1. Coordonnées d'un point dans un repère

Ex. 1 ★☆☆ **Lire sur un repère gradué de 2 en 2**

(a) Une graduation vaut 2. P est à 2 graduations à droite et 3 au-dessus : $P(4\,;\,6)$. R est à 3 graduations à gauche et 1 au-dessus : $R(-6\,;\,2)$.

(b) Zoé a inversé abscisse et ordonnée. U est à 1 graduation à gauche (-2) et 4 en dessous (-8) : $U(-2\,;\,-8)$.

(c) $T(0\,;\,-4)$: son abscisse est nulle, T est sur l'axe des ordonnées. $S(6\,;\,0)$: son ordonnée est nulle, S est sur l'axe des abscisses.

(d) Abscisse 5 : on avance de $\frac{5}{2} = 2{,}5$ graduations vers la droite. Ordonnée -3 : on descend de 1,5 graduation. V est au centre d'un carreau du quadrillage.

(e) Les ordonnées sont 6 (P), 2 (R), -4 (T), -8 (U), 0 (S). La plus grande est 6 : c'est P.

Ex. 2 ★☆☆ **Symétriques : axes ou origine ?**

(a) Par rapport à l'axe des abscisses : $(x\,;\,-y)$. Le symétrique de A est $(4\,;\,7)$.

(b) Par rapport à l'axe des ordonnées : $(-x\,;\,y)$. Le symétrique de B est $(3{,}5\,;\,2)$.

(c) Par rapport à O : $(-x\,;\,-y)$. Le symétrique de C est $\left(-\frac{1}{2}\,;\,6\right)$.

(d) Non. On change les signes, on n'inverse pas les coordonnées : le symétrique de F par rapport à O est $(-2\,;\,5)$.

(e) Par rapport à l'axe des ordonnées, on change le signe de l'abscisse : $G(1\,;\,-4)$.

(f) Par rapport à l'axe des abscisses : $(x\,;\,-y)$. Le symétrique est $(-5\,;\,-0) = (-5\,;\,0)$: c'est H lui-même. H a une ordonnée nulle, il est sur l'axe des abscisses.

Ex. 3 ★★☆ **Un repère orthogonal non orthonormé**

(a) Sur l'axe des abscisses, 1 unité = 2 cm : $3 \times 2 = 6$ cm de l'axe des ordonnées. Sur l'axe des ordonnées, 1 unité = 1,5 cm : $4 \times 1{,}5 = 6$ cm de l'axe des abscisses.

(b) $2{,}5 \times 2 = 5$: B est à 5 cm à gauche de l'axe des ordonnées. $2 \times 1{,}5 = 3$: B est à 3 cm sous l'axe des abscisses.

Ex. 3 (suite)

(c) Non. Il faut diviser par l'unité de chaque axe : $\frac{4}{2} = 2$ et $\frac{4{,}5}{1{,}5} = 3$.
Donc $K(2\,;\,-3)$.

(d) Non : $2 \times 2 = 4$ cm de l'axe des ordonnées et $2 \times 1{,}5 = 3$ cm de l'axe des abscisses. Les unités sont différentes : le repère n'est pas orthonormé.

Ex. 4 ★★☆ **La carte d'un jeu vidéo**

(a) L'abscisse -4 est négative (ouest), l'ordonnée 3 est positive (nord) : le joueur est dans la zone nord-ouest.

(b) Symétrique par rapport à O : $(-x\,;\,-y)$, donc $C(4\,;\,-3)$. Abscisse positive, ordonnée négative : zone sud-est.

(c) D est sur l'axe des abscisses : son ordonnée est nulle. À l'ouest : abscisse négative.
Donc $D(-6\,;\,0)$. $E(0\,;\,5)$ a une abscisse nulle : l'entrée est sur la route nord-sud, au nord de la fontaine (ordonnée positive).

(d) Non. Par rapport à l'axe des ordonnées (la route nord-sud) : $(-x\,;\,y)$, donc $M(4\,;\,3)$. Inès a pris le symétrique de P par rapport à l'axe des abscisses (la route est-ouest).

(e) $a < 0$ (ouest) et $b < 0$ (sud) : zone sud-ouest. Son symétrique $(-a\,;\,-b)$ a $-a > 0$ et $-b > 0$: zone nord-est.

Ex. 5 ★★★ **Deux symétries à la suite**

(a) Le symétrique de $(x\,;\,y)$ par rapport à l'axe des abscisses est $(x\,;\,-y)$.
Donc $B(-3\,;\,-2{,}5)$. Le symétrique de $(x\,;\,y)$ par rapport à l'axe des ordonnées est $(-x\,;\,y)$. Ici $-(-3) = 3$, donc $C(3\,;\,-2{,}5)$.

(b) Le symétrique de $A(-3\,;\,2{,}5)$ par rapport à O est $(-(-3)\,;\,-2{,}5) = (3\,;\,-2{,}5)$: c'est le point C. Cas général : la première symétrie envoie $M(x\,;\,y)$ sur $(x\,;\,-y)$, la seconde envoie ce point sur $(-x\,;\,-y)$. On obtient le symétrique de M par rapport à O.

(c) Non. E a une abscisse nulle, donc E est sur l'axe des ordonnées. Son symétrique par rapport à cet axe est $(-0\,;\,-4) = (0\,;\,-4)$, c'est-à-dire E lui-même. Lina a échangé l'abscisse et l'ordonnée, et elle a changé le signe : $(4\,;\,0)$ est un point de l'axe des abscisses.

Ex. 5 **(suite)**

(d) $M(x\,;\,y)$ est son propre symétrique par rapport à O si $(-x\,;\,-y)=(x\,;\,y)$, c'est-à-dire si $-x=x$ et $-y=y$. Cela donne $2x=0$ et $2y=0$, donc $x=0$ et $y=0$. Un seul point convient : l'origine $O(0\,;\,0)$.

Ex. 6 ★★★ **Le plan d'un terrain de sport**

(a) Lou a fait deux erreurs. E est sur l'axe des ordonnées : c'est son abscisse qui est nulle, pas son ordonnée. Sur cet axe, une unité vaut 0,5 cm, donc 4 cm font $4\div 0{,}5=8$ unités, vers le bas.
Donc $E(0\,;\,-8)$.

(b) Largeur : $4-(-4)=8$ unités, soit $8\times 2=16$ cm. Hauteur : $10-(-10)=20$ unités, soit $20\times 0{,}5=10$ cm. Sur le plan, le rectangle mesure 16 cm sur 10 cm.

(c) M est à gauche, à $1{,}5\times 2=3$ cm de l'axe des ordonnées. Il est donc aussi à 3 cm de l'axe des abscisses, au-dessus. Son ordonnée est positive et vaut $3\div 0{,}5=6$.
Donc $M(-1{,}5\,;\,6)$.

(d) Faux. Contre-exemple : $M(-1{,}5\,;\,6)$ est à 3 cm de chacun des deux axes (question précédente), mais $4\times(-1{,}5)=-6$ et $-6\neq 6$. L'affirmation est donc fausse.

Ex. 7 ★★★ **La trajectoire d'un drone**

(a) Sur l'axe des ordonnées, l'abscisse est nulle : $2t-4=0$, donc $t=2$. L'ordonnée vaut alors $5-2=3$. Le drone traverse l'axe des ordonnées à $t=2$ min, au point $(0\,;\,3)$.

(b) Non. Sur l'axe des abscisses, c'est l'ordonnée qui est nulle : $5-t=0$, donc $t=5$. L'abscisse vaut alors $2\times 5-4=6$, et le point traversé est $(6\,;\,0)$. Vérifions $(3\,;\,0)$: $2t-4=3$ donne $t=3{,}5$, puis $5-3{,}5=1{,}5\neq 0$. Le drone ne passe pas par $(3\,;\,0)$.

(c) Non. Pour être en $O(0\,;\,0)$, il faudrait $2t-4=0$ et $5-t=0$ au même instant. Or la première égalité donne $t=2$ et la seconde $t=5$. Les deux coordonnées ne sont jamais nulles en même temps.

(d) Le symétrique de $A(-4\,;\,5)$ par rapport à O est $A'(4\,;\,-5)$. Abscisse : $2t-4=4$ donne $t=4$. À cet instant, l'ordonnée vaut $5-4=1\neq -5$. Le drone ne passe donc pas par A'.

(e) On résout $2t-4=5-t$, soit $3t=9$, donc $t=3$. Alors $2\times 3-4=2$ et $5-3=2$. À $t=3$ min, le drone est au point $(2\,;\,2)$.

2. *Coordonnées du milieu*

Ex. 8 ★☆☆ **Calculer des milieux**

(a) $x=\frac{-4+6}{2}=1$ et $y=\frac{7+(-1)}{2}=3$. Le milieu de $[EF]$ est le point $(1\,;\,3)$.

(b) $x=\frac{-6+(-1)}{2}=-3{,}5$ et $y=\frac{-2+4}{2}=1$. Le milieu de $[GH]$ est le point $(-3{,}5\,;\,1)$.

(c) $x=\frac{0+8}{2}=4$ et $y=\frac{-5+3}{2}=-1$. Le milieu de $[KL]$ est le point $(4\,;\,-1)$.

(d) $x=\frac{1{,}5+(-4{,}5)}{2}=-1{,}5$ et $y=\frac{-2+6}{2}=2$. Le milieu de $[RS]$ est le point $(-1{,}5\,;\,2)$.

