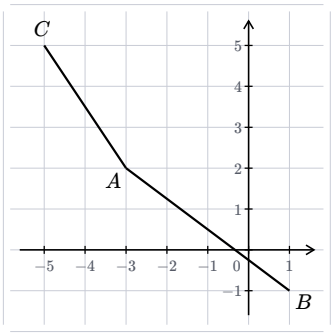
49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels de 2nde : géométrie repérée

À retenir : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$; milieu = demi-somme ; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ en repère orthonormé. Colinéaires $\iff xy' - yx' = 0$. Sur $ax + by + c = 0$, le vecteur directeur est $(-b\,;a)$: $2x - 5y + 1 = 0$ donne $(5\,;2)$.

Ex. 1 ★☆☆ **Vecteurs, milieux et distances** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(-3\,;2)$, $B(1\,;-1)$ et $C(-5\,;5)$.



a. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Calcule les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

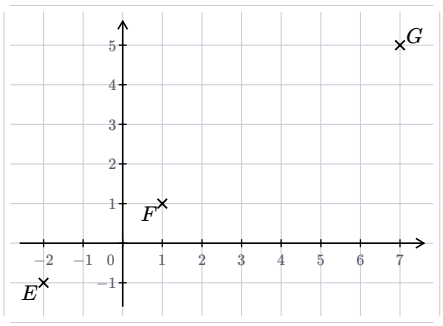
c. Calcule la distance AB.

d. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$, puis la distance AC en valeur exacte.

e. Calcule les coordonnées du milieu K de $[BC]$.

f. Pourquoi la formule de la distance AB n'est-elle valable que dans un repère orthonormé ? Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Colinéarité et alignement par le déterminant** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, utilise le déterminant $xy' - yx'$ de $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ pour répondre. Justifie chaque réponse.



a. Les vecteurs $\vec{u}\,(2\,;-3)$ et $\vec{v}\,(-6\,;9)$ sont-ils colinéaires ?

Ex. 2 (suite)

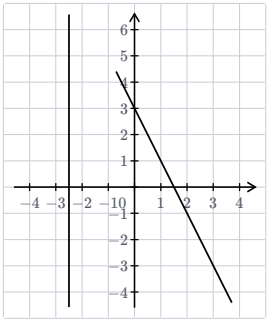
b. Les vecteurs $\vec{s}\,(3\,;5)$ et $\vec{w}\,(5\,;3)$ sont-ils colinéaires ?

c. Les points $E(-2\,;-1)$, $F(1\,;1)$ et $G(7\,;5)$ sont-ils alignés ?

d. Les points $P\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$, $Q(1\,;2)$ et $R(3\,;4)$ sont-ils alignés ?

e. Détermine le réel m pour que $\vec{a}\,(m\,;4)$ et $\vec{b}\,(3\,;6)$ soient colinéaires.

Ex. 3 ★★☆ **Équations cartésiennes : lire, tester, convertir** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les droites $d_1 : 4x + 2y - 6 = 0$ et $d_2 : 2x + 5 = 0$.



a. Donne un vecteur directeur de d_1, puis un vecteur directeur de d_2.

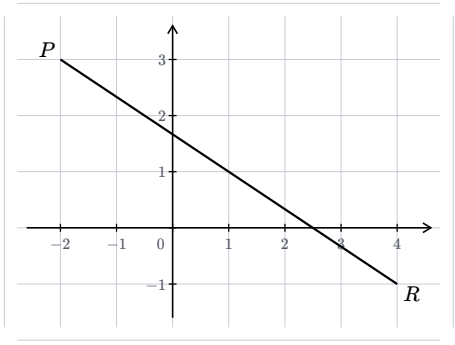
b. Les points $A(-1\,;5)$ et $B(1\,;2)$ appartiennent-ils à d_1 ? Justifie.

c. Écris l'équation réduite de d_1.

d. Sami affirme : « Toute droite a une équation réduite $y = mx + p$. » A-t-il raison ? Justifie avec d_2.

e. Avec $C(4\,;5)$, détermine une équation cartésienne de (AC) par la colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis décris la position de (AC).

Ex. 4 ★★☆ **Carte au trésor : corrige les erreurs** — Sur la carte d'une île, munie d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 10 m), le puits est en $P(-2\,;3)$ et le vieil arbre en $R(4\,;-1)$. Quatre élèves font les calculs. Trouve l'erreur de chacun, puis corrige.



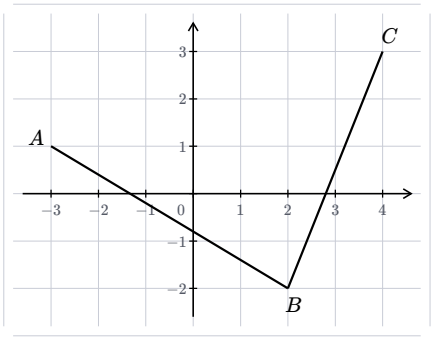
(a) Inès trouve $\overrightarrow{PR}\,(-6\,;4)$. Explique son erreur et donne les bonnes coordonnées.

(b) Jules calcule le milieu J de $[PR]$: $\left(\frac{4-(-2)}{2}\,;\frac{-1-3}{2}\right) = (3\,;-2)$. Corrige son calcul.

(c) Malo écrit $PR^2 = 6^2 + (-4)^2 = 36 - 16 = 20$, et Nora écrit $PR = \sqrt{(6+(-4))^2} = 2$. Corrige, puis donne PR en valeur exacte.

(d) Le trésor est en T, avec $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PR}$. Calcule les coordonnées exactes de T.

Ex. 5 ★★★ **Le parallélogramme du jardin** — Sur le plan du jardin de Maëlys, muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 m), on place $A(-3\,;1)$, $B(2\,;-2)$ et $C(4\,;3)$. Maëlys veut un massif $ABCD$ en forme de parallélogramme, avec une allée selon la diagonale (BD).



