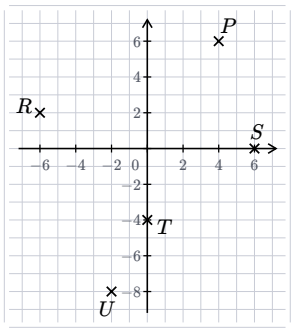
49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Coordonnées d'un point dans un repère

À retenir : $M(x\,;\,y)$: abscisse d'abord. Axe des abscisses : $y = 0$; axe des ordonnées : $x = 0$. Symétrique de M : $(x\,;\,-y)$ par rapport à l'axe des abscisses, $(-x\,;\,y)$ par rapport à l'axe des ordonnées, $(-x\,;\,-y)$ par rapport à O.

Ex. 1 ★☆☆ **Lire sur un repère gradué de 2 en 2** — Le repère est orthonormé. Observe bien les graduations des axes avant de lire.



(a) Lis les coordonnées des points P et R.

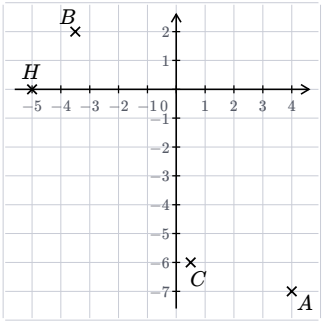
(b) Zoé lit $U(-8\,;\,-2)$. Corrige son erreur.

(c) Lis les coordonnées de T et de S, puis indique l'axe sur lequel se trouve chacun.

(d) Place le point $V(5\,;\,-3)$ sur la figure. Explique comment tu fais.

(e) Quel point de la figure a la plus grande ordonnée ? Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Symétriques : axes ou origine ?** — Le repère $(O\,;\,I,\,J)$ est orthonormé.



(a) Donne le symétrique de $A(4\,;\,-7)$ par rapport à l'axe des abscisses.

Ex. 2 (suite)

(b) Donne le symétrique de $B(-3{,}5\,;\,2)$ par rapport à l'axe des ordonnées.

(c) Donne le symétrique de $C\left(\frac{1}{2}\,;\,-6\right)$ par rapport à l'origine O.

(d) Noé affirme : « le symétrique de $F(2\,;\,-5)$ par rapport à O est $(-5\,;\,2)$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(e) $G'(-1\,;\,-4)$ est le symétrique d'un point G par rapport à l'axe des ordonnées. Donne les coordonnées de G.

(f) Donne le symétrique de $H(-5\,;\,0)$ par rapport à l'axe des abscisses. Que remarques-tu ?

Ex. 3 ★★☆ **Un repère orthogonal non orthonormé** — Sur un dessin, le repère $(O\,;\,I,\,J)$ est orthogonal, avec $OI = 2$ cm et $OJ = 1{,}5$ cm. L'axe des abscisses est horizontal.

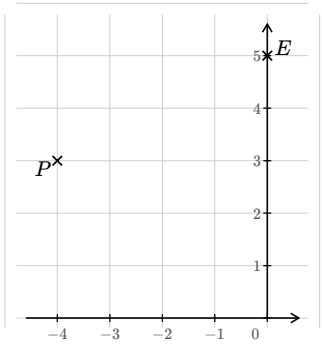
(a) À combien de centimètres de l'axe des ordonnées, puis de l'axe des abscisses, se trouve $A(3\,;\,4)$?

(b) Décris en centimètres la position de $B(-2{,}5\,;\,-2)$ par rapport aux deux axes.

(c) K est à 4 cm à droite de l'axe des ordonnées et à 4,5 cm sous l'axe des abscisses. Maël écrit $K(4\,;\,-4{,}5)$. A-t-il raison ? Justifie.

(d) $L(2\,;\,2)$ a la même abscisse et la même ordonnée. Est-il à la même distance, en cm, des deux axes ? Justifie.

Ex. 4 ★★☆ **La carte d'un jeu vidéo** — La carte d'un jeu est munie d'un repère orthonormé d'origine O, la fontaine. L'axe des abscisses est la route est-ouest (orientée vers l'est). L'axe des ordonnées est la route nord-sud (orientée vers le nord). Le joueur est en $P(-4\,;\,3)$, l'entrée en $E(0\,;\,5)$.



(a) Dans quelle zone (nord-est, nord-ouest, sud-est ou sud-ouest) se trouve le joueur ? Justifie avec les signes.

(b) Le coffre C est le symétrique de P par rapport à la fontaine. Donne ses coordonnées et sa zone.

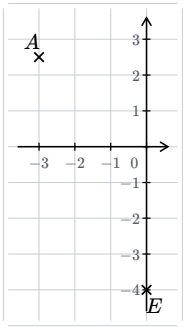
Ex. 4 **(suite)**

(c) La sortie D est sur la route est-ouest, à 6 unités à l'ouest de la fontaine. Donne les coordonnées de D. Sur quelle route se trouve l'entrée E ?

(d) Le monstre M est le symétrique de P par rapport à la route nord-sud. Inès écrit $M(-4\,;\,-3)$. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Un portail a pour coordonnées $(a\,;\,b)$ avec $a < 0$ et $b < 0$. Dans quelle zone est-il ? Et son symétrique par rapport à la fontaine ?

Ex. 5 ★★★ **Deux symétries à la suite** — Le repère $(O\,;\,I,\,J)$ est orthonormé. On donne $A(-3\,;\,2{,}5)$ et $E(0\,;\,-4)$.



(a) Donne les coordonnées de B, symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. Donne ensuite celles de C, symétrique de B par rapport à l'axe des ordonnées.

(b) Compare C au symétrique de A par rapport à O. Démontre ensuite que, pour tout point $M(x\,;\,y)$, ces deux symétries à la suite donnent le symétrique de M par rapport à O.

(c) Lina affirme : « Le symétrique de E par rapport à l'axe des ordonnées est le point $(4\,;\,0)$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Détermine tous les points $M(x\,;\,y)$ qui sont leur propre symétrique par rapport à l'origine O. Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Le plan d'un terrain de sport** — Sur le plan d'un terrain, le repère $(O\,;\,I,\,J)$ est orthogonal mais pas orthonormé : $OI = 2$ cm et $OJ = 0{,}5$ cm. L'axe des abscisses est horizontal, orienté vers la droite. L'axe des ordonnées est orienté vers le haut.

(a) Le point d'engagement E est sur l'axe des ordonnées, à 4 cm au-dessous de O sur le plan. Lou écrit $E(-4\,;\,0)$. Corrige ses deux erreurs.

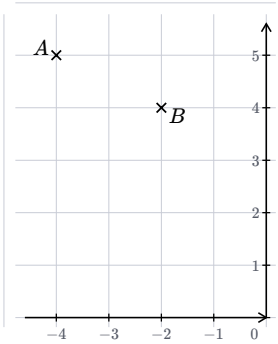
(b) Les coins du terrain sont les points $(-4\,;\,-10)$, $(4\,;\,-10)$, $(4\,;\,10)$ et $(-4\,;\,10)$. Quelles sont les dimensions, en cm, du rectangle dessiné sur le plan ?

(c) Sur le plan, le point M est en haut à gauche de O, à la même distance (en cm) des deux axes. Son abscisse est $-1{,}5$. Calcule son ordonnée.

