche, l'abeille y reste à coup sûr.

(f) Ce n'est pas une anomalie. Dans une matrice de transition, ce sont les lignes (états de départ) qui somment à 1. Une colonne regroupe les arrivées en L depuis des états différents : sa somme peut valoir n'importe quoi. Ici, $0{,}2 + 0{,}35 + 0 = 0{,}55$.

Ex. 30 ★☆☆ **Compléter un graphe probabiliste**

(a) La somme des poids qui partent d'un sommet vaut 1. Boucle en V : $1 - 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}65$. Arc $B \to M$: $1 - 0{,}45 - 0{,}35 = 0{,}2$.

(b) Il n'y a pas de boucle en M, donc $p_{33} = 0$. L'arc $M \to B$ vaut $1 - 0{,}5 - 0 = 0{,}5$.

(c) $P = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0{,}45 & 0{,}35 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$. Chaque ligne somme à 1.

Ex. 30 (suite)

(d) $p_{32} = 0{,}5$. C'est la probabilité que Sami prenne le bus le lendemain d'un jour où il est venu à pied.

(e) Il a tort. Passer du vélo au bus a la probabilité $p_{12} = 0{,}25$. Passer du bus au vélo a la probabilité $p_{21} = 0{,}45$. Ces deux probabilités sont différentes.

Ex. 31 ★★☆ Deux opérateurs : de l'arbre à la matrice

(a) La branche A (probabilité a_n) se divise en A (0,85) et B (0,15). La branche B (probabilité b_n) se divise en A (0,08) et B (0,92). Les deux branches issues d'un même nœud ont des poids de somme 1.

(b) $P = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}08 & 0{,}92 \end{pmatrix}$. « 15 % des abonnés de A passent chez B » donne la probabilité d'aller de A vers B, c'est-à-dire p_{12} : ligne 1 (départ A), colonne 2 (arrivée B). Le reste de la ligne vient du complément à 1.

(c) $\pi_1 = \pi_0 P$ avec $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. $a_1 = 0{,}6 \times 0{,}85 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}542$ et $b_1 = 0{,}6 \times 0{,}15 + 0{,}4 \times 0{,}92 = 0{,}458$.
Donc $\pi_1 = \begin{pmatrix} 0{,}542 & 0{,}458 \end{pmatrix}$: au mois 1, 54,2 % des clients sont chez A.

(d) D'après la formule des probabilités totales, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}08b_n$. Comme $b_n = 1 - a_n$, on obtient $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}08 - 0{,}08a_n$, soit $a_{n+1} = 0{,}77a_n + 0{,}08$. Contrôle : $0{,}77 \times 0{,}6 + 0{,}08 = 0{,}542 = a_1$.

Ex. 32 ★★☆ L'erreur d'Inès : lignes ou colonnes ?

(a) Lignes : $0{,}3 + 0{,}7 + 0{,}6 = 1{,}6$; $0{,}5 + 0 + 0 = 0{,}5$; $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}9$. Colonnes : $0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1$; $0{,}7 + 0 + 0{,}3 = 1$; $0{,}6 + 0 + 0{,}4 = 1$. Dans une matrice de transition, chaque ligne somme à 1. Ce n'est pas le cas ici, donc M n'est pas une matrice de transition.

(b) Inès a rangé les départs en colonnes au lieu de les ranger en lignes : M est la transposée de la bonne matrice. Avec la ligne i pour l'état de départ, on obtient $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Chaque ligne somme à 1.

(c) Elle a tort. La probabilité de passer de L à S est $p_{12} = 0{,}5$. Le nombre 0,7 est p_{21}, la probabilité de passer de S à L : lire après une soirée de sport.

(d) C'est vrai. La probabilité de lire le soir suivant est $p_{11} = 0{,}3$ après L, $p_{21} = 0{,}7$ après S et $p_{31} = 0{,}6$ après J : c'est la colonne L de P, qui regroupe les arrivées en L. Ces trois valeurs sont toutes supérieures ou égales à 0,3. L'affirmation est donc vraie.

Ex. 33 ★★★ Vélos en libre-service : la matrice du rapport

(a) Les lignes de Q somment à $0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}8$, à $0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}3 = 1{,}2$ et à $0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}6 = 1$. Une matrice de transition a toutes ses lignes de somme 1, donc Q n'en est pas une. Dans Q, les départs sont en colonne. On a donc $p_{ij} = q_{ji}$, c'est-à-dire $P = Q^T$ (la transposée) : $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Contrôle : chaque ligne somme à 1.

(b) La ligne G contient les départs de G, lus dans l'ordre $(G\,;N\,;H)$: 0,6 ; 0,2 ; 0,2. Ligne N : 0,3 ; 0,5 ; 0,2. Ligne H : 0,3 ; 0,1 ; 0,6.
Donc $P' = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Il faut permuter à la fois les lignes et les colonnes.