(e) $x=\frac{-7+(-2)}{2}=-4{,}5$ et $y=\frac{3+(-3)}{2}=0$. Le milieu de $[TU]$ est le point $(-4{,}5\,;\,0)$: il est sur l'axe des abscisses.

(f) $x=\frac{\frac{1}{3}+1}{2}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ et $y=\frac{4+(-5)}{2}=-0{,}5$. Le milieu de $[XY]$ est le point $\left(\frac{2}{3}\,;\,-0{,}5\right)$.

Ex. 9 ★☆☆ **Retrouver une extrémité, un symétrique**

(a) $x_B=2x_I-x_A=2\times 2-5=-1$ et $y_B=2\times(-1)-3=-5$.
Donc $B(-1\,;\,-5)$. Contrôle : $\frac{5+(-1)}{2}=2$ et $\frac{3+(-5)}{2}=-1$.

(b) $x_D=2\times(-3)-(-1)=-5$ et $y_D=2\times 0-4=-4$.
Donc $D(-5\,;\,-4)$.

(c) K est le milieu de $[VV']$: $x_{V'}=2\times 1-4=-2$ et $y_{V'}=2\times(-2)-(-6)=2$.
Donc $V'(-2\,;\,2)$.

(d) E est le milieu de $[FF']$: $x_{F'}=2\times 0{,}5-(-2)=3$ et $y_{F'}=2\times 3-1=5$.
Donc $F'(3\,;\,5)$.

(e) J est le milieu de $[PQ]$, donc $x_Q=2\times(-1)-3=-5$ et $y_Q=2\times 0{,}5-(-4)=5$.
Donc $Q(-5\,;\,5)$.

Ex. 10 ★★☆ **L'erreur de Tom**

(a) Tom a pris la moitié de la différence des coordonnées. Or le milieu s'obtient avec la demi-somme : $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$.

(b) $x_I=\frac{-5+3}{2}=-1$ et $y_I=\frac{2+(-4)}{2}=-1$.
Donc $I(-1\,;\,-1)$.

(c) $x_A+4=-5+4=-1$ et $y_A+(-3)=2+(-3)=-1$: on retrouve $I(-1\,;\,-1)$. Les nombres 4 et -3 indiquent de combien on se déplace pour aller de A à I. Ce ne sont pas les coordonnées du milieu.

Ex. 10 **(suite)**

(d) $x_J = \frac{3+0}{2} = 1{,}5$ et $y_J = \frac{-4+7}{2} = 1{,}5$.
Donc $J(1{,}5\,;\,1{,}5)$.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux autour du milieu**

(a) Vrai. Le calcul le confirme : $\frac{-4+2}{2} = -1$ et $\frac{1+(-1)}{2} = 0$.
Le milieu de $[PQ]$ est bien $M(-1\,;\,0)$.

(b) Faux. On a bien $RP^2 = (0-(-4))^2 + (3-1)^2 = 20$ et $RQ^2 = (0-2)^2 + (3-(-1))^2 = 20$, donc $RP = RQ = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Mais le milieu de $[PQ]$ est $M(-1\,;\,0)$, et $R(0\,;\,3)$ est un autre point. Un point équidistant de P et Q n'est pas forcément le milieu de $[PQ]$.

(c) Faux. Contre-exemple : le milieu $M(-1\,;\,0)$ de $[PQ]$ est sur l'axe des abscisses. Pourtant $P(-4\,;\,1)$ et $Q(2\,;\,-1)$ n'y sont pas, car leurs ordonnées ne sont pas nulles. Il suffit que $y_P + y_Q = 0$.

(d) Faux. R est le milieu de $[QS]$, donc $x_S = 2\times 0 - 2 = -2$ et $y_S = 2\times 3 - (-1) = 7$. Le symétrique est $S(-2\,;\,7)$. On trouve 5 si l'on oublie les parenthèses autour de -1.

Ex. 12 ★★★ **Milieu dans un repère non orthonormé**

(a) Non. La formule du milieu n'utilise aucune longueur : elle est vraie dans tout repère. $x_K = \frac{-4+2}{2} = -1$ et $y_K = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.
Donc $K(-1\,;\,0{,}5)$.

(b) K est le milieu de $[CD]$, donc $x_D = 2x_K - x_C = 2\times(-1) - 5 = -7$ et $y_D = 2y_K - y_C = 2\times 0{,}5 - 1 = 0$.
Donc $D(-7\,;\,0)$: son ordonnée est nulle, donc D est sur l'axe des abscisses.

(c) Faux. Par construction, le milieu de $[CD]$ est K.
Contrôle : $\frac{5+(-7)}{2} = -1$ et $\frac{1+0}{2} = 0{,}5$. Son ordonnée vaut 0,5 et pas 0 : qu'une seule extrémité soit sur l'axe ne suffit pas.

(d) La formule de la distance n'est valable que dans un repère orthonormé. Ici, une unité vaut 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées. Les axes sont perpendiculaires : l'écart horizontal vaut $6\times 1 = 6$ cm et l'écart vertical $5\times 2 = 10$ cm. D'après le théorème de Pythagore, $AB = \sqrt{6^2+10^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$ cm.

Ex. 13 ★★★ **Antennes relais : équidistant ou milieu ?**

(a) $x_M = \frac{-4+4}{2} = 0$ et $y_M = \frac{-2+4}{2} = 1$.
Donc $M(0\,;\,1)$.

Ex. 13 **(suite)**

(b) $RA = \sqrt{(-4-(-3))^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ km et $RB = \sqrt{(4-(-3))^2 + (4-5)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ km.
Donc $RA = RB$.

(c) Non. Le milieu de $[AB]$ est $M(0\,;\,1)$, et $R(-3\,;\,5)$ n'a pas ces coordonnées. R est équidistant de A et de B, donc il est sur la médiatrice de $[AB]$, mais il n'est pas sur le segment $[AB]$. Le milieu est le seul point équidistant de A et de B qui soit sur $[AB]$.

(d) M est le milieu de $[RE]$, donc $x_E = 2\times 0 - (-3) = 3$ et $y_E = 2\times 1 - 5 = -3$.
Donc $E(3\,;\,-3)$.

(e) Les diagonales sont $[AB]$ et $[RE]$. Milieu de $[RE]$: $\left(\frac{-3+3}{2}\,;\,\frac{5+(-3)}{2}\right) = (0\,;\,1)$. C'est M, le milieu de $[AB]$. Or un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. De plus, $RA = RB$: un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange. Enfin, $AB = \sqrt{(4-(-4))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{100} = 10$ et $RE = \sqrt{(3-(-3))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{100} = 10$. Un losange dont les diagonales ont la même longueur est un carré.
Donc $ARBE$ est un carré.

Ex. 14 ★★★ **Le trajet du drone**

(a) $\frac{x_A+x_B}{2} = \frac{4+(-2)}{2} = 1 = x_P$ et $\frac{y_A+y_B}{2} = \frac{-5+3}{2} = -1 = y_P$.
Les coordonnées sont les mêmes : P est bien le milieu de $[AB]$.

(b) C est sur l'axe des ordonnées, donc $C(0\,;\,y_C)$. La condition $y_N = \frac{-5+y_C}{2} = 0$ donne $-5 + y_C = 0$, soit $y_C = 5$: $C(0\,;\,5)$. Ensuite, $x_N = \frac{4+0}{2} = 2$ et $y_N = \frac{-5+5}{2} = 0$: $N(2\,;\,0)$.

(c) La calculatrice fait la division avant l'addition : $3 + 5 \div 2 = 3 + 2{,}5 = 5{,}5$. Il faut des parenthèses autour de la somme : $y_Q = \frac{3+5}{2} = 4$. De même, $x_Q = \frac{-2+0}{2} = -1$.
Donc $Q(-1\,;\,4)$.

(d) Les diagonales de $PNCQ$ sont $[PC]$ et $[NQ]$. Milieu de $[PC]$: $\left(\frac{1+0}{2}\,;\,\frac{-1+5}{2}\right) = (0{,}5\,;\,2)$. Milieu de $[NQ]$: $\left(\frac{2+(-1)}{2}\,;\,\frac{0+4}{2}\right) = (0{,}5\,;\,2)$. Les diagonales ont le même milieu. Or un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme.
Donc $PNCQ$ est un parallélogramme.

3. Retrouver une extrémité ou un symétrique

Ex. 15 ★☆☆ **Retrouver une extrémité**

(a) $x_B = 2x_K - x_A = 2 \times 2 - (-1) = 5$ et $y_B = 2y_K - y_A = 2 \times 1 - 3 = -1$.
Donc $B(5\,;\,-1)$.

(b) $O(0\,;\,0)$ est le milieu de $[CD]$: $x_D = 2 \times 0 - 2 = -2$ et $y_D = 2 \times 0 - (-4) = 4$.
Donc $D(-2\,;\,4)$: c'est le symétrique de C par rapport à l'origine.

(c) $x_F = 2 \times 1{,}5 - 4 = -1$ et $y_F = 2 \times (-2) - (-3{,}5) = -4 + 3{,}5 = -0{,}5$.
Donc $F(-1\,;\,-0{,}5)$.

(d) N est sur l'axe des ordonnées, donc $N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$. $x_Q = 2 \times 0 - (-5) = 5$ et $y_Q = 2 \times \frac{1}{2} - 3 = -2$.
Donc $Q(5\,;\,-2)$.