Ex. 6 **(suite)**

(d) Vrai ou faux ? « Sur le plan, si un point est à la même distance des deux axes, alors son ordonnée est égale à 4 fois son abscisse. » Justifie.

Ex. 7 ★★★ **La trajectoire d'un drone** — Un drone survole un champ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$. À l'instant t (en minutes, $t \geqslant 0$), il est au point $D(2t - 4\,;\,5 - t)$. Il part de $A(-4\,;\,5)$ et passe en $B(-2\,;\,4)$ une minute plus tard.



(a) À quel instant le drone traverse-t-il l'axe des ordonnées ? Donne les coordonnées du point traversé.

(b) Léo affirme : « Le drone traverse l'axe des abscisses au point $(3\,;\,0)$. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Le drone passe-t-il par l'origine O ? Justifie.

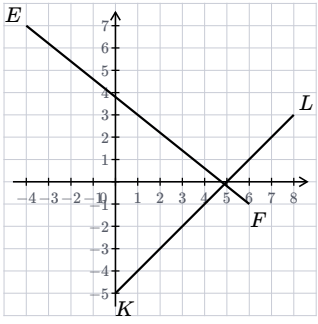
(d) Le drone passe-t-il par le symétrique de A par rapport à O ? Justifie.

(e) À quel instant l'abscisse et l'ordonnée du drone sont-elles égales ? Donne alors ses coordonnées.

2. *Coordonnées du milieu*

À retenir : Milieu de $[AB]$: $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$, et de même pour y, dans tout repère. Extrémité ou symétrique : $x_B = 2x_I - x_A$. On additionne en gardant les parenthèses : $\frac{-3+5}{2} = 1$. Un point équidistant de A et B n'est pas forcément le milieu.

Ex. 8 ★★★ **Calculer des milieux** — Automatisme. Dans un repère $(O\,;\,I,\,J)$, calcule les coordonnées du milieu de chaque segment.



(a) Le segment $[EF]$ avec $E(-4\,;\,7)$ et $F(6\,;\,-1)$.

Ex. 8 **(suite)**

(b) Le segment $[GH]$ avec $G(-6\,;\,-2)$ et $H(-1\,;\,4)$.

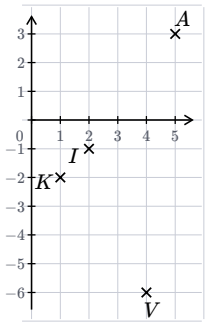
(c) Le segment $[KL]$ avec $K(0\,;\,-5)$ et $L(8\,;\,3)$.

(d) Le segment $[RS]$ avec $R(1{,}5\,;\,-2)$ et $S(-4{,}5\,;\,6)$.

(e) Le segment $[TU]$ avec $T(-7\,;\,3)$ et $U(-2\,;\,-3)$.

(f) Le segment $[XY]$ avec $X\left(\frac{1}{3}\,;\,4\right)$ et $Y(1\,;\,-5)$.

Ex. 9 ★☆☆ **Retrouver une extrémité, un symétrique** — Automatisme. Dans un repère du plan, calcule les coordonnées demandées.



(a) $I(2\,;\,-1)$ est le milieu de $[AB]$ et $A(5\,;\,3)$. Calcule les coordonnées de B.

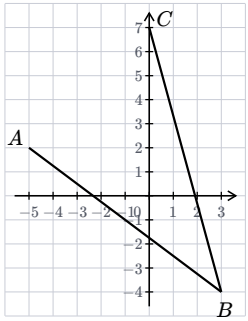
(b) $N(-3\,;\,0)$ est le milieu de $[CD]$ et $C(-1\,;\,4)$. Calcule les coordonnées de D.

(c) Calcule les coordonnées du symétrique V' de $V(4\,;\,-6)$ par rapport à $K(1\,;\,-2)$.

(d) Calcule les coordonnées du symétrique F' de $F(-2\,;\,1)$ par rapport à $E(0{,}5\,;\,3)$.

(e) $P(3\,;\,-4)$ est le symétrique de Q par rapport à $J(-1\,;\,0{,}5)$. Calcule les coordonnées de Q.

Ex. 10 ★★☆ **L'erreur de Tom** — Dans un repère, on donne $A(-5\,;\,2)$, $B(3\,;\,-4)$ et $C(0\,;\,7)$. Pour le milieu I de $[AB]$, Tom écrit : $x_I = \frac{3-(-5)}{2} = 4$ et $y_I = \frac{-4-2}{2} = -3$, donc $I(4\,;\,-3)$.



(a) Quelle erreur Tom a-t-il commise ? Explique.

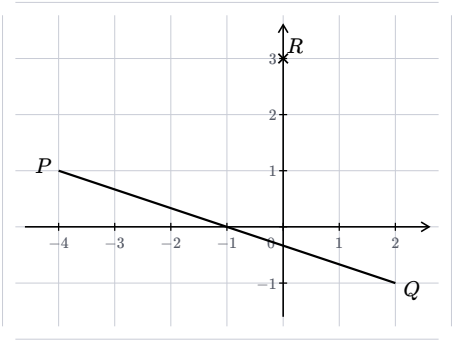
(b) Calcule les coordonnées exactes du milieu I de $[AB]$.

(c) Calcule $x_A + 4$ et $y_A + (-3)$. Que représentent alors les nombres 4 et -3 trouvés par Tom ?

Ex. 10 **(suite)**

(d) Calcule les coordonnées du milieu J de $[BC]$.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux autour du milieu** — Le repère est orthonormé. On donne $P(-4\,;\,1)$, $Q(2\,;\,-1)$ et $R(0\,;\,3)$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie.



(a) « Le point $M(-1\,;\,0)$ est le milieu de $[PQ]$. »

(b) « $RP = RQ$, donc R est le milieu de $[PQ]$. »

(c) « Si le milieu d'un segment est sur l'axe des abscisses, alors les deux extrémités sont sur cet axe. »

(d) « Le symétrique de Q par rapport à R est le point $S(-2\,;\,5)$. »

Ex. 12 ★★★ **Milieu dans un repère non orthonormé** — Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,I,\,J)$ orthogonal mais pas orthonormé : $OI = 1$ cm et $OJ = 2$ cm. On donne $A(-4\,;\,3)$, $B(2\,;\,-2)$ et $C(5\,;\,1)$. Ce repère ne se dessine pas sur un quadrillage carré : travaille par le calcul.

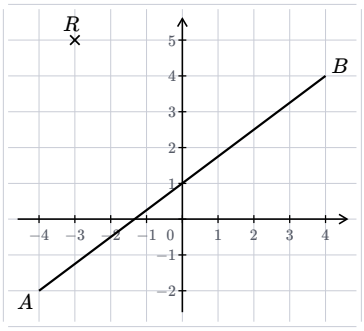
(a) Inès affirme : « Le repère n'est pas orthonormé, donc on ne peut pas calculer le milieu K de $[AB]$. » A-t-elle raison ? Justifie, puis calcule les coordonnées de K.

(b) Calcule les coordonnées du point D, symétrique de C par rapport à K. Sur quel axe se trouve D ?

(c) Mathis dit : « D est sur un axe, donc le milieu de $[CD]$ a une ordonnée nulle. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Inès écrit $AB = \sqrt{(2-(-4))^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{61}$ cm. Explique son erreur, puis calcule la vraie longueur AB en cm
(valeur exacte).