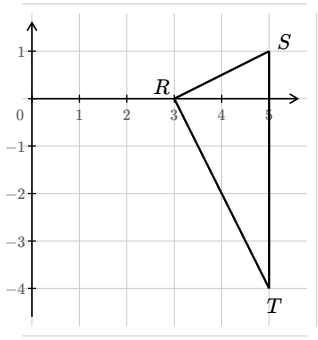
(a) Calcule les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis celles du centre K de ce parallélogramme.

(b) Calcule les longueurs AB et AD en valeur exacte. Le massif $ABCD$ est-il un losange ? Justifie.

(c) Détermine une équation cartésienne de l'allée (BD), puis son équation réduite.

(d) Léo affirme que la borne $E(-2\,;9)$ est sur l'allée, car « sur le dessin, ça a l'air aligné ». A-t-il raison ? Justifie à l'aide d'un déterminant.

Ex. 6 ★★★ **Trois antennes et un relais** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 km), trois antennes sont placées en $R(3\,;0)$, $S(5\,;1)$ et $T(5\,;-4)$.



(a) Calcule RS, RT et ST en valeur exacte, puis déduis-en la nature du triangle RST. Justifie.

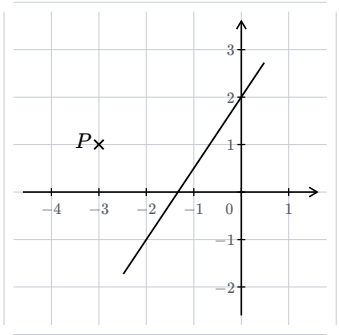
(b) Déduis-en le centre K et le rayon r du cercle passant par R, S et T.

(c) Un relais est en $P\left(\frac{7}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$. Est-il sur ce cercle, à l'intérieur ou à l'extérieur ? Justifie.

(d) Une quatrième antenne W est sur ce cercle, diamétralement opposée à R. Calcule les coordonnées de W, puis justifie que $RSWT$ est un rectangle.

(e) Hugo refait la figure avec 1 cm par unité en abscisse et 2 cm par unité en ordonnée. Il affirme que, sur son dessin, $ST = 5$ cm et $RS = \sqrt{5}$ cm. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Le drone et son couloir** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 100 m), le couloir aérien d'un drone de livraison est la droite $d : 3x - 2y + 4 = 0$. Un second drone part de $P(-3\,;1)$ en ligne droite, dirigé par $\vec{v}_m\,(m+1\,;m-2)$, où m est un réel.



(a) Nadia lit sur l'équation de d le vecteur directeur $(-2\,;3)$. A-t-elle raison ? Donne un vecteur directeur $\vec{u}$ de d et contrôle-le avec deux points de d.

(b) Ilyes écrit $2(m+1) - 3(m-2) = 0$ et trouve $m = 8$ pour que la trajectoire soit parallèle à d. Explique son erreur, trouve la bonne valeur de m, puis dis si le drone rencontre alors d.

(c) On prend $m = 3$. Détermine une équation cartésienne de la trajectoire Δ du drone, puis les coordonnées du point I où il entre dans le couloir d.

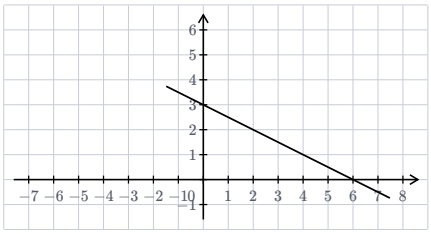
Ex. 7 **(suite)**

(d) Calcule la distance PI parcourue jusqu'au couloir, en valeur exacte, puis en mètres arrondie au mètre.

2. *Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite*

À retenir : Sur $ax+by+c=0$: $\vec{n}\,(a\,;b)$ est normal, $\vec{u}\,(-b\,;a)$ directeur. Par A : $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$, puis contrôle avec un autre point. Ex. : $x=-4$ a pour normal $(1\,;0)$. Médiatrice : passe par le milieu, $\overrightarrow{AB}$ normal.

Ex. 8 ★☆☆ **Lire une équation cartésienne** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les droites $d_1 : 5x+2y-10=0$, $d_2 : x=-5$ et $d_3 : y=-\frac{1}{2}x+3$.



(a) Donne un vecteur normal et un vecteur directeur de d_1.

(b) Donne un vecteur normal et un vecteur directeur de d_2. Précise la direction de d_2.

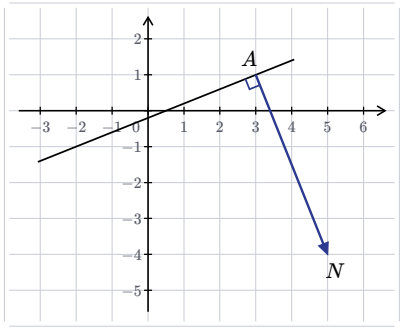
(c) Écris d_3 sous la forme $ax+by+c=0$ avec des coefficients entiers. Déduis-en un vecteur normal à d_3.

(d) Le point $A(4\,;-5)$ appartient-il à d_1 ? Justifie.

(e) Léa affirme : « $\vec{w}\,(5\,;2)$ est un vecteur directeur de d_1. » A-t-elle raison ? Justifie.

(f) Vrai ou faux ? $-10x-4y+20=0$ est aussi une équation de d_1. Justifie.

Ex. 9 ★☆☆ **Un point et un vecteur normal** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, détermine une équation cartésienne de la droite qui passe par le point donné et qui admet $\vec{n}$ comme vecteur normal. Contrôle avec le point.



(a) $A(3\,;1)$ et $\vec{n}\,(2\,;-5)$ (droite dessinée sur la figure).

Ex. 9 **(suite)**

(b) $B(-2\,;4)$ et $\vec{n}\,(-1\,;3)$.

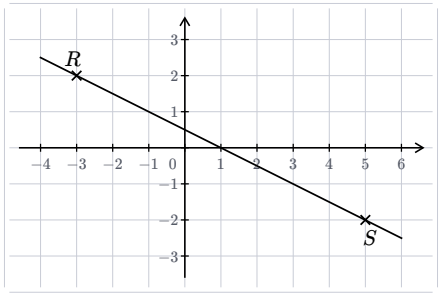
(c) $C(0\,;-3)$ et $\vec{n}\,(0\,;1)$. Précise la direction de la droite.