(e) $x_T = 2 \times (-3) - (-7) = 1$ et $y_T = 2 \times (-5) - (-1) = -9$.
Donc $T(1\,;\,-9)$. Vérification : $\frac{-7+1}{2} = -3$ et $\frac{-1+(-9)}{2} = -5$: on retrouve bien R.

Ex. 16 ★☆☆ **Symétrique d'un point par rapport à un point**

(a) K est le milieu de $[AA']$: $x_{A'} = 2 \times 1 - 5 = -3$ et $y_{A'} = 2 \times (-1) - 2 = -4$.
Donc $A'(-3\,;\,-4)$.

(b) Milieu de $[PZ]$: $\frac{3+(-5)}{2} = -1$ et $\frac{-6+(-10)}{2} = -8$. Ce milieu est $(-1\,;\,-8)$, pas $H(-1\,;\,-2)$: Z n'est pas le symétrique de P. Calcul juste : $x_{P'} = 2 \times (-1) - 3 = -5$ et $y_{P'} = 2 \times (-2) - (-6) = -4 + 6 = 2$.
Donc $P'(-5\,;\,2)$. L'erreur sur Z vient du signe : $-(-6) = +6$.

(c) $x_{L'} = 2 \times (-1) - 0 = -2$ et $y_{L'} = 2 \times (-2) - 4 = -8$.
Donc $L'(-2\,;\,-8)$.

(d) $x_{E'} = 2 \times 0 - (-1) = 1$ et $y_{E'} = 2 \times 4 - (-2) = 10$.
Donc $E'(1\,;\,10)$. Ce n'est pas le même point que $L'(-2\,;\,-8)$: le centre de symétrie n'est pas le même.

(e) V est le milieu de $[UU']$, donc U est le symétrique de U' par rapport à V : $x_U = 2 \times (-0{,}5) - (-3{,}5) = -1 + 3{,}5 = 2{,}5$ et $y_U = 2 \times 1{,}5 - 4 = -1$.
Donc $U(2{,}5\,;\,-1)$.

(f) T est le milieu de $[RS]$: $x_T = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $y_T = \frac{3+(-1)}{2} = 1$.
Donc $T(1\,;\,1)$.

Ex. 17 ★★☆ **Trois élèves, une extrémité**

(a) Avec $B(4\,;\,-5)$: $\frac{-3+4}{2} = 0{,}5$ et $\frac{4+(-5)}{2} = -0{,}5$. Le milieu serait $(0{,}5\,;\,-0{,}5)$, pas $I(1\,;\,-1)$. Léa a tort : il faut $x_B = 2x_I - x_A$.

(b) Avec $B(0{,}5\,;\,-0{,}5)$: $\frac{-3+0{,}5}{2} = -1{,}25$ et $\frac{4+(-0{,}5)}{2} = 1{,}75$. Le milieu serait $(-1{,}25\,;\,1{,}75)$, pas I. Malik a tort.

(c) $x_B = 2 \times 1 - (-3) = 5$ et $y_B = 2 \times (-1) - 4 = -6$.
Donc $B(5\,;\,-6)$. Vérification : $\frac{-3+5}{2} = 1$ et $\frac{4+(-6)}{2} = -1$: on retrouve bien I.

(d) $2 \times (-1) = -2$, donc $y_B = -2 - 4 = -6$. Inès s'est trompée de signe : elle a calculé $-2 + 4$.

Ex. 18 ★★☆ **La quatrième tour**

(a) $x_K = \frac{-4+3}{2} = -0{,}5$ et $y_K = \frac{1+(-2)}{2} = -0{,}5$.
Donc $K(-0{,}5\,;\,-0{,}5)$.

(b) Non : K est le milieu de $[AC]$, donc le symétrique de A par rapport à K est C. Les diagonales de $ABCD$ sont $[AC]$ et $[BD]$. Elles ont le même milieu, donc D est le symétrique de B par rapport à K : $x_D = 2 \times (-0{,}5) - 1 = -2$ et $y_D = 2 \times (-0{,}5) - 3 = -4$.
Donc $D(-2\,;\,-4)$.

(c) $\frac{1+(-2)}{2} = -0{,}5$ et $\frac{3+(-4)}{2} = -0{,}5$: le milieu de $[BD]$ est bien K. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

(d) Les diagonales de $ABEC$ sont $[AE]$ et $[BC]$. Milieu de $[BC]$: $\frac{1+3}{2} = 2$ et $\frac{3+(-2)}{2} = 0{,}5$. E est le symétrique de A par rapport à ce point : $x_E = 2 \times 2 - (-4) = 8$ et $y_E = 2 \times 0{,}5 - 1 = 0$.
Donc $E(8\,;\,0)$. Ce n'est pas D : l'ordre des lettres change le parallélogramme.

Ex. 19 ★★★ **Symétries en chaîne**

(a) K est le milieu de $[AA']$, donc $x_{A'} = 2x_K - x_A = 2 \times (-1) - (-3) = -2 + 3 = 1$ et $y_{A'} = 2y_K - y_A = 2 \times (-1) - 2 = -4$.
Donc $A'(1\,;\,-4)$. Contrôle : $\frac{-3+1}{2} = -1$ et $\frac{2+(-4)}{2} = -1$. On retrouve bien $K(-1\,;\,-1)$.

(b) L est le milieu de $[A'A'']$, donc $x_{A''} = 2 \times 2 - 1 = 3$ et $y_{A''} = 2 \times 1 - (-4) = 6$.
Donc $A''(3\,;\,6)$.

(c) $M\left(\frac{-1+2}{2}\,;\,\frac{-1+1}{2}\right)$, soit $M\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$. Le symétrique de A par rapport à M a pour coordonnées $\left(2 \times \frac{1}{2} - (-3)\,;\,2 \times 0 - 2\right)$, soit $(4\,;\,-2)$. Ce n'est pas $A''(3\,;\,6)$: l'affirmation de Noé est fausse.

Ex. 19 **(suite)**

(d) Le repère est orthonormé. $AA'' = \sqrt{(3-(-3))^2+(6-2)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. $KL = \sqrt{(2-(-1))^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. On remarque que $AA'' = 2 \times KL$.

(e) $AA'^2 = (1-(-3))^2+(-4-2)^2 = 16+36 = 52$; $A'A''^2 = (3-1)^2+(6-(-4))^2 = 4+100 = 104$; $AA''^2 = 52$. Le plus grand carré est $A'A''^2 = 104$ et $AA'^2 + AA''^2 = 52+52 = 104$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $AA'A''$ est rectangle en A. De plus, $AA' = AA'' = 2\sqrt{13}$: il est isocèle en A. Le triangle $AA'A''$ est donc rectangle isocèle en A.

Ex. 20 ★★★ **La parcelle du cadastre**

(a) $x_M = \frac{-4+4}{2} = 0$ et $y_M = \frac{-1+3}{2} = 1$, donc $M(0\,;\,1)$. Dans le parallélogramme $ABCD$, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
Donc M est aussi le milieu de $[BD]$, et D est le symétrique de B (et non de A) par rapport à M : $x_D = 2 \times 0 - 1 = -1$ et $y_D = 2 \times 1 - (-1) = 3$.
Donc $D(-1\,;\,3)$. Contrôle : $\frac{1+(-1)}{2} = 0$ et $\frac{-1+3}{2} = 1$. Le milieu de $[BD]$ est bien M.

(b) $N\left(\frac{-4+1}{2}\,;\,\frac{-1+(-1)}{2}\right)$, soit $N(-1{,}5\,;\,-1)$. Hugo trouve $E(2 \times (-1{,}5) - 4\,;\,2 \times (-1) - 3) = (-7\,;\,-5)$: son calcul est juste, mais $E \neq D(-1\,;\,3)$. Hugo a pris $[AB]$ et $[CE]$ comme diagonales. Ces diagonales ont le même milieu N, donc le quadrilatère $ACBE$ est un parallélogramme (sommets pris dans cet ordre). Ce n'est pas $ABCD$, dont les diagonales sont $[AC]$ et $[BD]$.

(c) Le repère est orthonormé. $AB = \sqrt{(1-(-4))^2+(-1-(-1))^2} = \sqrt{25} = 5$; $BC = \sqrt{(4-1)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{9+16} = 5$; $AC = \sqrt{(4-(-4))^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$; $BD = \sqrt{(-1-1)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

(d) $ABCD$ est un parallélogramme (question 1), et ses côtés consécutifs vérifient $AB = BC = 5$. Or un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange : $ABCD$ est donc un losange. Ses diagonales n'ont pas la même longueur, car $AC = 4\sqrt{5}$ et $BD = 2\sqrt{5}$. Or les diagonales d'un rectangle ont la même longueur : $ABCD$ n'est donc pas un rectangle, et pas non plus un carré. Conclusion : $ABCD$ est un losange qui n'est pas un carré.

Ex. 21 ★★★ **La carte au trésor**

(a) C est le milieu de $[PT]$, donc $x_T = 2x_C - x_P = 2 \times 1 - 4 = -2$ et $y_T = 2y_C - y_P = 2 \times 2 - (-1) = 5$.
Donc $T(-2\,;\,5)$. Contrôle : $\frac{4+(-2)}{2} = 1$ et $\frac{-1+5}{2} = 2$. On retrouve bien $C(1\,;\,2)$.