Ex. 13 ★★★ **Antennes relais : équidistant ou milieu ?** — Sur une carte munie d'un repère orthonormé (unité : 1 km), deux antennes relais sont placées en $A(-4\,;\,-2)$ et $B(4\,;\,4)$. Un relais est installé en $R(-3\,;\,5)$.



(a) Calcule les coordonnées du milieu M de $[AB]$.

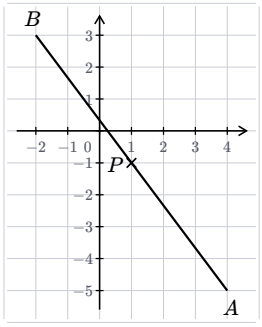
(b) Calcule les distances RA et RB (valeurs exactes, radicaux simplifiés).

(c) Sacha conclut : « R est à la même distance de A et de B, donc R est le milieu de $[AB]$. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) On installe une antenne en E, symétrique de R par rapport à M. Calcule les coordonnées de E.

(e) Quelle est la nature du quadrilatère $ARBE$? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Le trajet du drone** — Dans un repère orthonormé (unité : 100 m), un drone survole un champ. On donne $A(4\,;\,-5)$, $B(-2\,;\,3)$ et $P(1\,;\,-1)$.



(a) Jade lit sur la figure que P est le milieu de $[AB]$. Une lecture ne suffit pas : démontre-le par un calcul.

(b) Le drone atterrit en un point C de l'axe des ordonnées tel que le milieu N de $[AC]$ soit sur l'axe des abscisses. Détermine les coordonnées de C, puis celles de N.

(c) Pour le milieu Q de $[BC]$, Hugo tape $3 + 5 \div 2$ à la calculatrice et annonce $y_Q = 5{,}5$. Corrige son erreur, puis calcule les coordonnées de Q.

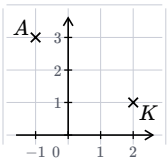
(d) Le quadrilatère $PNCQ$ est-il un parallélogramme ? Justifie en nommant ses diagonales.

3. *Retrouver une extrémité ou un symétrique*

À retenir : Milieu I de $[AB]$ connu : $x_B = 2x_I - x_A$ (et non $x_I - x_A$), idem pour y. Ex. : $I(1\,;\,0)$, $A(3\,;\,2)$ donnent $B(-1\,;\,-2)$. Symétrique de A par rapport à I : même calcul. Parallélogramme $ABCD$: D = symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$.

Ex. 15 ★☆☆ **Retrouver une extrémité** — Dans chaque cas, calcule les coordonnées du point demandé.

(a) $K(2\,;\,1)$ est le milieu de $[AB]$ avec $A(-1\,;\,3)$. Calcule les coordonnées de B.



(b) Le milieu de $[CD]$ est l'origine O du repère, avec $C(2\,;\,-4)$. Calcule les coordonnées de D.

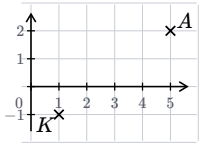
(c) $E(1{,}5\,;\,-2)$ est le milieu de $[FG]$ avec $G(4\,;\,-3{,}5)$. Calcule les coordonnées de F.

(d) Le milieu N de $[PQ]$ est le point de l'axe des ordonnées d'ordonnée $\frac{1}{2}$, et $P(-5\,;\,3)$. Calcule les coordonnées de Q.

(e) $R(-3\,;\,-5)$ est le milieu de $[ST]$ avec $S(-7\,;\,-1)$. Calcule les coordonnées de T, puis vérifie ton résultat par le calcul du milieu.

Ex. 16 ★☆☆ **Symétrique d'un point par rapport à un point** — Calcule les coordonnées du point demandé.

(a) Le symétrique A' de $A(5\,;\,2)$ par rapport à $K(1\,;\,-1)$.



(b) On propose $Z(-5\,;\,-10)$ comme symétrique de $P(3\,;\,-6)$ par rapport à $H(-1\,;\,-2)$. Vérifie-le par un calcul de milieu, puis calcule le vrai symétrique P' de P.

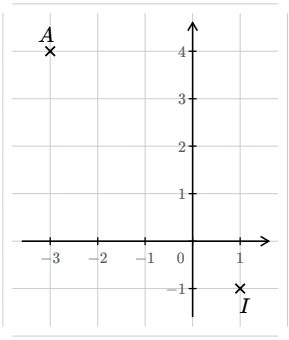
(c) Le symétrique L' de $L(0\,;\,4)$ par rapport à $E(-1\,;\,-2)$.

(d) Le symétrique E' de $E(-1\,;\,-2)$ par rapport à $L(0\,;\,4)$. Obtiens-tu le même point qu'à la question précédente ?

(e) $U'(-3{,}5\,;\,4)$ est le symétrique de U par rapport à $V(-0{,}5\,;\,1{,}5)$. Calcule les coordonnées de U.

(f) $S(4\,;\,-1)$ est le symétrique de $R(-2\,;\,3)$ par rapport au point T. Calcule les coordonnées de T.

Ex. 17 ★★☆ **Trois élèves, une extrémité** — $I(1\,;\,-1)$ est le milieu de $[AB]$ avec $A(-3\,;\,4)$. On cherche les coordonnées de B.



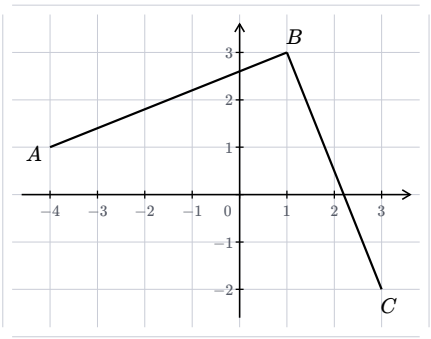
(a) Léa écrit $x_B = x_I - x_A$ et $y_B = y_I - y_A$, et trouve $B(4\,;\,-5)$. A-t-elle raison ? Justifie en calculant le milieu de $[AB]$ avec son point.

(b) Malik divise les coordonnées de I par 2 et trouve $B(0{,}5\,;\,-0{,}5)$. A-t-il raison ? Justifie en calculant le milieu de $[AB]$ avec son point.

(c) Calcule les coordonnées exactes de B, puis vérifie ton résultat par le calcul du milieu.

(d) Inès écrit $y_B = 2 \times (-1) - 4 = 2$. Explique son erreur.

Ex. 18 ★★☆ **La quatrième tour** — Dans un jeu vidéo, la carte est un repère orthonormé (unité : une case). Trois tours sont en $A(-4\,;\,1)$, $B(1\,;\,3)$ et $C(3\,;\,-2)$. On veut placer une tour D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.



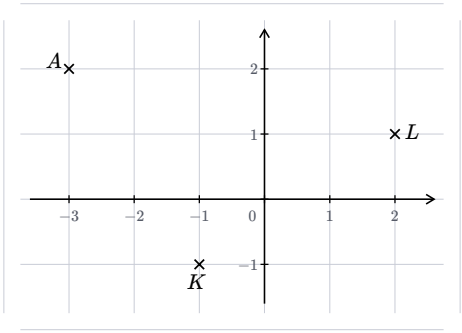
(a) Calcule les coordonnées du milieu K de $[AC]$.