(d) $D(5\,;-1)$ et $\vec{n}\,(1\,;0)$. Précise la direction de la droite.

(e) $E(-4\,;-2)$ et $\vec{n}\,\left(\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\right)$. Donne une équation à coefficients entiers.

(f) Pour $F(1\,;-6)$ et $\vec{n}\,(4\,;1)$, Tom écrit $4(x-1)+(y-6)=0$, soit $4x+y-10=0$. Trouve son erreur et corrige-la.

Ex. 10 ★★☆ **La trajectoire d'un drone** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 100 m), un drone de livraison suit une trajectoire rectiligne qui passe par $R(-3\,;2)$ et $S(5\,;-2)$.



(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{RS}$. Déduis-en un vecteur normal à la droite (RS).

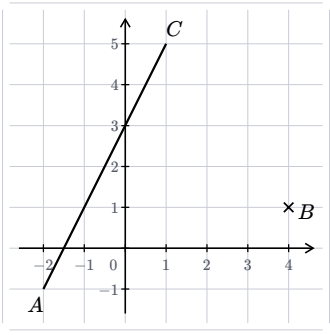
(b) Détermine une équation cartésienne de (RS). Contrôle avec S.

(c) Nadia a trouvé $(RS) : 2x-y+8=0$. Vérifie que R est sur sa droite mais pas S. Explique son erreur.

(d) La base de recharge est en $B(11\,;-5)$. Le drone y passe-t-il s'il continue tout droit ? Justifie.

(e) Détermine le réel k tel que le point $K(k\,;3)$ soit sur la trajectoire du drone.

Ex. 11 ★★☆ **Médiatrice et hauteur dans un triangle** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère le triangle ABC avec $A(-2\,;-1)$, $B(4\,;1)$ et $C(1\,;5)$.



(a) Calcule les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Ex. 11 (suite)

(b) Déduis-en une équation cartésienne de la médiatrice Δ de $[AB]$.

(c) Vérifie que $M(0\,;3)$ appartient à Δ, puis que $MA = MB$.

(d) Détermine une équation cartésienne de la hauteur h issue de A dans le triangle ABC.

(e) Vrai ou faux ? La hauteur h passe par le milieu J de $[BC]$. Justifie.

Ex. 12 ★★★ **Une famille de droites d_m** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, pour tout réel m, on note d_m l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $(2m-1)x + (m+3)y - 7 = 0$.

(a) Donne, en fonction de m, un vecteur normal et un vecteur directeur de d_m. Justifie que d_m est bien une droite pour tout réel m.

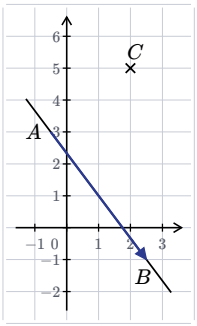
(b) Pour $m = 0$, calcule les coordonnées des points G et L de d_0 d'abscisses 2 et -4. Vérifie que $\overrightarrow{GL}$ est colinéaire au vecteur directeur trouvé à la question précédente.

(c) Détermine m pour que d_m soit verticale. Donne alors son équation sous la forme $x = k$.

(d) Détermine m pour que $\vec{w}\,(1\,;2)$ soit un vecteur directeur de d_m. Donne alors l'équation réduite de cette droite.

(e) Montre que toutes les droites d_m passent par un même point F. Donne ses coordonnées.

Ex. 13 ★★★ **Des copies à corriger sur la droite (AB)** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne $A\left(-\frac{1}{2}\,;3\right)$, $B\left(\frac{5}{2}\,;-1\right)$ et $C(2\,;5)$. Hugo cherche une équation de (AB). Il écrit : « $\overrightarrow{AB}\,(3\,;-4)$, donc $(AB) : 3x - 4y + c = 0$; avec A, je trouve $c = \frac{27}{2}$. Je contrôle avec A : ça marche. »



(a) Remplace les coordonnées de B dans l'équation de Hugo. Que constates-tu ? Explique son erreur.

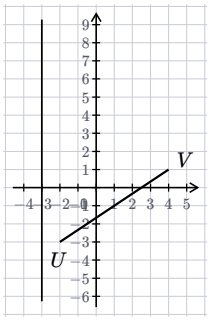
(b) Détermine une équation cartésienne correcte de (AB). Contrôle avec un point autre que celui qui t'a servi.

(c) Inès écrit $-8x - 6y + 14 = 0$, Yanis $y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$ et Léo $4x + 3y + 7 = 0$. Lesquels décrivent la droite (AB) ? Justifie.

Ex. 13 (suite)

(d) Sacha cherche la droite Δ qui passe par C et admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal. Il écrit $3(x-2) - 4(y-5) = 0$, soit $3x - 4y - 26 = 0$. Repère son erreur, corrige-la, puis contrôle avec C.

Ex. 14 ★★★ **L'antenne entre deux villages** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 km), deux villages sont situés en $U(-2\,;-3)$ et $V(4\,;1)$. Un opérateur veut installer une antenne à égale distance des deux villages, au bord de la route $r : x = -3$.



(a) Soit $M(x\,;y)$. Montre que $MU = MV \iff 3x + 2y - 1 = 0$.

(b) Retrouve cette équation avec la méthode du cours (milieu I de $[UV]$, vecteur normal). Explique pourquoi $\overrightarrow{UV}$ est normal et pas directeur.

(c) Donne un vecteur normal de r. Justifie que r coupe la médiatrice de $[UV]$, puis détermine la position W de l'antenne et la distance WU.

(d) Ben affirme : « La droite qui passe par U et admet $\overrightarrow{UV}$ comme vecteur normal est la médiatrice de $[UV]$. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Détermine le réel k pour que le point $P(k\,;2k)$ soit à égale distance de U et de V.

3. *Droites parallèles, perpendiculaires, point d'intersection*

À retenir : Normaux $(a\,;b)$, $(a'\,;b')$: $ab' - a'b = 0 \to$ parallèles (confondues si équations proportionnelles) ; $aa' + bb' = 0 \to$ perpendiculaires. Perpendiculaire à $x + 2y = 0$: normal $(2\,;-1)$. Point d'intersection : à vérifier dans les deux équations.