(b) Avec $(7\,;\,-4)$, le milieu de $[PT]$ serait $\left(\frac{4+7}{2}\,;\,\frac{-1+(-4)}{2}\right) = (5{,}5\,;\,-2{,}5)$, qui n'est pas $C(1\,;\,2)$. Zoé a donc tort : elle a inversé les rôles. Son point est le symétrique de C par rapport à P, car $\frac{1+7}{2} = 4$ et $\frac{2+(-4)}{2} = -1$. Le centre de symétrie est C : on calcule $2x_C - x_P$.

(c) Le repère est orthonormé. $PG^2 = (-2-4)^2+(-1-(-1))^2 = 36$; $GT^2 = (-2-(-2))^2+(5-(-1))^2 = 36$; $PT^2 = (-2-4)^2+(5-(-1))^2 = 36+36 = 72$. Le plus grand carré est PT^2, et $PG^2 + GT^2 = 36+36 = 72 = PT^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PGT est rectangle en G. Il est même isocèle en G, car $PG = GT = 6$.

(d) Le triangle PGT est rectangle en G. Le centre de son cercle circonscrit est donc le milieu de l'hypoténuse $[PT]$, c'est-à-dire $C(1\,;\,2)$ (question 1). Le rayon vaut $CP = \sqrt{(4-1)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. On retrouve bien la moitié de $PT = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

(e) $CR^2 = (5-1)^2+(3-2)^2 = 16+1 = 17$ et $r^2 = CP^2 = 18$. Comme $17 \neq 18$, on a $CR \neq r$: la ruine R n'est pas sur le cercle (elle est juste à l'intérieur). Maël a donc tort. Deux arrondis égaux ne prouvent pas une égalité : $\sqrt{17} \approx 4{,}1$ et $\sqrt{18} \approx 4{,}2$ donnent tous les deux 4 à l'unité. Il faut comparer les valeurs exactes CR^2 et r^2.

4. *Distance entre deux points*

Ex. 22 ★☆☆ **Lire puis mesurer**

(a) $A(-4\,;\,3)$, $B(2\,;\,3)$, $C(2\,;\,-1)$ et $D(-1\,;\,-4)$.

(b) A et B sont sur la même horizontale, donc $AB = |x_B - x_A| = |2-(-4)| = 6$.

(c) $AC^2 = (2-(-4))^2+(-1-3)^2 = 6^2+(-4)^2 = 36+16 = 52$.
Donc $AC = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$.

(d) $CD^2 = (-1-2)^2+(-4-(-1))^2 = (-3)^2+(-3)^2 = 9+9 = 18$.
Donc $CD = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$.

(e) $O(0\,;\,0)$, donc $OD^2 = (-1)^2+(-4)^2 = 1+16 = 17$ et $OD = \sqrt{17}$.

Ex. 23 ★☆☆ **Distances en série**

(a) $EF^2 = (-5-2)^2 + (-4-3)^2 = (-7)^2 + (-7)^2 = 49 + 49 = 98$.
Donc $EF = \sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = 7\sqrt{2}$.

(b) $MN^2 = (-3{,}5 - 2{,}5)^2 + (2-(-1))^2 = (-6)^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$.
Donc $MN = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$.

(c) $PQ^2 = \left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (2-(-2))^2 = (-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.
Donc $PQ = \sqrt{25} = 5$.

(d) R et S ont la même abscisse : ils sont sur une même verticale. $RS = |y_S - y_R| = |2-(-5)| = 7$.

(e) $OT^2 = (-8)^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$.
Donc $OT = \sqrt{68} = \sqrt{4 \times 17} = 2\sqrt{17}$.

(f) $UV^2 = (-2-0)^2 + (1-(-4))^2 = 4 + 25 = 29$.
Donc $UV = \sqrt{29} \approx 5{,}39$.

Ex. 24 ★★☆ **Quatre copies à corriger**

(a) Non : $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$. $AB^2 = (3-(-2))^2 + (8-(-4))^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, donc $AB = \sqrt{169} = 13$.

(b) Non : le carré d'un nombre négatif est positif, $(-4)^2 = 16$. $CD^2 = (1-5)^2 + (2-(-1))^2 = 16 + 9 = 25$, donc $CD = 5$.

(c) Jade a raison : $(x_K - x_L)^2 = (x_L - x_K)^2$, l'ordre ne compte pas. $KL^2 = (-1-0)^2 + (5-(-1))^2 = (-1)^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$, donc $KL = \sqrt{37}$ (qui ne se simplifie pas).

(d) La formule n'est valable que dans un repère orthonormé ; ici les unités des deux axes sont différentes. En cm : écart horizontal $4 - 1 = 3$ cm, écart vertical $(3-1) \times 2 = 4$ cm. Par le théorème de Pythagore, $GH^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, donc $GH = 5$ cm.

Ex. 25 ★★☆ **Allées du parc**

(a) $KF^2 = (1-(-3))^2 + (-2-2)^2 = 16 + 16 = 32$, donc $KF = 4\sqrt{2}$. $FB^2 = (3-1)^2 + (4-(-2))^2 = 4 + 36 = 40$, donc $FB = 2\sqrt{10}$. $KB^2 = (3-(-3))^2 + (4-2)^2 = 36 + 4 = 40$, donc $KB = 2\sqrt{10}$.

(b) Le périmètre vaut $4\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{10}$; on ne peut pas regrouper $\sqrt{2}$ et $\sqrt{10}$.

(c) Non : $\sqrt{2} + \sqrt{10} \neq \sqrt{12}$. D'ailleurs $8\sqrt{12} \approx 27{,}71$ alors que $4\sqrt{2} + 4\sqrt{10} \approx 18{,}31$.

(d) $(4\sqrt{2} + 4\sqrt{10}) \times 10 \approx 183{,}06$. Les allées mesurent environ 183 m.

Ex. 25 (suite)

(e) $OK^2 = (-3)^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$, $OF^2 = 1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$ et $OB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Des distances positives sont rangées comme leurs carrés, donc $OF < OK < OB$: la fontaine est la plus proche de l'entrée.

Ex. 26 ★★★ **Sur le segment ou pas ?**

(a) $AB^2 = (1-(-3))^2 + (0-(-2))^2 = 16 + 4 = 20$, donc $AB = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$. $BC^2 = (5-1)^2 + (2-0)^2 = 16 + 4 = 20$, donc $BC = 2\sqrt{5}$. $AC^2 = (5-(-3))^2 + (2-(-2))^2 = 64 + 16 = 80$, donc $AC = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$.

(b) Léa a tort : on n'additionne pas des racines comme ça ($\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$). En fait, $\sqrt{20} + \sqrt{20} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$, alors que $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
Donc $AB + BC = 4\sqrt{5} = AC$ et B appartient au segment $[AC]$.

(c) $AD^2 = (2-(-3))^2 + (1-(-2))^2 = 25 + 9 = 34$, donc $AD = \sqrt{34}$. $DC^2 = (5-2)^2 + (2-1)^2 = 9 + 1 = 10$, donc $DC = \sqrt{10}$. Ces deux radicaux ne se simplifient pas.

(d) Des arrondis ne prouvent pas une égalité. $(AD + DC)^2 = (\sqrt{34} + \sqrt{10})^2 = 34 + 2\sqrt{340} + 10 = 44 + 2\sqrt{340}$ et $AC^2 = 80$. Si ces deux carrés étaient égaux, on aurait $2\sqrt{340} = 36$, donc $\sqrt{340} = 18$, donc $340 = 18^2 = 324$: c'est faux.
Donc $AD + DC \neq AC$: D n'appartient pas à $[AC]$ et Sacha a tort
(en réalité $AD + DC \approx 8{,}99$ et $AC \approx 8{,}94$).

(e) B appartient à $[AC]$ et $AB = BC = 2\sqrt{5}$, donc B est le milieu de $[AC]$. Vérification : $\frac{-3+5}{2} = 1$ et $\frac{-2+2}{2} = 0$, ce qui donne bien $B(1\,;\,0)$.

Ex. 27 ★★★ **Antenne relais**

(a) $OK^2 = (-2-0)^2 + (1-0)^2 = 4 + 1 = 5$, donc $OK = \sqrt{5}$ km, soit environ 2,24 km.

(b) $KF^2 = (-6-(-2))^2 + (-2-1)^2 = (-4)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25$, donc $KF = \sqrt{25} = 5$ km. Comme $5 \leqslant 5$, la ferme est couverte
(elle est juste à la limite).

(c) $KG^2 = (-7-(-2))^2 + (-3-1)^2 = (-5)^2 + (-4)^2 = 25 + 16 = 41$. Or $5^2 = 25$ et $41 > 25$, donc $KG > 5$: le gîte n'est pas couvert.

Ex. 27 (suite)

(d) K et R sont sur une même horizontale, donc $KR = |x_R - x_K| = |4 - (-2)| = 6$ km. Comme $6 > 5$, le château n'est pas couvert.

(e) On cherche $M(x\,;\,-3)$ tel que $KM^2 = 25$: $(x-(-2))^2 + (-3-1)^2 = 25$, soit $(x+2)^2 + 16 = 25$, donc $(x+2)^2 = 9$. Alors $x+2 = 3$ ou $x+2 = -3$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -5$. Ce sont les points $(1\,;\,-3)$ et $(-5\,;\,-3)$.