(b) Nora affirme : « D est le symétrique de A par rapport à K. » A-t-elle raison ? Justifie, puis calcule les coordonnées de D.

(c) Vérifie ton résultat en calculant le milieu de $[BD]$.

(d) On cherche maintenant le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme. Quelles sont ses diagonales ? Calcule les coordonnées de E. Est-ce le point D ?

Ex. 19 ★★★ **Symétries en chaîne** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3\,;\,2)$, $K(-1\,;\,-1)$ et $L(2\,;\,1)$. On note A' le symétrique de A par rapport à K, puis A'' le symétrique de A' par rapport à L.



(a) Calcule les coordonnées de A', puis vérifie-les par un calcul de milieu.

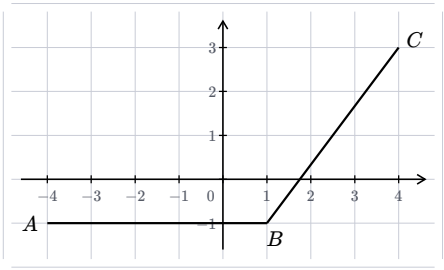
(b) Calcule les coordonnées de A''.

(c) Noé affirme : « A'' est le symétrique de A par rapport au milieu M de $[KL]$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Calcule AA'' et KL en valeur exacte (radicaux simplifiés). Que remarques-tu ?

(e) Le triangle $AA'A''$ est-il rectangle ? Est-il isocèle ? Justifie.

Ex. 20 ★★★ **La parcelle du cadastre** — Sur un plan cadastral muni d'un repère orthonormé, trois bornes d'une parcelle sont en $A(-4\,;\,-1)$, $B(1\,;\,-1)$ et $C(4\,;\,3)$. On cherche la quatrième borne D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.



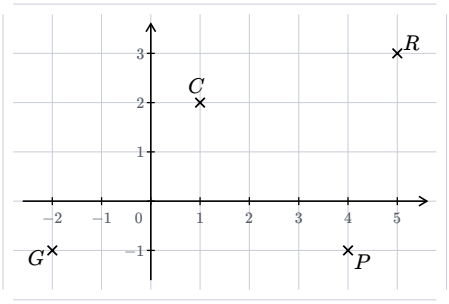
(a) Calcule les coordonnées du milieu M de $[AC]$, puis celles de D. Vérifie par un calcul de milieu.

(b) Hugo calcule le milieu N de $[AB]$, puis le symétrique de C par rapport à N : il obtient $E(-7\,;\,-5)$. A-t-il trouvé D ? Quel parallélogramme a-t-il construit ? Justifie.

(c) Calcule AB, BC, AC et BD en valeur exacte (radicaux simplifiés).

(d) Quelle est la nature précise de $ABCD$ (parallélogramme, losange, rectangle ou carré) ? Justifie en citant les propriétés.

Ex. 21 ★★★ **La carte au trésor** — Une carte au trésor est munie d'un repère orthonormé. On y voit le puits $P(4\,;\,-1)$, le chêne $C(1\,;\,2)$, la grotte $G(-2\,;\,-1)$ et la ruine $R(5\,;\,3)$. Le trésor T est le symétrique du puits par rapport au chêne.



(a) Calcule les coordonnées de T, puis vérifie-les par un calcul de milieu.

(b) Zoé calcule $2x_P - x_C$ et $2y_P - y_C$, et trouve $T(7\,;\,-4)$. A-t-elle raison ? Justifie par un calcul de milieu.

(c) Le triangle PGT est-il rectangle ? Justifie.

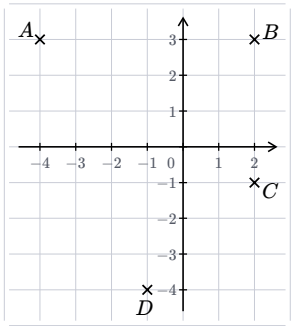
(d) Détermine le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle PGT
(valeur exacte du rayon).

(e) Maël arrondit à l'unité : $CR \approx 4$ et le rayon vaut environ 4, donc « la ruine est sur ce cercle ». A-t-il raison ? Justifie.

4. *Distance entre deux points*

À retenir : Repère orthonormé : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, l'ordre est indifférent et $(-4)^2 = 16$. Valeur exacte simplifiée : $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. $\sqrt{3^2+4^2} = 5 \neq 7$; $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$ mais $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.

Ex. 22 ★☆☆ **Lire puis mesurer** — Le repère est orthonormé. Utilise la figure ci-dessous. Donne chaque distance sous forme de valeur exacte simplifiée.



(a) Lis les coordonnées des points A, B, C et D.

(b) Calcule AB sans utiliser de racine carrée : A et B ont la même ordonnée.

(c) Calcule AC.

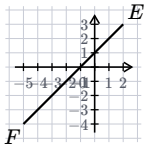
Ex. 22 (suite)

(d) Calcule CD.

(e) Calcule la distance OD entre l'origine O et le point D.

Ex. 23 ★☆☆ **Distances en série** — Le repère est orthonormé. Calcule chaque distance et donne sa valeur exacte, sous forme simplifiée.

(a) EF avec $E(2\,;\,3)$ et $F(-5\,;\,-4)$.



(b) MN avec $M(2{,}5\,;\,-1)$ et $N(-3{,}5\,;\,2)$.

(c) PQ avec $P\left(\frac{1}{2}\,;\,-2\right)$ et $Q\left(-\frac{5}{2}\,;\,2\right)$.

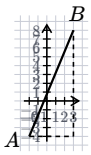
(d) RS avec $R(-3\,;\,-5)$ et $S(-3\,;\,2)$.

(e) OT avec O l'origine du repère et $T(-8\,;\,2)$.

(f) UV avec $U(0\,;\,-4)$ et $V(-2\,;\,1)$, puis son arrondi au centième.

Ex. 24 ★★☆ **Quatre copies à corriger** — Ben a relevé quatre raisonnements d'élèves. Dis si chacun est juste, justifie, puis donne le bon résultat sous forme de valeur exacte.

(a) Repère orthonormé, $A(-2\,;\,-4)$ et $B(3\,;\,8)$. Noé écrit : $AB = \sqrt{5^2+12^2} = 5+12 = 17$. A-t-il raison ? Justifie.

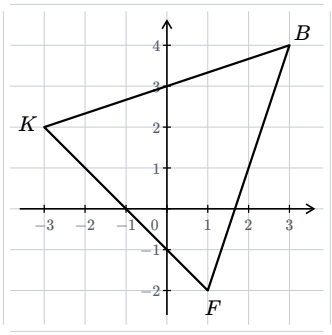


(b) Repère orthonormé, $C(5\,;\,-1)$ et $D(1\,;\,2)$. Mila écrit : $CD^2 = (-4)^2 + 3^2 = -16 + 9 = -7$, « la distance n'existe pas ». A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Repère orthonormé, $K(-1\,;\,5)$ et $L(0\,;\,-1)$. Jade calcule $(x_K - x_L)^2 + (y_K - y_L)^2$; Hugo dit qu'elle a inversé l'ordre et que c'est faux. Qui a raison ? Calcule KL.