Ex. 15 ★☆☆ **Comparer des vecteurs normaux** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Pour chaque couple de droites, dis si elles sont parallèles (confondues ou strictement parallèles), perpendiculaires ou seulement sécantes. Justifie avec des vecteurs normaux.

(a) $d : 5x + 2y - 3 = 0$ et $d' : 2x - 5y + 7 = 0$.

(b) $d : 6x - 10y + 1 = 0$ et $d' : -9x + 15y + 4 = 0$.

Ex. 15 **(suite)**

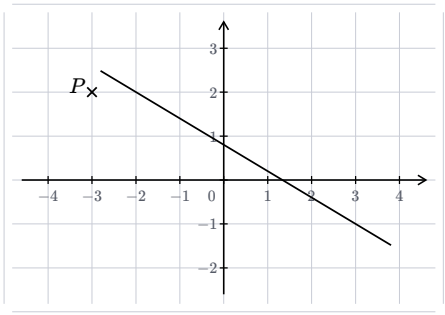
(c) $d : x = 3$ et $d' : y = -2$.

(d) $d : 3x + y - 2 = 0$ et $d' : x + 3y + 5 = 0$.

(e) $d : \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y - 1 = 0$ et $d' : 8x + 3y - 12 = 0$.

(f) $d : -2x + 8y - 5 = 0$ et $d' : 4x + y + 1 = 0$.

Ex. 16 ★☆☆ **Parallèle et perpendiculaire passant par un point** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. On donne $d : 3x + 5y - 4 = 0$ et $P(-3\,;2)$. Écris une équation de chaque droite demandée.



(a) La parallèle à d passant par P (équation cartésienne).

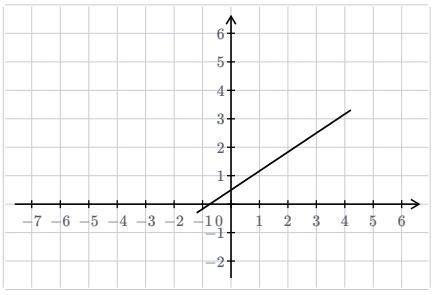
(b) La perpendiculaire à d passant par P (équation cartésienne).

(c) La perpendiculaire à la droite $x = 4$ passant par $Q(1\,;-3)$.

(d) La parallèle à $y = -2x + 5$ passant par $R(3\,;2)$, sous forme réduite.

(e) La perpendiculaire à $y = \frac{2}{3}x - 1$ passant par $S(4\,;0)$, sous forme réduite.

Ex. 17 ★★☆ **Trajectoires de drones : résoudre des systèmes** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, deux drones suivent les droites $d_1 : 2x - 3y + 7 = 0$ et $d_2 : 5x + 2y - 11 = 0$. On considère aussi $d_3 : 4x - 6y + 3 = 0$, $d_4 : -6x + 9y - 21 = 0$ et $d_5 : 3x - 2y - 13 = 0$. La figure montre d_1 et d_3.



(a) Justifie que d_1 et d_2 sont sécantes, puis calcule par combinaison les coordonnées de leur point d'intersection.

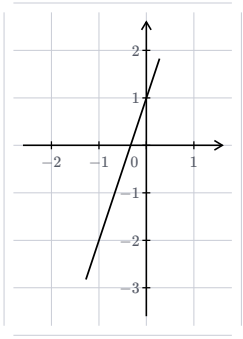
(b) Résous le système formé par les équations de d_1 et d_3. Déduis-en la position relative de ces droites.

Ex. 17 **(suite)**

(c) Montre que le système formé par d_1 et d_4 a une infinité de solutions et donne deux points communs à ces droites.

(d) Pour d_2 et d_5, Tom annonce le point d'intersection $K(5\,;1)$, car K vérifie l'équation de d_5. A-t-il raison ? Justifie et donne le bon point.

Ex. 18 ★★☆ **Allées d'un jardin : trouver le paramètre** — Sur le plan d'un jardin, muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'allée principale suit $d' : 3x - y + 1 = 0$. Une seconde allée suit $d_m : mx + 2y - 4 = 0$, où m est un réel.



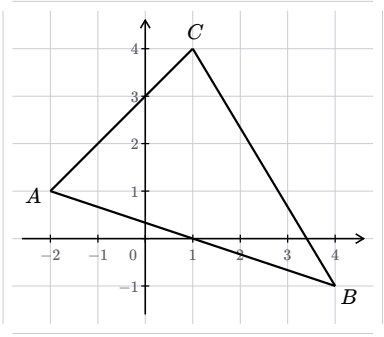
(a) Détermine m pour que d_m et d' soient parallèles. Sont-elles alors confondues ou strictement parallèles ?

(b) Inès écrit : « $d_m \perp d' \iff m \times (-1) - 3 \times 2 = 0$ ». A-t-elle raison ? Justifie et trouve la bonne valeur de m.

(c) Pour cette valeur de m, écris les équations réduites de d_m et de d', puis contrôle avec leurs coefficients directeurs.

(d) Une fontaine est placée au croisement de ces deux allées perpendiculaires. Calcule ses coordonnées.

Ex. 19 ★★★ **Orthocentre d'un triangle et erreur de Noa** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. On considère le triangle ABC avec $A(-2\,;1)$, $B(4\,;-1)$ et $C(1\,;4)$. On admet que la droite (BC) a pour équation $5x + 3y - 17 = 0$.



(a) Noa écrit : « La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC), donc elle garde le vecteur normal $(5\,;3)$: $5x + 3y + 7 = 0$. » Montre que sa droite passe par A mais qu'elle est parallèle à (BC). Explique son erreur.

Ex. 19 **(suite)**

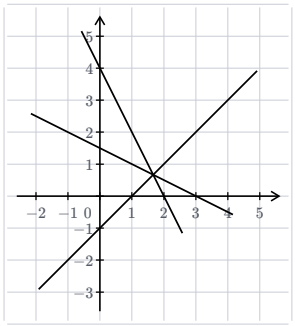
(b) Écris une équation cartésienne correcte de la hauteur h_A issue de A. Contrôle ensuite avec les équations réduites que le produit des coefficients directeurs de h_A et de (BC) vaut -1.