(c) La probabilité cherchée est le coefficient (H, G) de P^2. C'est la ligne H de P multipliée par la colonne G de P : $0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}03 + 0{,}18 + 0{,}18 = 0{,}39$. Avec P' : la ligne H $(0{,}3\,;0{,}1\,;0{,}6)$ fois la colonne G $(0{,}6\,;0{,}3\,;0{,}3)$ donne $0{,}18 + 0{,}03 + 0{,}18 = 0{,}39$. Conclusion : la probabilité vaut 0,39, quel que soit l'ordre choisi.

(d) Faux. On lit la ligne G de P : $p_{GG} = 0{,}6 > 0{,}5$, donc la première partie est vraie. En revanche, $p_{GH} = 0{,}2$ et non 0,3. Le nombre 0,3 est $q_{GH} = p_{HG}$: c'est la probabilité d'aller des Halles vers la Gare. Kenza a lu la ligne G de Q au lieu de sa colonne. L'affirmation est donc fausse.

(e) $\pi_1 = \pi_0 P$. Coefficient N : $0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}30$. Coefficient G : $0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}42$. Coefficient H : $0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}28$.
Donc $\pi_1 = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}42 & 0{,}28 \end{pmatrix}$, et la somme vaut bien 1.

Ex. 34 ★★★ Streaming : retrouver un taux de résiliation

(a) Chaque ligne somme à 1 et la boucle est le complément. Ligne P : $1 - 0{,}10 - 0{,}05 = 0{,}85$, ce qui donne $(0{,}85\,;0{,}10\,;0{,}05)$. Ligne S : $(0{,}2\,;0{,}8 - x\,;x)$. Ligne R : un résilié reste résilié, d'où $(0\,;0\,;1)$.
Donc $T = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 - x & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les coefficients doivent être dans $[0\,;1]$: $x \geq 0$ et $0{,}8 - x \geq 0$. On a donc $0 \leq x \leq 0{,}8$.

Ex. 34 (suite)

(b) Premier niveau, partant de S : P $(0{,}2)$, S $(0{,}8-x)$, R (x). Second niveau, on va en P avec 0,85 depuis P, 0,2 depuis S et 0 depuis R. D'après la formule des probabilités totales, $p(X_2=P)=0{,}2\times 0{,}85+(0{,}8-x)\times 0{,}2+x\times 0=0{,}17+0{,}16-0{,}2x=0{,}33-0{,}2x$.

(c) On résout $0{,}33-0{,}2x=0{,}3$, d'où $0{,}2x=0{,}03$ et $x=0{,}15$. Cette valeur est bien dans $[0\,;0{,}8]$.
Donc 15 % des Standard résilient chaque mois, et $T=\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}1 & 0{,}05\\ 0{,}2 & 0{,}65 & 0{,}15\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(d) On cherche le coefficient (ligne P, colonne R) de T^2. C'est la ligne P de T fois sa colonne R : $0{,}85\times 0{,}05+0{,}1\times 0{,}15+0{,}05\times 1=0{,}0425+0{,}015+0{,}05=0{,}1075$. La probabilité qu'un abonné Premium au mois 0 ait résilié au mois 2 vaut 0,1075.

Ex. 35 ★★★ Un pion sur trois cases : deux réglages possibles

(a) La boucle de chaque case porte a, et chacun des deux autres arcs porte b.
Donc $P=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$. Chaque ligne somme à 1 : $a+2b=1$, d'où $a=1-2b$. Comme $a\geq 0$, on a $1-2b\geq 0$, soit $b\leq\frac{1}{2}$. Avec $b\geq 0$: $0\leq b\leq\frac{1}{2}$.

(b) La probabilité cherchée est le coefficient (R,R) de P^2, c'est-à-dire $\sum_k p_{Rk}\,p_{kR}=a\times a+b\times b+b\times b=a^2+2b^2$. Avec $a=1-2b$: $(1-2b)^2+2b^2=1-4b+6b^2$.

(c) On résout $1-4b+6b^2=\frac{1}{2}$, soit $12b^2-8b+1=0$. Le discriminant vaut $64-48=16$, d'où $b=\frac{8-4}{24}=\frac{1}{6}$ ou $b=\frac{8+4}{24}=\frac{1}{2}$. Les deux valeurs sont dans $[0\,;\frac{1}{2}]$. Pour $b=\frac{1}{6}$: $a=\frac{2}{3}$ et $P=\begin{pmatrix}2/3 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 2/3 & 1/6\\ 1/6 & 1/6 & 2/3\end{pmatrix}$. Pour $b=\frac{1}{2}$: $a=0$ (aucune boucle) et $P=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$. Il y a donc deux réglages.