(d) Repère orthogonal : en abscisse 1 unité = 1 cm, en ordonnée 1 unité = 2 cm. Inès trouve $GH = \sqrt{13}$ cm pour $G(1\,;\,1)$ et $H(4\,;\,3)$. Explique son erreur puis calcule GH en cm.

Ex. 25 ★★☆ **Allées du parc** — Sur le plan d'un parc, dans un repère orthonormé d'unité 10 m, on place le kiosque $K(-3\,;\,2)$, la fontaine $F(1\,;\,-2)$ et le banc $B(3\,;\,4)$. Des allées droites relient ces trois lieux.



(a) Calcule les valeurs exactes simplifiées de KF, FB et KB.

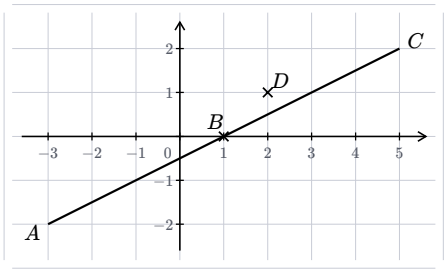
(b) Déduis-en le périmètre exact du triangle KFB, sous forme simplifiée.

(c) Tom affirme que ce périmètre vaut $8\sqrt{12}$. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Donne la longueur totale des allées en mètres, arrondie au mètre.

(e) L'entrée du parc est à l'origine O du repère. Lequel des trois lieux K, F, B est le plus proche de l'entrée ? Justifie.

Ex. 26 ★★★ **Sur le segment ou pas ?** — Le repère est orthonormé. On donne $A(-3\,;\,-2)$, $B(1\,;\,0)$, $C(5\,;\,2)$ et $D(2\,;\,1)$. On rappelle : un point B appartient au segment $[AC]$ si et seulement si $AB + BC = AC$. Donne les distances en valeur exacte simplifiée.



(a) Calcule AB, BC et AC.

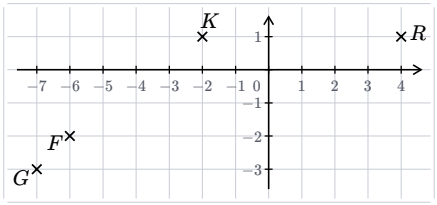
(b) Léa écrit : « $AB + BC = \sqrt{20} + \sqrt{20} = \sqrt{40}$ ». A-t-elle raison ? Justifie. Le point B appartient-il au segment $[AC]$?

(c) Calcule AD et DC.

(d) Sacha arrondit à l'unité : « $AD + DC \approx 9$ et $AC \approx 9$, donc D appartient à $[AC]$ ». A-t-il raison ? Justifie en comparant $(AD + DC)^2$ et AC^2.

(e) À l'aide des questions précédentes, que représente le point B pour le segment $[AC]$? Vérifie avec la formule du milieu.

Ex. 27 ★★★ **Antenne relais** — Sur une carte, dans un repère orthonormé d'origine O et d'unité 1 km, une antenne relais est placée en $K(-2\,;\,1)$. Elle couvre tous les lieux situés à 5 km d'elle ou moins. On place la ferme $F(-6\,;\,-2)$, le gîte $G(-7\,;\,-3)$ et le château $R(4\,;\,1)$.



(a) La mairie est en O. Calcule la distance OK : donne sa valeur exacte, puis un arrondi à 0,01 km.

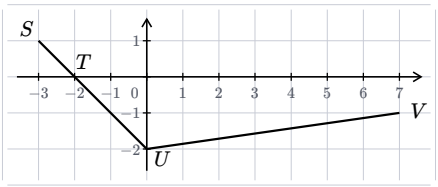
(b) Calcule KF. La ferme est-elle couverte ?

(c) Le gîte est-il couvert ? Justifie en comparant des carrés, sans calculer de racine.

(d) Les points K et R ont la même ordonnée. Calcule KR sans utiliser toute la formule. Le château est-il couvert ?

(e) Une route rectiligne relie tous les points d'ordonnée -3. Trouve les points de cette route situés exactement à 5 km de l'antenne.

Ex. 28 ★★★ **Trajet d'un drone** — Un drone survole un terrain muni d'un repère orthonormé. Il part de $S(-3\,;\,1)$, passe par $T(-2\,;\,0)$ puis $U(0\,;\,-2)$ et se pose en $V(7\,;\,-1)$, en ligne droite entre deux points. Donne les longueurs en valeur exacte simplifiée.



(a) Calcule ST, TU et UV.

(b) Calcule la longueur exacte du trajet $S \to T \to U \to V$, sous forme simplifiée.

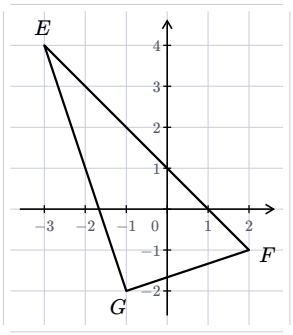
(c) Le drone revient en ligne droite de V à S. Calcule SV.

(d) Sans valeur approchée, justifie que le trajet aller est plus long que le retour.

5. *Nature d'un triangle par le calcul*

À retenir : Calcule les trois carrés (valeurs exactes). Plus grand = somme des deux autres : rectangle au sommet opposé (réciproque du théorème de Pythagore). Sinon : non rectangle (contraposée). Deux carrés égaux : isocèle ; trois : équilatéral.

Ex. 29 ★☆☆ **Trois carrés, puis on conclut** — Dans un repère orthonormé, on donne $E(-3\,;\,4)$, $F(2\,;\,-1)$ et $G(-1\,;\,-2)$.



a) Calcule EF^2.

b) Calcule FG^2.

c) Calcule EG^2.

d) Quel est le plus grand des trois carrés ? Compare-le à la somme des deux autres.

e) Le triangle EFG est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ? Justifie.

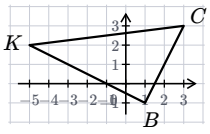
f) Calcule l'aire du triangle EFG en valeur exacte.

Ex. 30 ★☆☆ **Conclure à partir des longueurs** — Pour chaque triangle, trouve sa nature (isocèle, équilatéral, rectangle ou aucune de ces natures) et justifie.

a) Triangle RUV avec $RU^2 = 18$, $UV^2 = 18$ et $RV^2 = 36$.

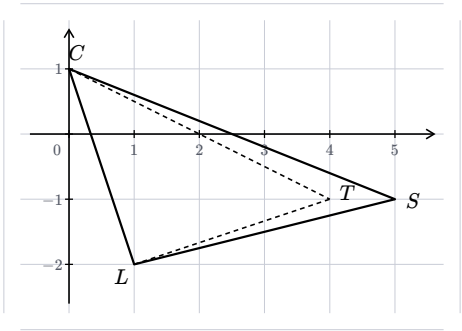
b) Triangle LNP avec $LN = \sqrt{20}$, $NP = 2\sqrt{5}$ et $LP = \sqrt{20}$.

c) Triangle BCK avec $B(1\,;\,-1)$, $C(3\,;\,3)$, $K(-5\,;\,2)$. Noé trouve $BC^2 = 20$, $BK^2 = 45$, $CK^2 = 65$. Il calcule $BC^2 + CK^2 = 85 \neq 45$ et conclut que le triangle n'est pas rectangle. A-t-il raison ? Justifie.



d) Triangle MQT avec $MQ = \sqrt{26}$, $QT = \sqrt{13}$ et $MT = 2\sqrt{10}$.