(c) Écris une équation cartésienne de la hauteur h_B issue de B.

(d) Justifie que h_A et h_B sont sécantes, puis calcule les coordonnées de leur point d'intersection H. Vérifie H dans les deux équations.

(e) Déduis-en, par un produit scalaire, que (CH) est perpendiculaire à (AB). Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Ex. 20 ★★★ **Faisceaux radar : discuter selon m** — Sur l'écran d'un radar, muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, deux faisceaux suivent $d_m : mx + 2y - m - 2 = 0$ et $d'_m : 2x + my - 4 = 0$, où m est un réel. On note $\Delta : x - y - 1 = 0$. La figure montre d_1, d'_1 et Δ.



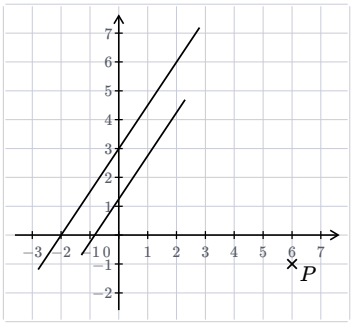
(a) Montre que d_m et d'_m sont parallèles si et seulement si $m = 2$ ou $m = -2$. Pour chaque valeur, dis si elles sont confondues ou strictement parallèles et donne le nombre de solutions du système.

(b) Détermine m pour que d_m et d'_m soient perpendiculaires. Sami veut le vérifier avec le produit des coefficients directeurs des équations réduites. Est-ce possible ici ? Justifie.

(c) On suppose $m \neq 2$ et $m \neq -2$. Montre par combinaison que les droites se coupent au point $K_m\left(\frac{m+4}{m+2}\,;\,\frac{2}{m+2}\right)$, puis vérifie K_m dans les deux équations.

(d) Montre que tous les points K_m appartiennent à Δ. Le point $E(1\,;0)$ de Δ est-il l'un des points K_m ? Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Carte au trésor : murs, puits et rivière** — Sur une carte au trésor, munie d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, le vieux mur suit $d_1 : \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 1 = 0$ et le puits est en $P(6\,;-1)$. Deux autres murs suivent $d_2 : -9x + 6y - 18 = 0$ et $d_3 : 6x - 4y + 5 = 0$. La figure montre d_1, d_3 et P.



(a) Montre que d_1, d_2 et d_3 sont parallèles. Lesquelles sont confondues, lesquelles sont strictement parallèles ? Justifie.

(b) Le trésor T est sur d_1 et sur la perpendiculaire p à d_1 passant par P. Écris une équation cartésienne de p à coefficients entiers.

(c) Lucas annonce que $T(3\,;1)$. A-t-il raison ? Justifie, puis calcule les coordonnées de T par un système.

(d) Une rivière suit $r : y = kx + \frac{1}{2}$, où k est un réel. Détermine k pour que r soit perpendiculaire à d_1. La rivière est-elle alors parallèle à p, et confondue avec p ? Justifie.

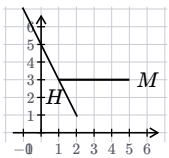
(e) Avec cette valeur de k, justifie sans calcul que r et d_3 sont sécantes. Calcule ensuite leur point d'intersection.

4. *Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite*

À retenir : Projeté H de M sur d : $H \in d$ ET $\overrightarrow{MH}$ orthogonal à d (si $M \in d$, alors $H = M$). Méthode ② : $H = M + t\,\vec{n}$, puis $MH = |t| \times \|\vec{n}\|$. Exemple : $t = -\frac{3}{2}$ et $\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$ donnent $MH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Une distance n'est jamais négative.

Ex. 22 ★★★ **Projeté ou pas ?** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Dans chaque cas, dis si le point H est le projeté orthogonal du point M sur la droite d. Justifie.

(a) $d : 2x + y - 5 = 0$, $M(5\,;3)$ et $H(1\,;3)$.



(b) $d : x - 2y + 4 = 0$, $M(4\,;-1)$ et $H(2\,;3)$.

(c) $d : y = 4$, $M(-3\,;1)$ et $H(-3\,;5)$.

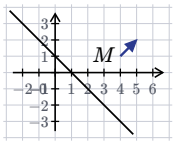
(d) $d : 3x - y - 2 = 0$, $M(1\,;1)$ et $H(1\,;1)$.

Ex. 22 **(suite)**

(e) $d : y = -x + 6$, $M(1\,;2)$ et $H\left(\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{7}{2}\right)$.

Ex. 23 ★☆☆ **Méthode ② : trouver t** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Dans chaque cas, lis un vecteur normal $\vec{n}$ de d. Cherche le projeté H de M sur d sous la forme $H = M + t\,\vec{n}$. Calcule ensuite la distance de M à d avec $MH = |t| \times \|\vec{n}\|$.

(a) $d : x + y - 1 = 0$ et $M(4\,;1)$.

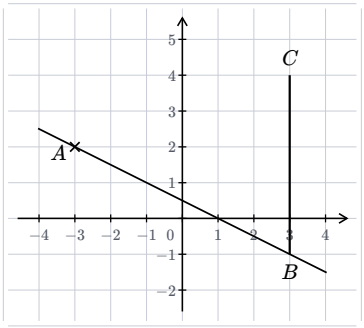


(b) $d : 3x - y + 1 = 0$ et $M(3\,;0)$.

(c) $d : 2x - 3y + 6 = 0$ et $M(1\,;-1)$ (garde des fractions exactes).

(d) $d : x = -1$ et $M(3\,;2)$.

Ex. 24 ★★☆ **Le tuyau du jardin de Noé** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 m), Noé dessine un massif triangulaire de sommets $A(-3\,;2)$, $B(3\,;-1)$ et $C(3\,;4)$. Il veut poser un tuyau entre le robinet C et l'allée (AB), et le plus court possible.