(d) Ici $b=\frac{1}{6}$ et $a=\frac{2}{3}$. On cherche le coefficient (R,V) de P^2. C'est la ligne R fois la colonne V : $a\times b+b\times a+b\times b=2ab+b^2=2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{8}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{4}$. Contrôle : la ligne R de P^2 vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$. La probabilité vaut $\frac{1}{4}$.

Ex. 35 (suite)

(e) Oui. Lire par colonnes revient à prendre la transposée de P. Or $p_{ij}=p_{ji}$ pour tous i et j : ce coefficient vaut a si $i=j$ et b sinon. La matrice P est donc égale à sa transposée, et les deux lectures donnent les mêmes poids. Noé a raison pour ce jeu-ci. En général, c'est faux : il faut lire les départs en ligne.

6. *Distribution après n étapes*

Ex. 36 ★☆☆ Romans ou BD

(a) Le premier samedi, le roman est certain : $\pi_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

(b) $\pi_1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}P$ est la première ligne de P : $\pi_1=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$.

(c) $\pi_2=\pi_1P$: $r_2=0{,}6\times 0{,}6+0{,}4\times 0{,}3=0{,}36+0{,}12=0{,}48$ et $b_2=0{,}6\times 0{,}4+0{,}4\times 0{,}7=0{,}24+0{,}28=0{,}52$. Donc $\pi_2=\begin{pmatrix}0{,}48 & 0{,}52\end{pmatrix}$.

(d) $0{,}48+0{,}52=1$: le contrôle est bon.

(e) Le 1er samedi correspond à $n=0$, donc le 4e samedi correspond à $n=3$. $r_3=0{,}48\times 0{,}6+0{,}52\times 0{,}3=0{,}288+0{,}156=0{,}444$ (et $b_3=0{,}556$). Lina emprunte un roman ce samedi-là avec une probabilité de 0,444.

(f) P est une matrice 2×2 et π_1 une matrice 1×2. Pour calculer $P\pi_1$, il faudrait que P ait autant de colonnes que π_1 a de lignes, soit $2\neq 1$: le produit n'existe pas. La bonne relation est $\pi_{n+1}=\pi_nP$.

Ex. 37 ★☆☆ Le robot aspirateur d'Inès

(a) Une transition dure dix minutes : c'est le coefficient p_{CE} de P (ligne 2, colonne 3), soit 0,2.

(b) Vingt minutes correspondent à deux transitions : c'est le coefficient $(1\,;3)$ de P^2, soit 0,28.

(c) P^2 est une matrice de transition, donc chaque ligne a une somme égale à 1 : $x=1-0{,}38-0{,}28=0{,}34$.

(d) y est le produit de la ligne 3 de P par la colonne 3 de P : $y=0{,}1\times 0{,}2+0{,}3\times 0{,}2+0{,}6\times 0{,}6=0{,}02+0{,}06+0{,}36=0{,}44$. Contrôle : $0{,}23+0{,}33+0{,}44=1$.

(e) Non. Cette probabilité est $(P^2)_{33}=y=0{,}44$, alors que $0{,}6^2=0{,}36$. Le calcul de Léo ne compte que le chemin $E\to E\to E$: il oublie les chemins $E\to S\to E$ et $E\to C\to E$.

Ex. 37 **(suite)**

(f) On utilise $\pi_2 = \pi_0 P^2$: $0{,}5 \times 0{,}39 + 0{,}5 \times 0{,}38 = 0{,}385$; $0{,}5 \times 0{,}33 + 0{,}5 \times 0{,}34 = 0{,}335$; $0{,}5 \times 0{,}28 + 0{,}5 \times 0{,}28 = 0{,}28$.
Donc $\pi_2 = \begin{pmatrix}0{,}385 & 0{,}335 & 0{,}28\end{pmatrix}$, et la somme vaut bien 1.

Ex. 38 ★★☆ **La météo de Brest : corrige Sacha**

(a) $P = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}45 & 0{,}55\end{pmatrix}$. Première erreur : une distribution est une matrice ligne et $\pi_{n+1} = \pi_n P$; $P\pi_n$ n'a pas de sens. Deuxième erreur : la somme des coefficients trouvés vaut $0{,}8 + 0{,}45 = 1{,}25 \neq 1$, ce n'est donc pas une distribution. Lundi est sec, donc $\pi_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ et $\pi_1 = \pi_0 P = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$.

(b) $\pi_2 = \pi_1 P$: $s_2 = 0{,}8 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}45 = 0{,}64 + 0{,}09 = 0{,}73$ et $h_2 = 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}55 = 0{,}16 + 0{,}11 = 0{,}27$.
Donc $\pi_2 = \begin{pmatrix}0{,}73 & 0{,}27\end{pmatrix}$.