Ex. 28 ★★★ **Trajet d'un drone**

(a) $ST^2 = (-2-(-3))^2 + (0-1)^2 = 1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$, donc $ST = \sqrt{2}$. $TU^2 = (0-(-2))^2 + (-2-0)^2 = 4 + 4 = 8$, donc $TU = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$. $UV^2 = (7-0)^2 + (-1-(-2))^2 = 49 + 1 = 50$, donc $UV = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$.

(b) On simplifie d'abord chaque radical, puis on regroupe : $ST + TU + UV = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. Attention : $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50} \neq \sqrt{60}$.

(c) $SV^2 = (7-(-3))^2 + (-1-1)^2 = 10^2 + (-2)^2 = 100 + 4 = 104$, donc $SV = \sqrt{104} = \sqrt{4\times 26} = 2\sqrt{26}$.

(d) $(8\sqrt{2})^2 = 64 \times 2 = 128$ et $SV^2 = 104$. Or $128 > 104$. Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc $8\sqrt{2} > 2\sqrt{26}$: le trajet aller est plus long que le retour.

5. *Nature d'un triangle par le calcul*

Ex. 29 ★☆☆ **Trois carrés, puis on conclut**

(a) $EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 = (2-(-3))^2 + (-1-4)^2 = 25 + 25 = 50$.

(b) $FG^2 = (-1-2)^2 + (-2-(-1))^2 = 9 + 1 = 10$.

(c) $EG^2 = (-1-(-3))^2 + (-2-4)^2 = 4 + 36 = 40$.

(d) Le plus grand carré est $EF^2 = 50$. La somme des deux autres vaut $FG^2 + EG^2 = 10 + 40 = 50$. Les deux sont égaux.

(e) On a $EF^2 = FG^2 + EG^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en G, le sommet opposé au plus grand côté $[EF]$.

(f) Les côtés de l'angle droit sont $[FG]$ et $[EG]$, avec $FG = \sqrt{10}$ et $EG = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Aire $= \frac{FG\times EG}{2} = \frac{\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}}{2} = \frac{20}{2} = 10$ unités d'aire.

Ex. 30 ★★☆ **Conclure à partir des longueurs**

(a) $RU^2 = UV^2$, donc $RU = UV$: le triangle est isocèle en U. Le plus grand carré est $RV^2 = 36$ et $RU^2 + UV^2 = 18 + 18 = 36$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, RUV est rectangle en U. Il est donc rectangle et isocèle en U.

(b) $LN^2 = 20$; $NP^2 = 2^2 \times 5 = 20$; $LP^2 = 20$. Les trois carrés sont égaux, donc $LN = NP = LP$: le triangle LNP est équilatéral.

(c) Non. Noé a additionné le plus grand carré au lieu de le comparer à la somme des deux autres. Les trois carrés 20, 45 et 65 sont différents : BCK n'est pas isocèle. Le plus grand carré est $CK^2 = 65$ et $BC^2 + BK^2 = 20 + 45 = 65$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, BCK est rectangle en B, le sommet opposé à $[CK]$.

(d) $MQ^2 = 26$; $QT^2 = 13$; $MT^2 = 2^2 \times 10 = 40$. Les trois carrés sont différents, donc le triangle n'est pas isocèle. Le plus grand est $MT^2 = 40$ et $MQ^2 + QT^2 = 26 + 13 = 39 \neq 40$. D'après la contraposée du théorème de Pythagore, MQT n'est pas rectangle.

Ex. 31 ★★☆ **Il a l'air rectangle…**

(a) $LS^2 = (5-1)^2 + (-1-(-2))^2 = 16 + 1 = 17$; $LC^2 = (0-1)^2 + (1-(-2))^2 = 1 + 9 = 10$; $CS^2 = (5-0)^2 + (-1-1)^2 = 25 + 4 = 29$.

(b) Le plus grand carré est $CS^2 = 29$ et $LS^2 + LC^2 = 17 + 10 = 27 \neq 29$. D'après la contraposée du théorème de Pythagore, CLS n'est pas rectangle, malgré ce que montre le dessin.

(c) Hugo a raisonné sur des arrondis. En fait $LS = \sqrt{17} \approx 4{,}12$, $LC = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ et $CS = \sqrt{29} \approx 5{,}39$. Avec les carrés exacts, $17 + 10 = 27 \neq 29$: le triangle n'est pas rectangle. On compare toujours des valeurs exactes.

(d) $LT^2 = (4-1)^2 + (-1-(-2))^2 = 9 + 1 = 10$; $LC^2 = 10$; $CT^2 = (4-0)^2 + (-1-1)^2 = 16 + 4 = 20$. Comme $LT^2 = LC^2$, on a $LT = LC$: le triangle est isocèle en L. Le plus grand carré est $CT^2 = 20$ et $LT^2 + LC^2 = 10 + 10 = 20$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, CLT est rectangle en L. Il est donc rectangle et isocèle en L.

Ex. 32 ★★☆ **Les balises du drone**

(a) $PQ^2 = (1-(-3))^2 + (-1-(-1))^2 = 16 + 0 = 16$; $PR^2 = (-1-(-3))^2 + (2{,}5-(-1))^2 = 4 + 12{,}25 = 16{,}25$; $QR^2 = (-1-1)^2 + (2{,}5-(-1))^2 = 4 + 12{,}25 = 16{,}25$.

(b) Non. $PR^2 = QR^2$, donc $PR = QR$: le triangle est isocèle en R. Mais $PQ^2 = 16 \neq 16{,}25$: les trois longueurs ne sont pas égales, donc il n'est pas équilatéral.

(c) Le plus grand carré est $PR^2 = 16{,}25$ (à égalité avec QR^2). La somme des deux autres vaut $PQ^2 + QR^2 = 16 + 16{,}25 = 32{,}25 \neq 16{,}25$. D'après la contraposée du théorème de Pythagore, PQR n'est pas rectangle.

(d) $H\left(\frac{-3+1}{2} ; \frac{-1+(-1)}{2}\right)$, soit $H(-1\,;\,-1)$. $RH^2 = (-1-(-1))^2 + (-1-2{,}5)^2 = 0 + 12{,}25 = 12{,}25$, donc $RH = 3{,}5$. P et Q ont la même ordonnée, donc $[PQ]$ est horizontal. R et H ont la même abscisse, donc $[RH]$ est vertical. Ainsi $[RH]$ est la hauteur issue de R. Avec $PQ = \sqrt{16} = 4$: aire $= \frac{PQ \times RH}{2} = \frac{4 \times 3{,}5}{2} = 7$ unités d'aire. Une unité d'aire vaut $10 \times 10 = 100$ m², donc l'aire de PQR est 700 m².

Ex. 33 ★★★ **Le bon sommet et le cercle circonscrit**

(a) $AB^2 = (0-(-2))^2 + (-1-3)^2 = 4 + 16 = 20$; $AC^2 = (-3-(-2))^2 + (2-3)^2 = 1 + 1 = 2$; $BC^2 = (-3-0)^2 + (2-(-1))^2 = 9 + 9 = 18$.

(b) Son égalité est juste : le plus grand carré est $AB^2 = 20$ et $AC^2 + BC^2 = 2 + 18 = 20$. Son erreur porte sur le sommet : l'angle droit est en face du plus grand côté $[AB]$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en C, et non en A.

(c) ABC est rectangle en C. Le centre K de son cercle circonscrit est donc le milieu de l'hypoténuse $[AB]$: $K\left(\frac{-2+0}{2} ; \frac{3+(-1)}{2}\right)$, soit $K(-1\,;\,1)$. Le rayon vaut $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

(d) $KD^2 = (-2-(-1))^2 + (-1-1)^2 = 1 + 4 = 5$ et $r^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$. Comme $KD^2 = r^2$, on a $KD = r$: le point D est sur le cercle.

(e) $AD^2 = (-2-(-2))^2 + (-1-3)^2 = 0 + 16 = 16$; $BD^2 = (-2-0)^2 + (-1-(-1))^2 = 4 + 0 = 4$; $AB^2 = 20$. Les trois carrés sont différents : ABD n'est pas isocèle. Le plus grand est $AB^2 = 20$ et $AD^2 + BD^2 = 16 + 4 = 20$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABD est rectangle en D, le sommet opposé à $[AB]$.

Ex. 34 ★★★ **Le portail du jeu vidéo**

(a) $AB^2 = (4-0)^2 + (0-2)^2 = 16 + 4 = 20$.

(b) $AP^2 = (x-0)^2 + (0-2)^2 = x^2 + 4$; $BP^2 = (x-4)^2 + (0-0)^2 = x^2 - 8x + 16$.

(c) L'angle droit est en A, donc l'hypoténuse est le côté opposé à A : $[BP]$. D'après le théorème de Pythagore, on a $AP^2 + AB^2 = BP^2$. Cela donne $x^2 + 4 + 20 = x^2 - 8x + 16$. Les x^2 s'éliminent : $24 = -8x + 16$, donc $8x = -8$ et $x = -1$. Ainsi $P(-1\,;\,0)$. Vérification : $AP^2 = 1 + 4 = 5$ et $BP^2 = (-5)^2 = 25$. On a bien $5 + 20 = 25$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABP est rectangle en A.

(d) $AO^2 = (0-0)^2 + (0-2)^2 = 4$; $BO^2 = (0-4)^2 + (0-0)^2 = 16$; $AB^2 = 20$. Le plus grand carré est $AB^2 = 20$ et $AO^2 + BO^2 = 4 + 16 = 20$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABO est rectangle en O, le sommet opposé à $[AB]$, et non en A. Ce choix ne convient donc pas.