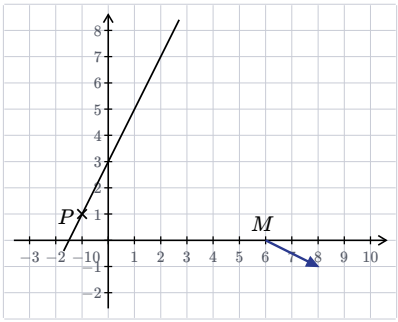
(a) Trouve un vecteur normal à (AB), puis écris une équation cartésienne de (AB).

(b) Écris une équation cartésienne de la perpendiculaire d' à (AB) passant par C.

(c) Résous le système formé par les équations de (AB) et de d'. Déduis-en le projeté orthogonal H de C sur (AB).

(d) Calcule la longueur CH du tuyau, puis l'aire du massif ABC.

Ex. 25 ★★☆ **Le drone et l'antenne : l'erreur de Lina** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 km), un drone suit la droite $d : 2x - y + 3 = 0$. Une antenne est placée en $M(6\,;0)$. Lina cherche le projeté $H = M + t\,\vec{n}$ avec $\vec{n}\,(2\,;-1)$. Elle trouve $t = -3$ et écrit : « distance $= t \times \|\vec{n}\| = -3\sqrt{5}$ ».



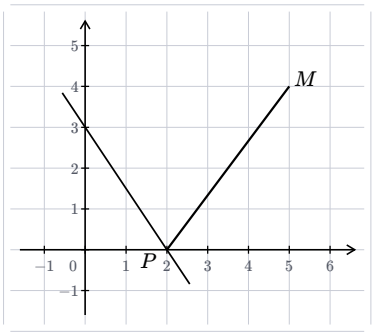
(a) Vérifie par le calcul que $t = -3$, puis donne les coordonnées de H.

(b) Lina a-t-elle raison ? Justifie, puis donne la distance de M à d. Contrôle-la avec les coordonnées de H.

(c) Le drone passe par $P(-1\,;1)$. Vérifie que $P \in d$, puis calcule MP^2, MH^2 et HP^2. Quelle relation retrouves-tu ?

(d) Démontre que pour tout point P de d distinct de H, $MP > MH$.

Ex. 26 ★★★ **Sacha et la bouée : le point le plus proche** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé (unité : 1 km). Le bord d'une plage est la droite $d : 3x + 2y - 6 = 0$. Sacha est sur une bouée en $M(5\,;4)$ et veut rejoindre la plage par le plus court chemin. Le point $P(2\,;0)$ est sur la plage.



(a) Hugo affirme : « P est sur la plage et, sur la figure, c'est le point le plus proche de M, donc c'est le projeté de M sur d. » A-t-il raison ? Justifie.

(b) Écris une équation cartésienne de la perpendiculaire d' à d passant par M.

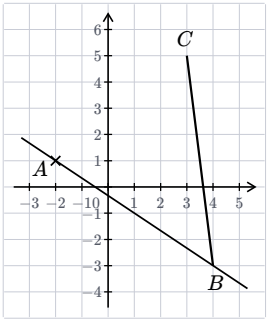
(c) Résous le système formé par d et d' pour trouver le projeté orthogonal H de M sur d. Vérifie que $H \in d$ et que $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à d.

(d) Calcule la valeur exacte de la distance de M à d, puis compare-la à MP.

Ex. 26 **(suite)**

(e) Démontre que d contient un second point N, distinct de P, tel que $MN = 5$ (utilise Pythagore dans le triangle MHN). Calcule ses coordonnées exactes.

Ex. 27 ★★★ **La parcelle de Maëlle** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé (unité : 1 hm, donc 1 unité d'aire = 1 hectare). Maëlle possède une parcelle triangulaire de sommets $A(-2\,;1)$, $B(4\,;-3)$ et $C(3\,;5)$. Elle veut calculer son aire avec la hauteur issue de C.



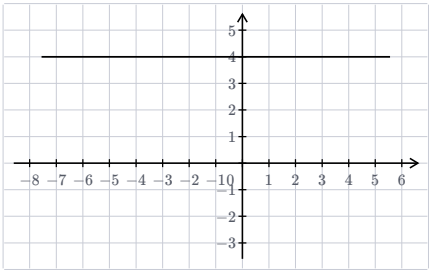
(a) Justifie que $\vec{n}\,(2\,;3)$ est normal à (AB), puis écris une équation cartésienne de (AB).

(b) Cherche le projeté orthogonal H de C sur (AB) sous la forme $H = C + t\,\vec{n}$. Donne t et H en fractions exactes, puis contrôle.

(c) Déduis-en la distance de C à (AB) avec $|t| \times \|\vec{n}\|$, puis l'aire exacte de la parcelle.

(d) Un piquet est planté en $E(1\,;-1)$. Maëlle affirme : « la distance de E à (AB) vaut $\|\vec{n}\| = \sqrt{13}$ ». A-t-elle raison ? Justifie en cherchant le projeté de E.

Ex. 28 ★★★ **Le radar côtier : l'oubli de Yanis** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé (unité : 1 km). Un bateau suit la droite $d : y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$. On veut installer un radar en un point $R(m\,;4)$ de la route côtière d'équation $y = 4$, de sorte que la distance de R à d vaille exactement 2 km.



(a) Montre que d a pour équation cartésienne $4x + 3y - 2 = 0$. Donne un vecteur normal $\vec{n}$ de d et sa norme.

(b) On note $H = R + t\,\vec{n}$ le projeté orthogonal de R sur d. Exprime t, puis les coordonnées de H, en fonction de m.

(c) Déduis-en la distance RH en fonction de m. Explique pourquoi une valeur absolue apparaît.

Ex. 28 **(suite)**

(d) Yanis affirme : « il n'y a qu'une position possible, $m = 0$ ». Trouve son erreur, donne toutes les valeurs de m et le projeté H dans chaque cas.

(e) Pour quelle valeur de m le radar est-il sur la trajectoire d ? Donne alors t, H et la distance de R à d.