(c) Non. De lundi à mercredi, il y a deux transitions : la probabilité cherchée est le coefficient $(2\,;1)$ de P^2, et non $(p_{21})^2$. Les chemins de H à S en deux étapes sont $H \to S \to S$ et $H \to H \to S$: $(P^2)_{21} = 0{,}45 \times 0{,}8 + 0{,}55 \times 0{,}45 = 0{,}36 + 0{,}2475 = 0{,}6075$. Le nombre $0{,}45^2$ ne correspond à aucun chemin : une fois en S, la probabilité d'avoir S le lendemain est 0,8, pas 0,45. Sacha a donc tort : la bonne probabilité est 0,6075.

(d) Lundi correspond à $n = 0$, donc jeudi correspond à $n = 3$: il faut calculer π_3, pas π_4. $s_3 = 0{,}73 \times 0{,}8 + 0{,}27 \times 0{,}45 = 0{,}584 + 0{,}1215 = 0{,}7055$. Jeudi est sec avec une probabilité d'environ 0,71.

Ex. 39 ★★☆ **Deux fournisseurs d'accès à Toulouse**

(a) $P = \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}25 & 0{,}75\end{pmatrix}$ (chaque ligne a pour somme 1). Le premier coefficient de $\pi_n P$ donne $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}25b_n = 0{,}9a_n + 0{,}25(1 - a_n) = 0{,}65a_n + 0{,}25$.

(b) $\ell = 0{,}65\ell + 0{,}25 \iff 0{,}35\ell = 0{,}25 \iff \ell = \frac{5}{7}$. Alors $u_{n+1} = 0{,}65a_n + 0{,}25 - \frac{5}{7} = 0{,}65a_n - \frac{13}{28} = 0{,}65\left(a_n - \frac{5}{7}\right) = 0{,}65u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique, de raison 0,65.

(c) $a_0 = 0{,}4$, donc $u_0 = \frac{2}{5} - \frac{5}{7} = -\frac{11}{35}$. On a $u_n = -\frac{11}{35} \times 0{,}65^n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{5}{7} - \frac{11}{35} \times 0{,}65^n$.

(d) 2030 correspond à $n = 2030 - 2026 = 4$. $a_4 = \frac{5}{7} - \frac{11}{35} \times 0{,}65^4 \approx 0{,}658$. En 2030, environ 65,8 % des abonnés sont chez Volt.

Ex. 40 ★★★ **Vélo ou tram à Grenoble**

(a) Le coefficient p_{ij} de P est la probabilité d'aller de i vers j. On obtient donc $P = \begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$, et chaque ligne a bien une somme égale à 1. Le jour $n = 0$, elle prend le vélo de façon certaine : $\pi_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$. C'est une matrice ligne.

(b) On a $\pi_{n+1} = \pi_n P$. Son premier coefficient se calcule avec la formule des probabilités totales : $a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2b_n$. Or π_n est une distribution, donc $b_n = 1 - a_n$. Ainsi $a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2 - 0{,}2a_n = 0{,}5a_n + 0{,}2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) $u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}4 = 0{,}5a_n + 0{,}2 - 0{,}4 = 0{,}5(a_n - 0{,}4) = 0{,}5u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison 0,5, et son premier terme vaut $u_0 = a_0 - 0{,}4 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Ainsi $u_n = 0{,}6 \times 0{,}5^n$, d'où $a_n = 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) π_n est une distribution, donc $b_n = 1 - a_n = 1 - 0{,}4 - 0{,}6 \times 0{,}5^n = 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n$. La rentrée correspond à $n = 0$, donc le 4e jour correspond à $n = 3$ et non à $n = 4$. $b_3 = 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}125 = 0{,}525$. Contrôle : $a_3 = 0{,}475$ et $a_3 + b_3 = 1$. Le 4e jour, Maëlle prend le tram avec une probabilité de 0,525.

(e) $a_n < 0{,}41 \iff 0{,}6 \times 0{,}5^n < 0{,}01 \iff 0{,}5^n < \frac{1}{60} \approx 0{,}0167$. La suite $(0{,}5^n)$ est décroissante. Or $0{,}5^5 = 0{,}03125$ est supérieur à $\frac{1}{60}$, et $0{,}5^6 = 0{,}015625$ lui est inférieur. La condition équivaut donc à $n \geqslant 6$ (en effet $a_5 = 0{,}41875$ et $a_6 = 0{,}409375$). Le rang $n = 6$ correspond au 7e jour : la probabilité devient inférieure à 0,41 à partir du 7e jour.

Ex. 41 ★★★ **Le food truck de Yanis à Bordeaux**

(a) Le premier jour, le truck est au quai ou à l'université avec une probabilité de 0,5 chacun, et jamais au marché : $\pi_0 = \begin{pmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}$ (matrice ligne de somme 1). On a $\pi_1 = \pi_0 P$, avec la ligne à gauche. Coefficients : $0{,}5 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}45$, puis $0{,}5 \times 0{,}3 + 0 + 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}2$, puis $0{,}5 \times 0{,}2 + 0 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}35$.
Donc $\pi_1 = \begin{pmatrix}0{,}45 & 0{,}2 & 0{,}35\end{pmatrix}$. Contrôle : $0{,}45 + 0{,}2 + 0{,}35 = 1$.