(e) ABP est rectangle en A. Les côtés de l'angle droit sont $[AP]$ et $[AB]$. Aire $= \frac{AP \times AB}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = \frac{10}{2} = 5$ unités d'aire.

Ex. 35 ★★★ **Quatre triangles à l'épreuve**

(a) Vrai. $KL^2 = (2-(-2))^2 + (-1-(-1))^2 = 16$; $KM^2 = (0-(-2))^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$; $LM^2 = (0-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$. Les trois carrés sont égaux, donc $KL = KM = LM$: le triangle KLM est équilatéral.

(b) Non. $DE^2 = (1-(-3))^2 + (-2-1)^2 = 16 + 9 = 25$; $EF^2 = (6-1)^2 + (-2-(-2))^2 = 25$; $DF^2 = (6-(-3))^2 + (-2-1)^2 = 81 + 9 = 90$. On a $DE = EF$: le triangle est isocèle en E, et non en D. Le plus grand carré est $DF^2 = 90$ et $DE^2 + EF^2 = 25 + 25 = 50 \neq 90$. D'après la contraposée du théorème de Pythagore, DEF n'est pas rectangle. Conclusion : DEF est isocèle en E, non rectangle.

(c) $AB^2 = (1-(-3))^2 + (3-3)^2 = 16$; $BC^2 = (1-1)^2 + (-3-3)^2 = 36$; $AC^2 = (1-(-3))^2 + (-3-3)^2 = 16 + 36 = 52$. Ici, $AB^2 + AC^2 = 68 \neq 36 = BC^2$. Pourtant, le plus grand carré est $AC^2 = 52$ et $AB^2 + BC^2 = 16 + 36 = 52$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B. C'est un contre-exemple : il faut comparer le plus grand carré à la somme des deux autres, pas un carré pris au hasard.

Ex. 35 **(suite)**

(d) $UV^2 = (-2-(-4))^2 + (-1-(-3))^2 = 4+4 = 8$; $VW^2 = (1-(-2))^2 + (-4-(-1))^2 = 9+9 = 18$; $UW^2 = (1-(-4))^2 + (-4-(-3))^2 = 25+1 = 26$. Le plus grand carré est $UW^2 = 26$ et $UV^2 + VW^2 = 8 + 18 = 26$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, UVW est rectangle en V. Aire $= \frac{UV \times VW}{2} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$ unités d'aire.

6. *Nature d'un quadrilatère par le calcul*

Ex. 36 ★☆☆ **Parallélogramme ou pas ?**

(a) Les diagonales sont $[EG]$ et $[FH]$. Milieu de $[EG]$: $\left(\frac{-2+4}{2} ; \frac{-1+3}{2}\right) = (1 ; 1)$. Milieu de $[FH]$: $\left(\frac{3+(-1)}{2} ; \frac{0+2}{2}\right) = (1 ; 1)$. Les diagonales ont le même milieu : $EFGH$ est un parallélogramme.

(b) Les diagonales sont $[MP]$ et $[NQ]$. Milieu de $[MP]$: $\left(\frac{1+6}{2} ; \frac{-3+2}{2}\right) = (3{,}5 ; -0{,}5)$. Milieu de $[NQ]$: $\left(\frac{5+1}{2} ; \frac{-2+1}{2}\right) = (3 ; -0{,}5)$. Les milieux sont différents : $MNPQ$ n'est pas un parallélogramme.

(c) Les diagonales sont $[RT]$ et $[SU]$. Milieu de $[RT]$: $\left(\frac{-4+2}{2} ; \frac{2+1}{2}\right) = (-1 ; 1{,}5)$. Milieu de $[SU]$: $\left(\frac{-1+(-1)}{2} ; \frac{-2+5}{2}\right) = (-1 ; 1{,}5)$. Même milieu : $RSTU$ est un parallélogramme.

(d) Les diagonales sont $[AC]$ et $[BD]$. Milieu de $[AC]$: $\left(\frac{-0{,}5+(-2{,}5)}{2} ; \frac{-3+3}{2}\right) = (-1{,}5 ; 0)$. Milieu de $[BD]$: $\left(\frac{1{,}5+(-4{,}5)}{2} ; \frac{1+(-1)}{2}\right) = (-1{,}5 ; 0)$. Les diagonales ont le même milieu : $ABCD$ est un parallélogramme.

Ex. 37 ★☆☆ **Trouver le quatrième sommet**

(a) Milieu I de $[AC]$: $\left(\frac{-3+2}{2} ; \frac{2+(-1)}{2}\right) = (-0{,}5 ; 0{,}5)$. D est le symétrique de B par rapport à I : $x_D = 2 \times (-0{,}5) - 1 = -2$ et $y_D = 2 \times 0{,}5 - 4 = -3$, donc $D(-2 ; -3)$. Contrôle : milieu de $[BD]$: $\left(\frac{1+(-2)}{2} ; \frac{4+(-3)}{2}\right) = (-0{,}5 ; 0{,}5)$.

(b) Les diagonales sont $[EG]$ et $[FH]$. Milieu I de $[FH]$: $\left(\frac{6+(-2)}{2} ; \frac{3+0}{2}\right) = (2 ; 1{,}5)$. G est le symétrique de E par rapport à I : $x_G = 2 \times 2 - 4 = 0$ et $y_G = 2 \times 1{,}5 - (-1) = 4$, donc $G(0 ; 4)$. Contrôle : milieu de $[EG]$: $\left(\frac{4+0}{2} ; \frac{-1+4}{2}\right) = (2 ; 1{,}5)$.

(c) Les diagonales sont $[RT]$ et $[SU]$. Milieu I de $[SU]$: $\left(\frac{-5+0}{2} ; \frac{-2+1}{2}\right) = (-2{,}5 ; -0{,}5)$. R est le symétrique de T par rapport à I : $x_R = 2 \times (-2{,}5) - (-1) = -4$ et $y_R = 2 \times (-0{,}5) - (-4) = 3$, donc $R(-4 ; 3)$. Contrôle : milieu de $[RT]$: $\left(\frac{-4+(-1)}{2} ; \frac{3+(-4)}{2}\right) = (-2{,}5 ; -0{,}5)$.

Ex. 37 **(suite)**

(d) Les diagonales sont $[KM]$ et $[LN]$. Milieu I de $[LN]$: $\left(\frac{4+(-1)}{2} ; \frac{-3+(-2)}{2}\right) = (1{,}5 ; -2{,}5)$. M est le symétrique de K par rapport à I : $x_M = 2 \times 1{,}5 - 1 = 2$ et $y_M = 2 \times (-2{,}5) - 0 = -5$, donc $M(2 ; -5)$. Contrôle : milieu de $[KM]$: $\left(\frac{1+2}{2} ; \frac{0+(-5)}{2}\right) = (1{,}5 ; -2{,}5)$.

Ex. 38 ★★☆ **Le massif du parc**

(a) Milieu de $[AC]$: $\left(\frac{1+(-3)}{2} ; \frac{1+(-1)}{2}\right) = (-1 ; 0)$. Milieu de $[BD]$: $\left(\frac{-3+1}{2} ; \frac{4+(-4)}{2}\right) = (-1 ; 0)$. Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme : oui, $ABCD$ est un parallélogramme.

(b) $AB^2 = (-3-1)^2 + (4-1)^2 = 16+9 = 25$ et $BC^2 = (-3-(-3))^2 + (-1-4)^2 = 0+25 = 25$.
Donc $AB = BC = 5$ m. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange : $ABCD$ est un losange.

(c) $AC = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ m. $BD = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ m.

(d) Non. $AC = 2\sqrt{5}$ et $BD = 4\sqrt{5}$: les diagonales n'ont pas la même longueur, donc le parallélogramme $ABCD$ n'est pas un rectangle, donc pas un carré. Quatre côtés égaux donnent un losange, pas forcément un carré : $ABCD$ est un losange
(nature la plus précise).

(e) Aire du losange $= \frac{AC \times BD}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5}}{2} = \frac{8 \times 5}{2} = 20$. Le massif a une aire de 20 m².

Ex. 39 ★★☆ **Hugo et Inès se trompent**

(a) Hugo trouve bien $(0 ; -2)$ et $(3 ; 4)$, mais $[AB]$ et $[CD]$ sont des côtés : les diagonales de $ABCD$ sont $[AC]$ et $[BD]$. Milieu de $[AC]$: $\left(\frac{-2+5}{2} ; \frac{-1+3}{2}\right) = (1{,}5 ; 1)$. Milieu de $[BD]$: $\left(\frac{2+1}{2} ; \frac{-3+5}{2}\right) = (1{,}5 ; 1)$. Les diagonales ont le même milieu : $ABCD$ est un parallélogramme.

(b) $AB^2 = (2-(-2))^2 + (-3-(-1))^2 = 16+4 = 20$ et $BC^2 = (5-2)^2 + (3-(-3))^2 = 9+36 = 45$. Non : AB et CD sont des côtés opposés, toujours égaux dans un parallélogramme. Les côtés consécutifs AB et BC ne sont pas égaux : $ABCD$ n'est pas un losange.

(c) $AC^2 = (5-(-2))^2 + (3-(-1))^2 = 49+16 = 65$ et $BD^2 = (1-2)^2 + (5-(-3))^2 = 1+64 = 65$. Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle. Ce n'est pas un losange (question précédente), donc pas un carré : $ABCD$ est un rectangle.