Ex. 31 ★★☆ **Il a l'air rectangle…** — Dans un repère orthonormé, on donne $C(0\,;\,1)$, $L(1\,;\,-2)$ et $S(5\,;\,-1)$. Sur le quadrillage, le triangle CLS semble rectangle en L. On donne aussi $T(4\,;\,-1)$.



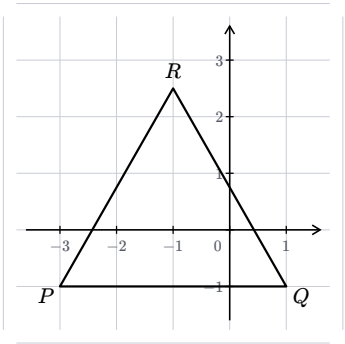
a) Calcule LS^2, LC^2 et CS^2.

b) Le triangle CLS est-il rectangle ? Justifie.

c) Hugo arrondit les longueurs à l'unité : $LS \approx 4$, $LC \approx 3$, $CS \approx 5$. Comme $3^2 + 4^2 = 5^2$, il conclut que CLS est rectangle en L. Explique son erreur.

d) Quelle est la nature du triangle CLT ? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **Les balises du drone** — Un drone vole entre trois balises placées dans un repère orthonormé (unité : 10 m) : $P(-3\,;\,-1)$, $Q(1\,;\,-1)$ et $R(-1\,;\,2{,}5)$.



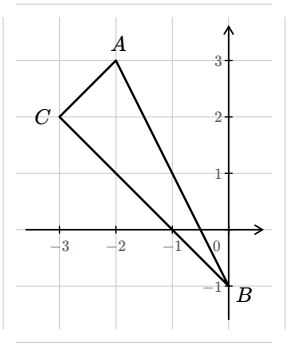
a) Calcule PQ^2, PR^2 et QR^2.

b) Zoé affirme : « Le triangle PQR est équilatéral. » A-t-elle raison ? Justifie.

c) Le triangle PQR est-il rectangle ? Justifie.

d) On note H le milieu de $[PQ]$. Calcule les coordonnées de H et la longueur RH, puis l'aire du triangle PQR en m^2.

Ex. 33 ★★★ **Le bon sommet et le cercle circonscrit** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2\,;\,3)$, $B(0\,;\,-1)$ et $C(-3\,;\,2)$.



(a) Calcule AB^2, AC^2 et BC^2.

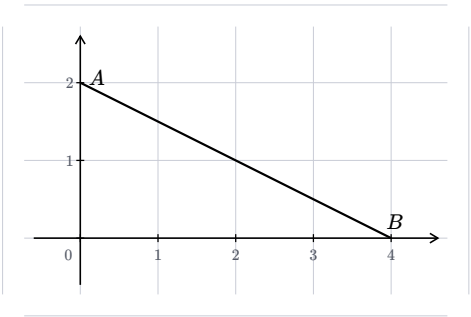
(b) Inès écrit : « $AB^2 = AC^2 + BC^2$, donc ABC est rectangle en A. » Explique son erreur, puis conclus en citant le théorème utilisé.

(c) Donne les coordonnées du centre K et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Justifie.

(d) Le point $D(-2\,;\,-1)$ est-il sur ce cercle ? Justifie.

(e) Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Le portail du jeu vidéo** — Dans un jeu vidéo, l'écran est muni d'un repère orthonormé (unité : 1 case). Le héros est en $A(0\,;\,2)$, le coffre en $B(4\,;\,0)$. On veut placer un portail P sur l'axe des abscisses pour que le triangle ABP soit rectangle en A.



(a) Calcule AB^2.

(b) On note $P(x\,;\,0)$. Exprime AP^2 et BP^2 en fonction de x.

(c) Quel côté est l'hypoténuse de ABP ? Déduis-en une équation, puis les coordonnées de P.

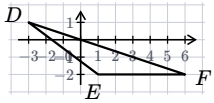
(d) Léo place le portail à l'origine O. Le triangle ABO est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ? Ce choix convient-il ? Justifie.

(e) Calcule la valeur exacte de l'aire du triangle ABP.

Ex. 35 ★★★ **Quatre triangles à l'épreuve** — Dans un repère orthonormé, on étudie plusieurs triangles. Chaque réponse se justifie par les trois carrés de longueurs et un théorème ou une définition cités.

(a) Vrai ou faux ? Justifie : le triangle KLM avec $K(-2\,;\,-1)$, $L(2\,;\,-1)$ et $M(0\,;\,-1+2\sqrt{3})$ est équilatéral.

(b) Maëlle affirme que le triangle DEF, avec $D(-3\,;\,1)$, $E(1\,;\,-2)$ et $F(6\,;\,-2)$, est isocèle en D. A-t-elle raison ? Précise la nature de DEF.



(c) Sacha dit : « Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, alors ABC n'est pas rectangle. » Montre qu'il a tort avec $A(-3\,;\,3)$, $B(1\,;\,3)$ et $C(1\,;\,-3)$.

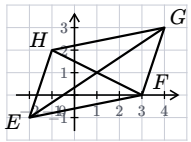
(d) Calcule la valeur exacte de l'aire du triangle UVW avec $U(-4\,;\,-3)$, $V(-2\,;\,-1)$ et $W(1\,;\,-4)$.

6. *Nature d'un quadrilatère par le calcul*

À retenir : $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Puis côtés consécutifs : $AB = BC \rightarrow$ losange ; diagonales : $AC = BD \rightarrow$ rectangle ; les deux $\rightarrow$ carré. Ex. : $AB = BC$ mais $AC \neq BD$: losange, pas carré.

Ex. 36 ★☆☆ **Parallélogramme ou pas ?** — Dans chaque cas, calcule les milieux des deux diagonales du quadrilatère. Dis s'il est un parallélogramme.

(a) $EFGH$ avec $E(-2\,;\,-1)$, $F(3\,;\,0)$, $G(4\,;\,3)$, $H(-1\,;\,2)$.



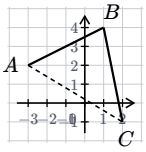
(b) $MNPQ$ avec $M(1\,;\,-3)$, $N(5\,;\,-2)$, $P(6\,;\,2)$, $Q(1\,;\,1)$.

(c) $RSTU$ avec $R(-4\,;\,2)$, $S(-1\,;\,-2)$, $T(2\,;\,1)$, $U(-1\,;\,5)$.

(d) $ABCD$ avec $A(-0{,}5\,;\,-3)$, $B(1{,}5\,;\,1)$, $C(-2{,}5\,;\,3)$, $D(-4{,}5\,;\,-1)$.

Ex. 37 ★☆☆ **Trouver le quatrième sommet** — Dans chaque cas, le quadrilatère est un parallélogramme. Calcule les coordonnées du sommet manquant, puis contrôle avec le milieu de l'autre diagonale.

(a) $ABCD$ avec $A(-3\,;\,2)$, $B(1\,;\,4)$, $C(2\,;\,-1)$: trouve D.