Ex. 41 (suite)

(b) Par exemple, le coefficient $(1\,;1)$ vaut $0{,}5\times 0{,}5+0{,}3\times 0{,}2+0{,}2\times 0{,}4=0{,}39$. On obtient de même $P^2=\begin{pmatrix}0{,}39 & 0{,}35 & 0{,}26\\ 0{,}3 & 0{,}44 & 0{,}26\\ 0{,}42 & 0{,}23 & 0{,}35\end{pmatrix}$. Sommes des lignes : $0{,}39+0{,}35+0{,}26=1$, $0{,}3+0{,}44+0{,}26=1$ et $0{,}42+0{,}23+0{,}35=1$. C'est cohérent : P^2 est encore une matrice de transition.

(c) Le coefficient $(i\,;j)$ de P^2 est la probabilité d'être en j deux jours après avoir été en i : la ligne donne le départ, la colonne donne l'arrivée. Noé a lu le coefficient $(M\,;U)=0{,}26$, qui correspond au trajet de M vers U. Il faut le coefficient $(U\,;M)$: $0{,}4\times 0{,}3+0{,}1\times 0{,}6+0{,}5\times 0{,}1=0{,}12+0{,}06+0{,}05=0{,}23$. La probabilité cherchée est 0,23.

(d) D'après la propriété $\pi_n=\pi_0P^n$, on a $\pi_2=\pi_0P^2=0{,}5\times(\text{ligne }Q\text{ de }P^2)+0{,}5\times(\text{ligne }U\text{ de }P^2)$. On obtient $\pi_2=\begin{pmatrix}0{,}405 & 0{,}29 & 0{,}305\end{pmatrix}$. Contrôle par $\pi_2=\pi_1P$: premier coefficient $0{,}45\times 0{,}5+0{,}2\times 0{,}2+0{,}35\times 0{,}4=0{,}405$. La somme des coefficients vaut bien 1.

(e) Le premier jour correspond à $n=0$, donc le 4e jour correspond à $n=3$. On calcule le troisième coefficient de $\pi_3=\pi_2P$: $0{,}405\times 0{,}2+0{,}29\times 0{,}2+0{,}305\times 0{,}5=0{,}081+0{,}058+0{,}1525=0{,}2915$. La probabilité que le truck soit à l'université le 4e jour est d'environ 0,29.

Ex. 42 ★★★ Vélos en libre-service à Lyon

(a) Chaque ligne de J vaut $\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}0{,}12+0{,}08 & 0{,}08+0{,}72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$.
Donc $JP=J$. Pour K : la première ligne donne $\begin{pmatrix}0{,}48-0{,}08 & 0{,}32-0{,}72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4 & -0{,}4\end{pmatrix}$, et la seconde donne $\begin{pmatrix}-0{,}12+0{,}02 & -0{,}08+0{,}18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}1 & 0{,}1\end{pmatrix}$.
Donc $KP=0{,}5K$.

(b) On note $\mathcal{P}(n)$: « $P^n=J+0{,}5^nK$ ». Initialisation : $J+0{,}5^0K=J+K=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=P^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : supposons $P^k=J+0{,}5^kK$ pour un entier k. Alors $P^{k+1}=P^kP=JP+0{,}5^kKP=J+0{,}5^k\times 0{,}5K=J+0{,}5^{k+1}K$. Conclusion : par récurrence, $P^n=J+0{,}5^nK$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Ex. 42 (suite)

(c) Le départ est certain en D : $\pi_0=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$, donc $\pi_n=\pi_0P^n$ est la ligne D de P^n. Son coefficient $(D\,;B)$ vaut $0{,}2+0{,}5^n\times(-0{,}2)=0{,}2-0{,}2\times 0{,}5^n$. Le premier soir correspond à $n=0$, donc le 6e soir correspond à $n=5$. On obtient $0{,}2-0{,}2\times 0{,}03125=0{,}19375$. La probabilité vaut environ 0,194.

(d) On a $\pi_n=\pi_0P^n=\pi_0J+0{,}5^n\,\pi_0K$. D'une part, $\pi_0J=\begin{pmatrix}0{,}06+0{,}14 & 0{,}24+0{,}56\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$. D'autre part, $\pi_0K=\begin{pmatrix}0{,}24-0{,}14 & -0{,}24+0{,}14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1 & -0{,}1\end{pmatrix}$.
Donc $\pi_n=\begin{pmatrix}0{,}2+0{,}1\times 0{,}5^n & 0{,}8-0{,}1\times 0{,}5^n\end{pmatrix}$. La somme des coefficients vaut bien 1 (par exemple $\pi_3=\begin{pmatrix}0{,}2125 & 0{,}7875\end{pmatrix}$).