Ex. 39 **(suite)**

(d) $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Aire $= AB \times BC = 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 6 \times 5 = 30$ unités d'aire.

Ex. 40 ★★★ **La gemme du jeu vidéo**

(a) $PQ^2 = (1-(-3))^2 + (6-1)^2 = 16 + 25 = 41$ et $QR^2 = (5-1)^2 + (1-6)^2 = 16 + 25 = 41$. $PR = \sqrt{(5-(-3))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{64} = 8$ cm et $QS = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{64} = 8$ cm.

(b) Non. Milieu de $[PR]$: $\left(\frac{-3+5}{2} ; \frac{1+1}{2}\right) = (1 ; 1)$. Milieu de $[QS]$: $\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{6+(-2)}{2}\right) = (1 ; 2)$. Les diagonales n'ont pas le même milieu : $PQRS$ n'est pas un parallélogramme, donc ce n'est ni un losange, ni un rectangle, ni un carré. Les critères « côtés consécutifs » et « diagonales » ne valent que pour un parallélogramme : on vérifie d'abord les milieux.

(c) Les diagonales d'un carré ont le même milieu et la même longueur. Le milieu de $[PR]$ est $K(1 ; 1)$ et $PR = 8$, donc V et W sont à $\frac{8}{2} = 4$ de K. Ils ont la même abscisse que K : $y_V = 1 + 4 = 5$ et $y_W = 1 - 4 = -3$, donc $V(1 ; 5)$ et $W(1 ; -3)$.
Justification : le milieu de $[VW]$ est $\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{5+(-3)}{2}\right) = (1 ; 1)$, le même que celui de $[PR]$, donc $PVRW$ est un parallélogramme. $VW = \sqrt{(1-1)^2 + (-3-5)^2} = 8 = PR$: un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle. $PV^2 = (1-(-3))^2 + (5-1)^2 = 16 + 16 = 32$ et $VR^2 = (5-1)^2 + (1-5)^2 = 16 + 16 = 32$: un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange. $PVRW$ est à la fois un losange et un rectangle : c'est un carré.

(d) Le côté du carré vaut $PV = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm. Aire $= (4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$. L'aire du carré $PVRW$ est 32 cm^2.

Ex. 41 ★★★ **Les balises du drone**

(a) Les diagonales de $EFGH$ sont $[EG]$ et $[FH]$. Milieu de $[EG]$: $\left(\frac{2+(-4)}{2} ; \frac{3+1}{2}\right) = (-1 ; 2)$. Milieu de $[FH]$: $\left(\frac{-2+1}{2} ; \frac{5+(-1)}{2}\right) = (-0{,}5 ; 2)$. Les milieux sont différents : les diagonales n'ont pas le même milieu, donc $EFGH$ n'est pas un parallélogramme.

(b) P est le symétrique de F par rapport au milieu $K(-1 ; 2)$ de $[EG]$: $x_P = 2 \times (-1) - (-2) = 0$ et $y_P = 2 \times 2 - 5 = -1$.
Donc $P(0 ; -1)$. Contrôle : le milieu de $[FP]$ est $\left(\frac{-2+0}{2} ; \frac{5+(-1)}{2}\right) = (-1 ; 2)$.

Ex. 41 **(suite)**

(c) 1) Les diagonales $[EG]$ et $[FP]$ ont le même milieu K : $EFGP$ est un parallélogramme. 2) $EF^2 = (-2-2)^2 + (5-3)^2 = 16 + 4 = 20$ et $FG^2 = (-4-(-2))^2 + (1-5)^2 = 4 + 16 = 20$: deux côtés consécutifs ont la même longueur, donc $EFGP$ est un losange. 3) $EG^2 = (-4-2)^2 + (1-3)^2 = 36 + 4 = 40$ et $FP^2 = (0-(-2))^2 + (-1-5)^2 = 4 + 36 = 40$: les diagonales ont la même longueur, donc $EFGP$ est un rectangle. 4) $EFGP$ est à la fois un losange et un rectangle : c'est un carré.

(d) Le côté du carré vaut $EF = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Le trajet mesure $4 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$ (en centaines de mètres).

(e) Les diagonales du carré $EFGP$ ont le même milieu $K(-1 ; 2)$ et la même longueur $EG = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Donc $KE = KF = KG = KP = \frac{EG}{2} = \sqrt{10}$.
Contrôle : $KE^2 = (2-(-1))^2 + (3-2)^2 = 9 + 1 = 10$.
Le cercle a pour centre $K(-1 ; 2)$ et pour rayon $\sqrt{10}$.

Ex. 42 ★★★ **L'aire de jeux**

(a) Dans $TRUS$, les sommets sont pris dans l'ordre T, R, U, S : les diagonales sont $[TU]$ et $[RS]$. Milieu de $[TU]$: $\left(\frac{-4+1}{2} ; \frac{0+1}{2}\right) = (-1{,}5 ; 0{,}5)$. Milieu de $[RS]$: $\left(\frac{-2+(-1)}{2} ; \frac{-2+3}{2}\right) = (-1{,}5 ; 0{,}5)$. Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme : $TRUS$ est un parallélogramme.

(b) $TR^2 = (-2-(-4))^2 + (-2-0)^2 = 4 + 4 = 8$; $RU^2 = (1-(-2))^2 + (1-(-2))^2 = 9 + 9 = 18$; $TU^2 = (1-(-4))^2 + (1-0)^2 = 25 + 1 = 26$. Le plus grand est TU^2, et $TR^2 + RU^2 = 8 + 18 = 26 = TU^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle TRU est rectangle en R.

(c) $TRUS$ est un parallélogramme qui a un angle droit en R : c'est un rectangle. De plus $TR^2 = 8$ et $RU^2 = 18$: deux côtés consécutifs n'ont pas la même longueur, donc ce n'est pas un losange, donc pas un carré. La nature la plus précise de $TRUS$ est « rectangle ».

(d) $TU^2 = 26$ et $RS^2 = (-1-(-2))^2 + (3-(-2))^2 = 1 + 25 = 26$.
Donc $TU = RS = \sqrt{26}$ m : un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle, donc $TRUS$ est un rectangle.

(e) $TR = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $RU = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Aire $= TR \times RU = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6 \times 2 = 12$. L'aire de la zone de sable est 12 m^2.

7. Cercles et points équidistants

Ex. 43 ★☆☆ Sur, dans ou hors du cercle

(a) $KA^2 = (4-2)^2 + (3-(-1))^2 = 4 + 16 = 20$ et $r^2 = (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$. Comme $KA^2 = r^2$, le point A est sur $\mathcal{C}$.

(b) $KG^2 = (5-2)^2 + (2-(-1))^2 = 9 + 9 = 18$. Comme $18 < 20$, on a $KG < r$: G est à l'intérieur de $\mathcal{C}$. $KD^2 = (-1-2)^2 + (3-(-1))^2 = 9 + 16 = 25$. Comme $25 > 20$, on a $KD > r$: D est à l'extérieur de $\mathcal{C}$.

(c) Non. $KE^2 = (2{,}5-2)^2 + (3{,}5-(-1))^2 = 0{,}25 + 20{,}25 = 20{,}5$ et $r^2 = 20$. Comme $20{,}5 \neq 20$, E n'est pas sur $\mathcal{C}$: il est juste à l'extérieur. En fait $KE \approx 4{,}53$ et $r \approx 4{,}47$: l'arrondi au dixième cachait la différence. Il faut comparer les carrés.

(d) K est le milieu de [AF], donc $x_F = 2x_K - x_A = 2 \times 2 - 4 = 0$ et $y_F = 2y_K - y_A = 2 \times (-1) - 3 = -5$. On obtient $F(0\,;\,-5)$.

(e) [AF] est un diamètre, donc $AF = 2r = 4\sqrt{5}$. Vérification : $AF^2 = (0-4)^2 + (-5-3)^2 = 16 + 64 = 80$ et $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Ex. 44 ★☆☆ Le point d'un axe à égale distance

(a) On pose $M(x\,;\,0)$. $MA^2 = (1-x)^2 + 4^2 = x^2 - 2x + 17$ et $MB^2 = (5-x)^2 + 2^2 = x^2 - 10x + 29$. $MA^2 = MB^2$ donne $-2x + 17 = -10x + 29$ (les x^2 s'éliminent), soit $8x = 12$ et $x = 1{,}5$. On obtient $M(1{,}5\,;\,0)$. Contrôle : $MA^2 = 0{,}25 + 16 = 16{,}25$ et $MB^2 = 12{,}25 + 4 = 16{,}25$.

(b) Non. Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{1+5}{2}\,;\,\frac{4+2}{2}\right) = (3\,;\,3)$. Il n'est même pas sur l'axe des abscisses. M est le point où la médiatrice de [AB] coupe cet axe.

(c) On pose $P(0\,;\,y)$. $PC^2 = (-3)^2 + (2-y)^2 = y^2 - 4y + 13$ et $PD^2 = 1^2 + (-4-y)^2 = y^2 + 8y + 17$. $PC^2 = PD^2$ donne $-4y + 13 = 8y + 17$, soit $-12y = 4$ et $y = -\frac{1}{3}$. On obtient $P\left(0\,;\,-\frac{1}{3}\right)$. Contrôle : $PC^2 = 9 + \frac{49}{9} = \frac{130}{9}$ et $PD^2 = 1 + \frac{121}{9} = \frac{130}{9}$.