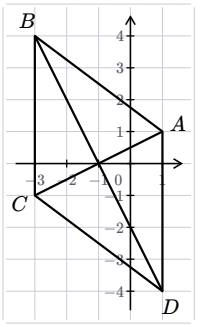
(b) $EFGH$ avec $E(4\,;\,-1)$, $F(6\,;\,3)$, $H(-2\,;\,0)$: trouve G.

Ex. 37 **(suite)**

(c) $RSTU$ avec $S(-5\,;\,-2)$, $T(-1\,;\,-4)$, $U(0\,;\,1)$: trouve R.

(d) $KLMN$ avec $K(1\,;\,0)$, $L(4\,;\,-3)$, $N(-1\,;\,-2)$: trouve M.

Ex. 38 ★★☆ **Le massif du parc** — Sur le plan d'un parc, dans un repère orthonormé (unité : 1 m), un massif de fleurs a pour sommets $A(1\,;\,1)$, $B(-3\,;\,4)$, $C(-3\,;\,-1)$ et $D(1\,;\,-4)$.



(a) Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifie.

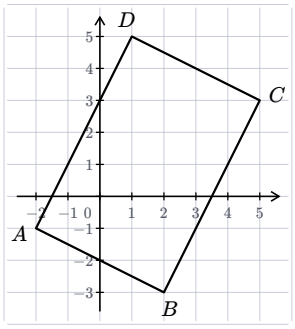
(b) Calcule AB^2 et BC^2. Qu'en déduis-tu pour $ABCD$? Justifie.

(c) Calcule les longueurs AC et BD en valeur exacte (radical simplifié).

(d) Zoé affirme : « Les quatre côtés sont égaux, donc $ABCD$ est un carré. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) L'aire d'un losange vaut $\frac{AC \times BD}{2}$, où AC et BD sont ses diagonales. Calcule l'aire du massif en m².

Ex. 39 ★★☆ **Hugo et Inès se trompent** — Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2\,;\,-1)$, $B(2\,;\,-3)$, $C(5\,;\,3)$ et $D(1\,;\,5)$.



(a) Hugo calcule les milieux de $[AB]$ et de $[CD]$, les trouve différents et conclut : « $ABCD$ n'est pas un parallélogramme. » Explique son erreur, puis conclus correctement.

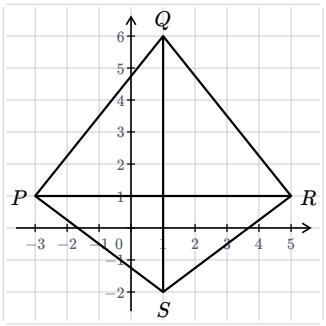
(b) Inès remarque que $AB = CD$ et affirme : « $ABCD$ est un losange. » Calcule AB^2 et BC^2. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 39 **(suite)**

(c) Calcule AC^2 et BD^2. Quelle est la nature la plus précise de $ABCD$? Justifie.

(d) Calcule l'aire de $ABCD$ (en unités d'aire).

Ex. 40 ★★★ **La gemme du jeu vidéo** — Dans un jeu vidéo, une gemme est dessinée sur l'écran dans un repère orthonormé (unité : 1 cm). Ses sommets sont $P(-3\,;\,1)$, $Q(1\,;\,6)$, $R(5\,;\,1)$ et $S(1\,;\,-2)$.



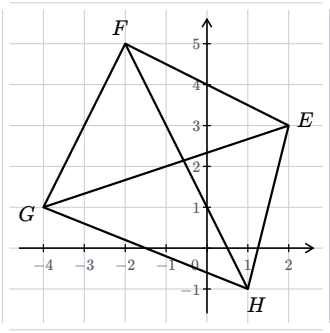
(a) Calcule PQ^2 et QR^2, puis les longueurs PR et QS.

(b) Jade affirme : « Deux côtés consécutifs sont égaux et les diagonales ont la même longueur, donc $PQRS$ est un carré. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Le graphiste garde P et R et veut un carré $PVRW$ de diagonale $[PR]$, avec V et W d'abscisse 1 et $y_V > y_W$. Trouve V et W, puis justifie que $PVRW$ est un carré.

(d) Calcule l'aire exacte du carré $PVRW$.

Ex. 41 ★★★ **Les balises du drone** — Sur un terrain d'essai, un repère orthonormé est choisi (unité : 100 m). Quatre balises sont placées en $E(2\,;\,3)$, $F(-2\,;\,5)$, $G(-4\,;\,1)$ et $H(1\,;\,-1)$. Un drone doit faire le tour d'un parallélogramme.



(a) Le quadrilatère $EFGH$ est-il un parallélogramme ? Justifie.

(b) On déplace la balise H en un point P tel que $EFGP$ soit un parallélogramme. Calcule les coordonnées de P.

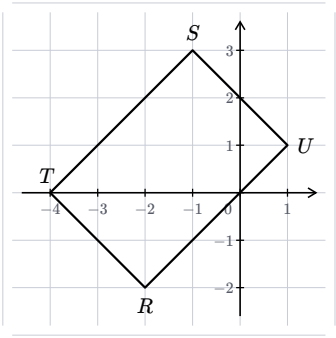
(c) Détermine la nature la plus précise de $EFGP$. Justifie en respectant l'ordre des étapes.

Ex. 41 **(suite)**

(d) Le drone parcourt $E \to F \to G \to P \to E$. Calcule la longueur exacte de ce trajet.

(e) Le drone survole ensuite le cercle qui passe par E, F, G et P. Donne son centre et son rayon exact. Justifie.

Ex. 42 ★★★ **L'aire de jeux** — Sur le plan d'une aire de jeux, dans un repère orthonormé (unité : 1 m), les quatre coins de la zone de sable sont $T(-4\,;\,0)$, $R(-2\,;\,-2)$, $U(1\,;\,1)$ et $S(-1\,;\,3)$. La zone est le quadrilatère $TRUS$.



(a) Nomme les deux diagonales du quadrilatère $TRUS$. $TRUS$ est-il un parallélogramme ? Justifie.

(b) Calcule TR^2, RU^2 et TU^2. Le triangle TRU est-il rectangle ? Justifie.

(c) Déduis-en la nature la plus précise de $TRUS$. Justifie.

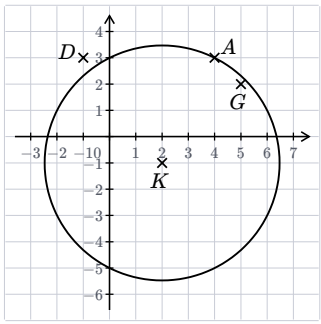
(d) Retrouve la nature de $TRUS$ d'une autre façon, en comparant les longueurs des diagonales.

(e) Calcule l'aire exacte de la zone de sable.

7. *Cercles et points équidistants*

À retenir : M est sur le cercle de centre K et de rayon r $\Leftrightarrow KM^2 = r^2$ (ex. : $K(0\,;\,0)$, $M(3\,;\,4)$, $KM^2 = 25 = 5^2$). Compare les carrés, pas des arrondis. Sur l'axe : $M(x\,;\,0)$ et $MA^2 = MB^2$, les x^2 s'éliminent ; ce n'est pas le milieu de [AB]. Triangle rectangle : le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Ex. 43 ★☆☆ **Sur, dans ou hors du cercle** — Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $K(2\,;\,-1)$ et de rayon $r = 2\sqrt{5}$.