5. *Équation d'un cercle : centre et rayon*

À retenir : $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = k$: si $k > 0$, c'est un cercle de centre $(\alpha\,;\beta)$ et de rayon $\sqrt{k}$; si $k = 0$, un seul point ; si $k < 0$, l'ensemble vide. Ex. : $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 13$: centre $(-5\,;1)$, $r = \sqrt{13}$. Si l'équation commence par $2x^2 + 2y^2$, je divise d'abord par 2.

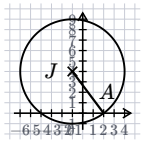
Ex. 29 ★☆☆ **Lire et écrire une équation de cercle** — Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

(a) Donne le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}_1$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+4)^2 = 49$.

(b) Donne le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}_2$: $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 11$.

(c) Écris une équation du cercle de centre $K(-2\,;-7)$ et de rayon $\sqrt{6}$.

(d) Écris une équation du cercle de centre $J(-1\,;4)$ qui passe par $A(2\,;0)$.



(e) Le point $B(-3\,;0)$ appartient-il au cercle $\mathcal{C}_1$? Justifie.

Ex. 30 ★☆☆ **Compléter les carrés : cercle, point ou vide ?** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Pour chaque équation, complète les carrés puis donne la nature de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ qui la vérifient (avec le centre et le rayon si c'est un cercle).

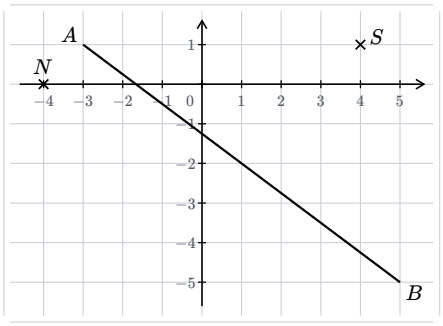
(a) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10 = 0$

(d) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 2 = 0$

Ex. 31 ★★☆ **Le bassin du jardin de Maëlle** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé, d'unité 1 m. Sur le plan de son jardin, Maëlle veut creuser un bassin circulaire de diamètre $[AB]$, avec $A(-3\,;1)$ et $B(5\,;-5)$. Une statue est placée en $S(4\,;1)$ et un banc en $N(-4\,;0)$.



(a) Détermine le centre I et le rayon du bassin.

(b) Déduis-en une équation du cercle $\mathcal{C}$ qui borde le bassin, puis sa forme développée.

(c) La statue et le banc sont-ils dans le bassin ? Justifie par le calcul.

(d) Une lampe $L(a\,;2)$ doit être posée sur le bord du bassin. Trouve les valeurs possibles de a.

Ex. 32 ★★☆ **Erreurs d'élèves et vrai ou faux** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé.

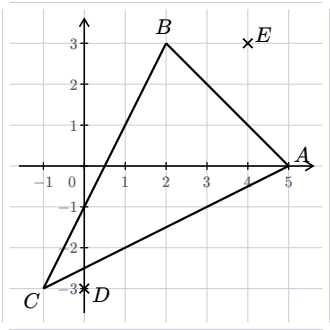
(a) Inès affirme : « $(x+2)^2+(y-7)^2=20$ est le cercle de centre $(2\,;-7)$ et de rayon 20. » A-t-elle raison ? Justifie et corrige son erreur.

(b) Tom écrit : « $x^2+y^2-10x+6y+30=0$ s'écrit $(x-5)^2+(y+3)^2=-30$, donc c'est l'ensemble vide. » A-t-il raison ? Justifie et corrige son erreur.

(c) Vrai ou faux ? « $x^2+3y^2-4x+2y-5=0$ est une équation de cercle. » Justifie.

(d) Vrai ou faux ? « $x^2+y^2+2xy-9=0$ est une équation de cercle. » Justifie.

Ex. 33 ★★★ **L'émetteur et ses trois relais** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé, d'unité 1 km. Un opérateur place un émetteur à égale distance de trois relais $A(5\,;0)$, $B(2\,;3)$ et $C(-1\,;-3)$. L'émetteur est au centre I du cercle $\mathcal{C}$ qui passe par A, B et C. Sa portée est le rayon r de $\mathcal{C}$. On cherche une équation de $\mathcal{C}$ de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$.



(a) Écris les trois équations que vérifient a, b et c, sachant que A, B et C sont sur $\mathcal{C}$.

(b) Résous ce système (soustrais les équations deux à deux pour éliminer c). Déduis-en une équation de $\mathcal{C}$.

(c) Complète les carrés. Déduis-en les coordonnées du centre I et le rayon r de $\mathcal{C}$.

(d) L'émetteur couvre-t-il le hameau $D(0\,;-3)$? Et la ferme $E(4\,;3)$? Justifie en comparant des distances au carré.

Ex. 34 ★★★ **Une famille d'équations à paramètre** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Pour tout réel m, on note $\mathcal{E}_m$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $2x^2+2y^2-4x+4my+4m^2-4m-4=0$.

(a) Détermine la nature de $\mathcal{E}_0$. Donne ses éléments caractéristiques.

(b) Montre que $\mathcal{E}_m$ a une équation de la forme $(x-1)^2+(y-\beta)^2=k(m)$. Exprime β et $k(m)$ en fonction de m.

(c) Discute selon les valeurs de m la nature de $\mathcal{E}_m$: cercle, point ou ensemble vide. Précise le point lorsque c'en est un.

(d) Pour quelle valeur de m l'ensemble $\mathcal{E}_m$ est-il un cercle de rayon maximal ? Donne ce rayon.

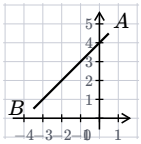
(e) Détermine les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{E}_m$ passe par l'origine O.

Ex. 35 ★★★ **Trois projets de rond-point** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé, d'unité 10 m. Pour le plan d'un futur rond-point, trois élèves proposent chacun une courbe. Ben leur demande de vérifier que c'est bien un cercle et, si c'est le cas, d'en donner le centre et le rayon.

(a) Yanis propose Γ_1 : $2x^2+2y^2+6x-10y+1=0$. Détermine la nature de Γ_1 et ses éléments caractéristiques.

Ex. 35 **(suite)**

(b) Lina prend le cercle Γ_2 de diamètre $[AB]$, avec $A\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{9}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{7}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, et annonce un rayon égal à AB. Corrige-la, puis compare Γ_2 à Γ_1.