(e) Soit $\pi_0=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}$ avec $x\in[0\,;1]$. Les deux lignes de J sont égales, donc $\pi_0J=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$. De plus, $\pi_0K=\begin{pmatrix}x-0{,}2 & 0{,}2-x\end{pmatrix}$. Ainsi $\pi_n=\begin{pmatrix}0{,}2+(x-0{,}2)\times 0{,}5^n & 0{,}8-(x-0{,}2)\times 0{,}5^n\end{pmatrix}$.
Comme $-1<0{,}5<1$, $\lim 0{,}5^n=0$.
Donc π_n tend vers $\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$ quelle que soit la valeur de x : Lou a raison.

7. État stable d'une chaîne de Markov

Ex. 43 ★☆☆ Distributions invariantes à deux états

(a) $\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}0{,}2\times 0{,}6+0{,}8\times 0{,}1 & 0{,}2\times 0{,}4+0{,}8\times 0{,}9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$. On a $\pi P=\pi$ et la somme des coefficients vaut 1 : cette distribution est invariante.

(b) Le premier coefficient de $\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}P$ vaut $0{,}5\times 0{,}7+0{,}5\times 0{,}5=0{,}6\neq 0{,}5$. On trouve $\pi P\neq\pi$: cette distribution n'est pas invariante.

(c) $\pi P=\pi$ équivaut à $0{,}75x+0{,}2(1-x)=x$, soit $0{,}2=0{,}45x$, donc $x=\frac{4}{9}$. La distribution invariante est $\pi=\begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}$. Vérification : $0{,}75\times\frac{4}{9}+0{,}2\times\frac{5}{9}=\frac{3+1}{9}=\frac{4}{9}$.

(d) Ici $P=\begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}35\\ 0{,}45 & 0{,}55\end{pmatrix}$. L'équation $0{,}65x+0{,}45(1-x)=x$ donne $0{,}45=0{,}8x$, donc $x=\frac{9}{16}$. L'état stable est $\pi=\begin{pmatrix}\frac{9}{16} & \frac{7}{16}\end{pmatrix}$.

(e) L'équation $x+0{,}25(1-x)=x$ donne $0{,}25(1-x)=0$, donc $x=1$ et $\pi=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$. Interprétation : une fois en A, on n'en sort plus, et depuis B on finit par rejoindre A. À long terme, la chaîne est en A.

Ex. 43 (suite)

(f) Non. $\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}$ vérifie bien $\pi P = \pi$: $3\times 0{,}8 + 1\times 0{,}6 = 3$ et $3\times 0{,}2 + 1\times 0{,}4 = 1$. Mais ses coefficients ont pour somme $4 \neq 1$: ce n'est pas une distribution. On divise par 4 et on obtient l'état stable $\pi = \begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.
Vérification : $\frac{3}{4}\times 0{,}8 + \frac{1}{4}\times 0{,}6 = \frac{3}{4}$.

Ex. 44 ★☆☆ Le chat entre trois pièces

(a) (1) $x = 0{,}7x + 0{,}2y$; (2) $y = 0{,}3x + 0{,}6y + 0{,}4z$; (3) $z = 0{,}2y + 0{,}6z$.

(b) On obtient $x + y + z = x + y + z$, car chaque ligne de P a pour somme 1. Les trois équations sont donc liées : l'une est redondante. Le système a alors une infinité de solutions, dont $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. C'est la condition $x + y + z = 1$ qui fixe une distribution.

(c) (1) donne $0{,}3x = 0{,}2y$, donc $x = \frac{2}{3}y$. (3) donne $0{,}4z = 0{,}2y$, donc $z = \frac{1}{2}y$.

(d) $x + y + z = 1$ donne $\left(\frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{2}\right) y = \frac{13}{6}y = 1$, donc $y = \frac{6}{13}$, $x = \frac{4}{13}$ et $z = \frac{3}{13}$. Ainsi $\pi = \begin{pmatrix}\frac{4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{3}{13}\end{pmatrix}$.

(e) $0{,}3\times\frac{4}{13} + 0{,}6\times\frac{6}{13} + 0{,}4\times\frac{3}{13} = \frac{1{,}2+3{,}6+1{,}2}{13} = \frac{6}{13}$, c'est bien y.

Ex. 45 ★★☆ Météo à Brest : l'erreur d'Inès

(a) $P = \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\end{pmatrix}$. La probabilité cherchée est le coefficient (S, L) de P^2 : $0{,}6\times 0{,}1 + 0{,}3\times 0{,}3 + 0{,}1\times 0{,}4 = 0{,}19$. S'il fait soleil aujourd'hui, il pleut dans deux jours avec la probabilité 0,19.

(b) Chaque ligne de P a pour somme 1, donc les trois équations de $\pi P = \pi$ sont liées : la troisième découle des deux autres, d'où $0 = 0$. Ce système a toujours une infinité de solutions. Inès a oublié la condition $x + y + z = 1$, qui sélectionne une unique distribution.