(d) Faux. $NE^2 = (-1-2)^2 + (3-0)^2 = 9 + 9 = 18$ et $NF^2 = (5-2)^2 + (1-0)^2 = 9 + 1 = 10$. Comme $NE^2 \neq NF^2$, N n'est pas équidistant de E et F. Il n'est donc pas sur la médiatrice de [EF], même s'il a la même abscisse que le milieu $(2\,;\,2)$.

Ex. 45 ★★☆ Une allée circulaire dans le parc

(a) $PQ^2 = (-2-(-4))^2 + (-2-2)^2 = 4 + 16 = 20$; $QR^2 = (4-(-2))^2 + (1-(-2))^2 = 36 + 9 = 45$; $PR^2 = (4-(-4))^2 + (1-2)^2 = 64 + 1 = 65$.

(b) Le plus grand carré est $PR^2 = 65$, et $PQ^2 + QR^2 = 20 + 45 = 65$. Comme $PR^2 = PQ^2 + QR^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PQR est rectangle en Q.

(c) Le triangle est rectangle en Q, donc le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse [PR] : $K\left(\frac{-4+4}{2}\,;\,\frac{2+1}{2}\right) = (0\,;\,1{,}5)$. Le rayon vaut $r = \frac{PR}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

(d) $KV^2 = (-4-0)^2 + (1-1{,}5)^2 = 16 + 0{,}25 = 16{,}25$ et $r^2 = \frac{65}{4} = 16{,}25$. Comme $KV^2 = r^2$, la fontaine est sur l'allée.

Ex. 46 ★★☆ Une antenne relais au bord de la route

(a) $MA^2 = (-2-x)^2 + (3-0)^2 = x^2 + 4x + 4 + 9 = x^2 + 4x + 13$ et $MB^2 = (5-x)^2 + (4-0)^2 = x^2 - 10x + 25 + 16 = x^2 - 10x + 41$.

(b) $MA^2 = MB^2$ donne $x^2 + 4x + 13 = x^2 - 10x + 41$. Les x^2 s'éliminent : $14x = 28$, donc $x = 2$. On obtient $K(2\,;\,0)$.

(c) $KA^2 = (-2-2)^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$; $KB^2 = (5-2)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$; $KC^2 = (5-2)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$. Les trois carrés sont égaux, donc $KA = KB = KC = 5$. K est équidistant des trois villages : c'est le centre du cercle circonscrit à ABC. L'antenne convient, avec une portée minimale de 5 km.

(d) Non. $AB^2 = (5-(-2))^2 + (4-3)^2 = 49 + 1 = 50$; $BC^2 = (5-5)^2 + (-4-4)^2 = 64$; $AC^2 = (5-(-2))^2 + (-4-3)^2 = 49 + 49 = 98$. Le plus grand est $AC^2 = 98$, et $AB^2 + BC^2 = 114 \neq 98$. D'après la contraposée du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle : le centre n'a donc pas de raison d'être au milieu de [AC]. Ce milieu, $\left(\frac{-2+5}{2}\,;\,\frac{3+(-4)}{2}\right) = (1{,}5\,;\,-0{,}5)$, n'est pas K et n'est même pas sur la route.

Ex. 47 ★★★ Le cercle des plots

(a) $EF^2 = (6-(-2))^2 + (-2-2)^2 = 64 + 16 = 80$; $FG^2 = (4-6)^2 + (-6-(-2))^2 = 4 + 16 = 20$; $EG^2 = (4-(-2))^2 + (-6-2)^2 = 36 + 64 = 100$. Le plus grand carré est $EG^2 = 100$ et $EF^2 + FG^2 = 80 + 20 = 100$. On a donc $EF^2 + FG^2 = EG^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F.

Ex. 47 **(suite)**

(b) Non. $LE^2 = (-2-5)^2 + (2-1)^2 = 49 + 1 = 50$ et $LG^2 = (4-5)^2 + (-6-1)^2 = 1 + 49 = 50$: ces calculs sont justes. Mais $LF^2 = (6-5)^2 + (-2-1)^2 = 1 + 9 = 10 \neq 50$. L n'est pas équidistant des trois plots, donc ce n'est pas le centre. Lucas a tort : il faut vérifier les trois distances.

(c) Le triangle est rectangle en F, donc le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse [EG] : $K\left(\frac{-2+4}{2} ; \frac{2+(-6)}{2}\right)$, soit $K(1 ; -2)$. Le rayon vaut $r = \frac{EG}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$: il faut une corde de 5 m. Le diamètre vaut $2r = EG = 10$ m. Contrôle : $KE^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$, $KF^2 = 5^2 + 0^2 = 25$ et $KG^2 = 3^2 + (-4)^2 = 25$.

(d) On pose $H(-3 ; y)$. H est sur le cercle si $KH^2 = r^2 = 25$: $(-3-1)^2 + (y-(-2))^2 = 25$, soit $16 + (y+2)^2 = 25$ et $(y+2)^2 = 9$.
Donc $y + 2 = 3$ ou $y + 2 = -3$, soit $y = 1$ ou $y = -5$.
Les deux positions sont $(-3 ; 1)$ et $(-3 ; -5)$.

Ex. 48 ★★★ **Deux trésors, un seul chemin**

(a) $I\left(\frac{-5+3}{2} ; \frac{2+6}{2}\right)$, soit $I(-1 ; 4)$. Son abscisse vaut $-1 \neq 0$, donc I n'est même pas sur l'axe des ordonnées. Sami a tort : le point cherché est l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ avec l'axe, pas le milieu de $[AB]$.

(b) $MA^2 = (-5-0)^2 + (2-y)^2 = 25 + 4 - 4y + y^2 = y^2 - 4y + 29$; $MB^2 = (3-0)^2 + (6-y)^2 = 9 + 36 - 12y + y^2 = y^2 - 12y + 45$. $MA = MB$ équivaut à $MA^2 = MB^2$ (distances positives). Les y^2 s'éliminent : $-4y + 29 = -12y + 45$, soit $8y = 16$ et $y = 2$.
Donc $M(0 ; 2)$. Contrôle : $MA^2 = 25 + 0 = 25$ et $MB^2 = 9 + 16 = 25$.

(c) On pose $N(x ; 0)$. $NA^2 = (-5-x)^2 + 2^2 = x^2 + 10x + 29$ et $NB^2 = (3-x)^2 + 6^2 = x^2 - 6x + 45$. Les x^2 s'éliminent : $10x + 29 = -6x + 45$, soit $16x = 16$ et $x = 1$.
Donc $N(1 ; 0)$. Contrôle : $NA^2 = (-6)^2 + 2^2 = 40$ et $NB^2 = 2^2 + 6^2 = 40$.

(d) Le rayon est la distance du centre à un point du cercle : $r = NA = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Le diamètre vaut $2r = 4\sqrt{10}$. $NS^2 = (-4-1)^2 + (-4-0)^2 = 25 + 16 = 41$ et $r^2 = 40$. Comme $41 \neq 40$, S n'est pas sur le cercle : il est juste à l'extérieur.

Ex. 48 **(suite)**

(e) $RA^2 = (-2-(-5))^2 + (6-2)^2 = 9 + 16 = 25$ et $RB^2 = (-2-3)^2 + (6-6)^2 = 25 + 0 = 25$. On a $RA^2 = RB^2$, donc $RA = RB$: le point R est équidistant de A et B. La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B, donc R est sur la médiatrice de $[AB]$ (comme M et N).

Ex. 49 ★★★ **Le trésor du sentier**

(a) $TA^2 = (-3-0)^2 + (1-y)^2 = 9 + (y-1)^2$. $TA = 5$ équivaut à $TA^2 = 25$, soit $9 + (y-1)^2 = 25$ et $(y-1)^2 = 16$.
Donc $y - 1 = 4$ ou $y - 1 = -4$, soit $y = 5$ ou $y = -3$.
Deux positions possibles : $T_1(0 ; 5)$ et $T_2(0 ; -3)$.

(b) Pour les deux positions, $TA^2 = 25$. $T_1B^2 = (4-0)^2 + (0-5)^2 = 16 + 25 = 41 \neq 25$: T_1 ne convient pas.
$T_2B^2 = (4-0)^2 + (0-(-3))^2 = 16 + 9 = 25 = T_2A^2$: T_2 est équidistant de A et B. Le trésor est en $T(0 ; -3)$.

(c) T est le milieu de [AA'], donc $x_{A'} = 2x_T - x_A = 2 \times 0 - (-3) = 3$ et $y_{A'} = 2y_T - y_A = 2 \times (-3) - 1 = -7$: $A'(3 ; -7)$. Le rayon vaut $r = TA = 5$, donc le diamètre vaut $AA' = 2r = 10$ unités, soit 100 m. Contrôle : $AA'^2 = (3-(-3))^2 + (-7-1)^2 = 36 + 64 = 100$.

(d) $AB^2 = (4-(-3))^2 + (0-1)^2 = 49 + 1 = 50$; $BA'^2 = (3-4)^2 + (-7-0)^2 = 1 + 49 = 50$; $AA'^2 = 100$. Le plus grand carré est $AA'^2 = 100$ et $AB^2 + BA'^2 = 50 + 50 = 100$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABA' est rectangle en B. Il est aussi isocèle en B, car $AB = BA'$.