(a) Calcule KA^2 pour $A(4\,;\,3)$ et r^2. Le point A est-il sur $\mathcal{C}$? Justifie.

(b) Les points $G(5\,;\,2)$ et $D(-1\,;\,3)$ sont-ils sur $\mathcal{C}$, à l'intérieur ou à l'extérieur ? Justifie.

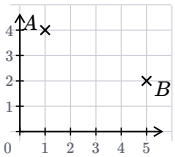
(c) Pour $E(2{,}5\,;\,3{,}5)$, Noé trouve $KE \approx 4{,}5$ et $r \approx 4{,}5$ au dixième. Il en conclut que E est sur $\mathcal{C}$. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Le segment [AF] est un diamètre de $\mathcal{C}$. Calcule les coordonnées de F.

(e) Calcule la valeur exacte de la longueur AF.

Ex. 44 ★☆☆ **Le point d'un axe à égale distance** — Le repère est orthonormé. Un point M est équidistant de A et B si $MA^2 = MB^2$.

(a) Trouve le point M de l'axe des abscisses équidistant de $A(1\,;\,4)$ et $B(5\,;\,2)$.

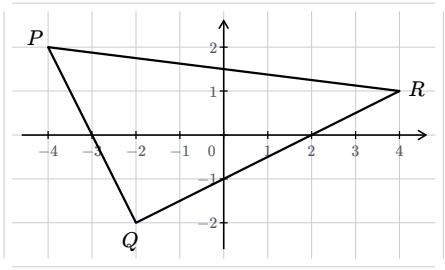


(b) Ilan pense que le point M trouvé est le milieu de [AB]. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Trouve le point P de l'axe des ordonnées équidistant de $C(-3\,;\,2)$ et $D(1\,;\,-4)$.

(d) Vrai ou faux : le point $N(2\,;\,0)$ est sur la médiatrice de [EF], avec $E(-1\,;\,3)$ et $F(5\,;\,1)$. Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Une allée circulaire dans le parc** — Sur le plan d'un parc, dans un repère orthonormé, trois arbres sont en $P(-4\,;\,2)$, $Q(-2\,;\,-2)$ et $R(4\,;\,1)$. On veut tracer une allée circulaire qui passe par les trois arbres.



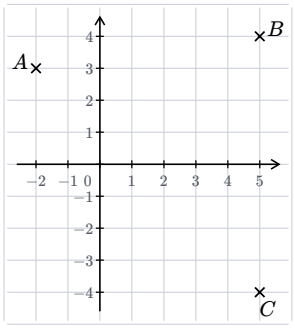
(a) Calcule PQ^2, QR^2 et PR^2.

(b) Le triangle PQR est-il rectangle ? Justifie.

(c) Détermine le centre K et le rayon exact r du cercle circonscrit au triangle PQR.

(d) Une fontaine est en $V(-4\,;\,1)$. Est-elle sur l'allée ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **Une antenne relais au bord de la route** — Sur une carte, dans un repère orthonormé (unité : 1 km), trois villages sont en $A(-2\,;\,3)$, $B(5\,;\,4)$ et $C(5\,;\,-4)$. La route suit l'axe des abscisses. On veut installer une antenne sur la route, à égale distance des trois villages.



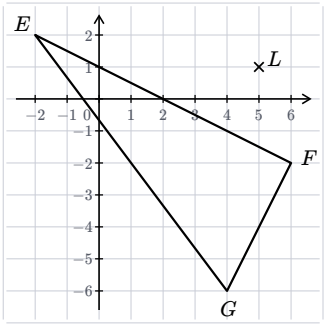
(a) On pose $M(x\,;\,0)$. Développe MA^2 et MB^2 en fonction de x.

(b) Déduis-en le point K de la route équidistant de A et B.

(c) Calcule KA^2, KB^2 et KC^2. L'antenne placée en K convient-elle ? Quelle portée minimale doit-elle avoir ?

(d) Léo affirme que l'antenne doit être au milieu de [AC], le plus grand côté du triangle ABC. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 47 ★★★ **Le cercle des plots** — Sur un terrain de sport, on se place dans un repère orthonormé (unité : 1 m). Trois plots sont posés en $E(-2\,;\,2)$, $F(6\,;\,-2)$ et $G(4\,;\,-6)$. On veut tracer à la craie le cercle qui passe par les trois plots.



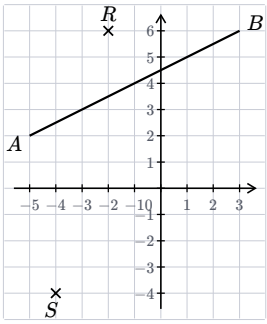
(a) Calcule EF^2, FG^2 et EG^2. Le triangle EFG est-il rectangle ? Justifie.

(b) Pour $L(5\,;\,1)$, Lucas trouve $LE^2 = LG^2 = 50$ et conclut que L est le centre du cercle. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Déduis-en le centre K du cercle. Quelle longueur de corde, fixée en K, faut-il pour le tracer ? Quel est son diamètre ?

(d) Un quatrième plot doit être posé sur le cercle, en un point d'abscisse -3. Trouve les deux positions possibles.

Ex. 48 ★★★ **Deux trésors, un seul chemin** — Dans un jeu vidéo, la carte est un repère orthonormé. Deux trésors sont cachés en $A(-5\,;\,2)$ et $B(3\,;\,6)$. Le personnage ne peut poser son camp que sur les axes. Il veut le placer à égale distance des deux trésors.



(a) Sami affirme : « Le point de l'axe des ordonnées équidistant de A et B est le milieu I de $[AB]$. » Calcule les coordonnées de I. A-t-il raison ? Justifie.

(b) On pose $M(0\,;\,y)$. Développe MA^2 et MB^2, puis trouve y tel que $MA = MB$. Vérifie ton résultat.

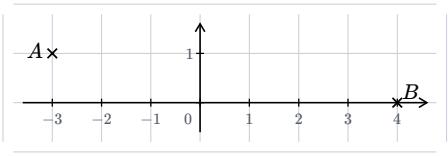
(c) Trouve le point N de l'axe des abscisses équidistant de A et B. Vérifie avec NA^2 et NB^2.

(d) On trace le cercle de centre N qui passe par A. Donne son rayon et son diamètre (radicaux simplifiés). Passe-t-il par $S(-4\,;\,-4)$? Justifie.

Ex. 48 **(suite)**

(e) Le point $R(-2\,;\,6)$ est-il sur la médiatrice de $[AB]$? Justifie.

Ex. 49 ★★★ **Le trésor du sentier** — Sur une carte au trésor, dans un repère orthonormé (unité : 10 m), deux rochers sont en $A(-3\,;\,1)$ et $B(4\,;\,0)$. Le trésor T est enterré sur le sentier, qui suit l'axe des ordonnées, à 50 m du rocher A.



(a) On note $T(0\,;\,y)$ le trésor. Exprime TA^2 en fonction de y, puis trouve les deux positions possibles du trésor.

(b) Le trésor est aussi à égale distance des rochers A et B. Laquelle des deux positions convient ? Justifie.

(c) Le segment [AA'] est un diamètre du cercle de centre T qui passe par A. Calcule les coordonnées de A', puis le diamètre du cercle en mètres.

(d) Le triangle ABA' est-il rectangle ? Justifie.