(c) La troisième équation donne $0{,}6z = 0{,}1x + 0{,}3y$, soit $x = 6z - 3y$. La première donne $0{,}4x = 0{,}3y + 0{,}2z$. On substitue : $2{,}4z - 1{,}2y = 0{,}3y + 0{,}2z$, donc $z = \frac{15}{22}y$ et $x = \frac{12}{11}y$. Avec $x + y + z = 1$: $\frac{61}{22}y = 1$.
Donc $\pi = \begin{pmatrix}\frac{24}{61} & \frac{22}{61} & \frac{15}{61}\end{pmatrix}$. Vérification avec la deuxième équation : $\frac{0{,}3\times 24 + 0{,}4\times 22 + 0{,}4\times 15}{61} = \frac{22}{61}$.

(d) Comme la distribution converge vers π, à long terme il pleut environ $\frac{15}{61} \approx 24{,}6\,\%$ des jours. Sur une année : $365\times\frac{15}{61} \approx 89{,}75$, soit environ 90 jours de pluie.

Ex. 46 ★★☆ Deux opérateurs : Volta et Nexo

(a) $P = \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$. Le premier coefficient de $\pi_{n+1} = \pi_n P$ donne $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}2(1 - a_n)$, soit $a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2$.

(b) $\pi P = \pi$ équivaut à $0{,}9x + 0{,}2(1 - x) = x$, soit $0{,}2 = 0{,}3x$, donc $x = \frac{2}{3}$. L'état stable est $\pi = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

(c) $u_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2 - \frac{2}{3} = 0{,}7a_n - \frac{7}{15} = 0{,}7\left(a_n - \frac{2}{3}\right) = 0{,}7u_n$.
Donc (u_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $u_0 = 0{,}4 - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15}$. D'où $a_n = \frac{2}{3} - \frac{4}{15}\times 0{,}7^n$.

(d) Comme $-1 < 0{,}7 < 1$, on a $0{,}7^n \to 0$, donc $a_n \to \frac{2}{3}$. À long terme, Volta a environ deux tiers des abonnés. Le calcul de la question précédente ne dépend pas de a_0 : pour toute part de départ, $a_n = \frac{2}{3} + \left(a_0 - \frac{2}{3}\right)\times 0{,}7^n \to \frac{2}{3}$. La limite ne dépend donc pas de a_0.

Ex. 47 ★★★ Une trottinette entre deux stations lyonnaises

(a) $P = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$. On a $\pi_{n+1} = \pi_n P$ avec $\pi_n = \begin{pmatrix}b_n & 1 - b_n\end{pmatrix}$, donc $b_{n+1} = 0{,}8\,b_n + 0{,}3\,(1 - b_n) = 0{,}5\,b_n + 0{,}3$. C'est la relation demandée.

(b) On pose $u_n = b_n - \ell$. Alors $u_{n+1} = 0{,}5\,b_n + 0{,}3 - \ell = 0{,}5\,(b_n - \ell) + 0{,}3 - 0{,}5\,\ell = 0{,}5\,u_n + 0{,}3 - 0{,}5\,\ell$. Il suffit de choisir ℓ tel que $0{,}3 - 0{,}5\,\ell = 0$, soit $\ell = 0{,}6$: alors $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n$ et (u_n) est géométrique de raison 0,5, de premier terme $u_0 = 0 - 0{,}6 = -0{,}6$.
Donc $b_n = 0{,}6 - 0{,}6\times 0{,}5^n$. Comme $0 < 0{,}5 < 1$, on a $0{,}5^n \to 0$, donc $b_n \to 0{,}6$. À long terme, la trottinette est à Bellecour environ 6 soirs sur 10.

(c) $b_n > 0{,}55 \iff 0{,}6\times 0{,}5^n < 0{,}05 \iff 0{,}5^n < \frac{1}{12} \iff n\ln 0{,}5 < -\ln 12 \iff n > \frac{\ln 12}{\ln 2} \approx 3{,}58$ (on change le sens car $\ln 0{,}5 < 0$). Le plus petit entier est donc $n = 4$. Vérification : $b_3 = 0{,}525$ et $b_4 = 0{,}5625$.

(d) L'équation $0{,}8x + 0{,}3(1 - x) = x$ donne $x = 0{,}6$: la distribution invariante est $\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$, et sa première coordonnée est bien la limite de (b_n). Mais $b_n - 0{,}6 = -0{,}6\times 0{,}5^n \neq 0$ pour tout n : b_n n'est jamais égal à 0,6. L'affirmation est fausse. Une distribution invariante ne reste fixe que si l'on part d'elle. Ici, b_n tend vers 0,6 sans jamais l'atteindre.

Ex. 48 ★★★ **Les abeilles d'un jardin d'Angers**

(a) Première coordonnée : $0{,}5x + 0{,}2y + 0{,}1z = x$, soit $(E_1) : -0{,}5x + 0{,}2y + 0{,}1z = 0$. Deuxième : $(E_2) : 0{,}25x - 0{,}4y + 0{,}3z = 0$. Troisième : $(E_3) : 0{,}25x + 0{,}2y - 0{,}4z = 0$. La somme des trois membres de gauche donne $0x + 0y + 0z$, car chaque ligne de P a une somme égale à 1.
Donc $(E_2) = -(E_1) - (E_3)$: la deuxième équation découle des deux autres, elle est redondante.

(b) Par linéarité du produit matriciel, $(k\pi)P = k(\pi P) = k\pi$. Toutes les lignes proportionnelles à une solution sont donc solutions, y compris $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ pour $k = 0$. Sans la condition $x + y + z = 1$, le système a une infinité de solutions : c'est cette condition qui en sélectionne une seule.

(c) On multiplie (E_1) par 10 : $z = 5x - 2y$. On multiplie (E_3) par 20 : $5x + 4y - 8z = 0$, donc $5x + 4y - 40x + 16y = 0$, d'où $y = \frac{7}{4}x$ puis $z = \frac{3}{2}x$. La condition $x + y + z = 1$ donne $\frac{17}{4}x = 1$.
Donc $\pi = \begin{pmatrix}\frac{4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{6}{17}\end{pmatrix}$. Vérification avec (E_2) : $0{,}25 \times 4 - 0{,}4 \times 7 + 0{,}3 \times 6 = 1 - 2{,}8 + 1{,}8 = 0$.

(d) À long terme, la proportion d'abeilles sur chaque massif est donnée par π. On attend donc en moyenne $3\,400 \times \frac{4}{17} = 800$ abeilles sur la lavande, $3\,400 \times \frac{7}{17} = 1\,400$ sur les rosiers et $3\,400 \times \frac{6}{17} = 1\,200$ sur les tournesols.

(e) À 14 h, la distribution est exactement π. Comme $\pi P = \pi$, on obtient de proche en proche $\pi_n = \pi$ pour tout n. À 14 h 10 (une étape) comme à 15 h (six étapes), Romane attend donc en moyenne 800 abeilles sur L, 1 400 sur R et 1 200 sur T.

Ex. 49 ★★★ **Les soirées de Yanis**

(a) Avec $\pi_{n+1} = \pi_n P$, la première colonne de P donne $s_{n+1} = 0{,}85\,s_n + 0{,}25\,l_n + 0{,}25\,j_n$. Comme $l_n + j_n = 1 - s_n$, on obtient $s_{n+1} = 0{,}85\,s_n + 0{,}25\,(1 - s_n) = 0{,}6\,s_n + 0{,}25$.

(b) On part de $s_0 = 0$ et on calcule les termes successifs : $s_1 = 0{,}25$, $s_2 = 0{,}4$, $s_3 = 0{,}49$, $s_4 = 0{,}544$, tous $\leqslant 0{,}55$. Puis $s_5 = 0{,}5764 > 0{,}55$: la boucle s'arrête et le programme affiche 5. Le soir 5 est le premier soir où la probabilité que Yanis fasse du sport dépasse 0,55.

Ex. 49 **(suite)**

(c) La première équation de $\pi P = \pi$ s'écrit $x = 0{,}85x + 0{,}25(y + z) = 0{,}85x + 0{,}25(1 - x)$, donc $0{,}4x = 0{,}25$ et $x = \frac{5}{8}$. La troisième s'écrit $z = 0{,}25y + 0{,}5z$, donc $y = 2z$. Avec $y + z = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$, on trouve $z = \frac{1}{8}$ et $y = \frac{1}{4}$. Vérification avec la deuxième équation : $0{,}15 \times \frac{5}{8} + 0{,}5 \times \frac{1}{4} + 0{,}25 \times \frac{1}{8} = \frac{0{,}75+1+0{,}25}{8} = \frac{1}{4}$.
Donc $\pi = \begin{pmatrix}\frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$. Comme π_n converge vers π, à long terme Yanis joue aux jeux vidéo environ un soir sur huit, soit 12,5 % de ses soirées.

(d) On pose $u_n = s_n - \frac{5}{8}$. Alors $u_{n+1} = 0{,}6\,s_n + 0{,}25 - 0{,}625 = 0{,}6\left(s_n - \frac{5}{8}\right) = 0{,}6\,u_n$, donc $s_n = \frac{5}{8} + \left(s_0 - \frac{5}{8}\right) \times 0{,}6^n$. Comme $0 < 0{,}6 < 1$, $0{,}6^n \to 0$, donc $s_n \to \frac{5}{8}$ quel que soit s_0. L'affirmation est fausse : la limite ne dépend pas du soir de départ.