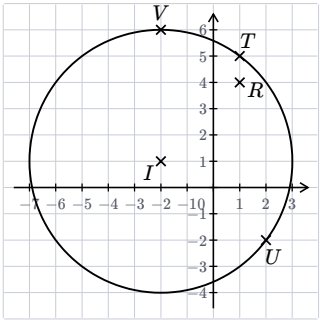
(c) Zoé propose $\Gamma_3 : x^2 + y^2 + 3x - 5y + 9 = 0$ et affirme : « c'est un cercle de même centre que Γ_1 et de rayon 3 ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Pour quelles valeurs du réel b le point $P(b\,;b)$ est-il sur Γ_1 ? Déduis-en la position de la droite d'équation $y = x$ par rapport à Γ_1.

6. *Tangente à un cercle*

À retenir : Tangente en T (vérifie d'abord que $T \in \mathcal{C}$) : $\overrightarrow{IT}$ est normal, pas directeur. $\overrightarrow{IT}\,(2\,;1)$ et $T(3\,;1)$ donnent $2x + y - 7 = 0$. Tangente $\iff$ distance de I à la droite $= r$. Le contact est le projeté de I. Pas de dérivée.

Ex. 36 ★☆☆ **Tangente en un point du cercle** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ de centre $I(-2\,;1)$.



(a) Vérifie que $T(1\,;5)$ est sur $\mathcal{C}$, puis donne un vecteur normal à la tangente t en T.

(b) Déduis-en une équation cartésienne de t.

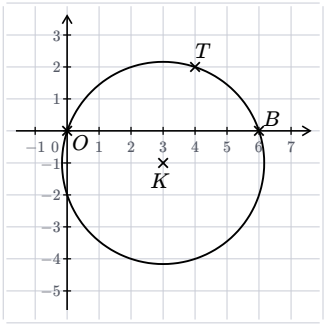
(c) Donne un vecteur directeur $\vec{u}$ de t et contrôle que $\overrightarrow{IT} \cdot \vec{u} = 0$.

(d) Léa veut dériver une fonction pour trouver la tangente en $V(-2\,;6)$. Explique pourquoi c'est inadapté, puis donne une équation de cette tangente.

(e) Lina veut tracer « la tangente en $R(1\,;4)$ ». Que dois-tu vérifier d'abord ? Conclus.

(f) Hugo affirme que la tangente en $U(2\,;-2)$ est $3x + 4y + 2 = 0$. A-t-il raison ? Justifie et corrige.

Ex. 37 ★★☆ **Le bassin du jardin** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, le bord d'un bassin circulaire a pour équation $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$.



(a) Complète les carrés pour trouver le centre K et le rayon r de $\mathcal{C}$.

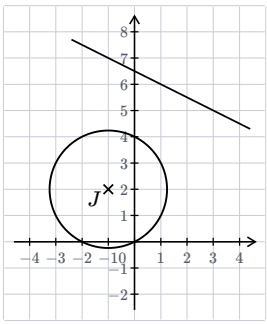
(b) Vérifie que O est sur $\mathcal{C}$, puis donne un vecteur normal à la tangente en O.

(c) La droite $d_1 : 3x - y = 0$ est-elle la tangente à $\mathcal{C}$ en O ? Justifie.

(d) La droite $d_2 : y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ est-elle la tangente à $\mathcal{C}$ en $T(4\,;2)$? Justifie.

(e) Détermine le réel a pour que la droite $d_3 : ax + y - 18 = 0$ soit la tangente à $\mathcal{C}$ en $B(6\,;0)$.

Ex. 38 ★★☆ **Le rond-point et la route** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, le bord d'un rond-point est le cercle $\mathcal{C} : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ de centre $J(-1\,;2)$. Une route rectiligne suit la droite $\Delta : x + 2y - 13 = 0$. On cherche les tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à Δ.



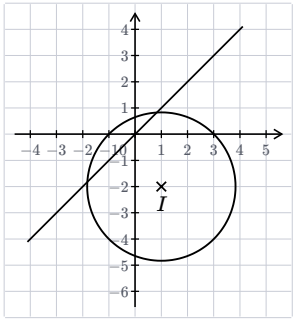
(a) Soit T le point de contact d'une tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à Δ. Justifie que $\overrightarrow{JT}$ est colinéaire à $\vec{n}\,(1\,;2)$.

(b) On écrit $T(-1+k\,;2+2k)$. Déduis-en les deux points de contact T_1 et T_2.

(c) Écris les équations des deux tangentes. Vérifie que J est le milieu de $[T_1T_2]$.

(d) Calcule le projeté orthogonal H de J sur Δ, puis la distance de J à Δ. La route touche-t-elle le rond-point ? Justifie.

Ex. 39 ★★☆ **Le drone et l'antenne** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la zone couverte par une antenne est limitée par le cercle $\mathcal{C} : (x-1)^2+(y+2)^2=8$ de centre $I(1\,;-2)$. Un drone suit la droite $d_p : y = x + p$, où p est un réel. La figure montre $d_0 : y = x$.



(a) Montre que les abscisses des points communs à d_p et $\mathcal{C}$ vérifient $2x^2+(2p+2)x+p^2+4p-3=0$.

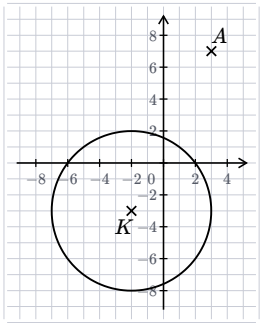
(b) Calcule le discriminant en fonction de p. Déduis-en les valeurs de p pour lesquelles d_p est tangente à $\mathcal{C}$.

(c) Pour la plus grande de ces valeurs, calcule le point de contact T.

(d) Calcule le projeté orthogonal H de I sur cette tangente et compare-le à T. Contrôle ensuite que $\overrightarrow{IT}\cdot\vec{u}=0$, avec $\vec{u}\,(1\,;1)$.

(e) Combien la trajectoire $d_0 : y = x$ a-t-elle de points communs avec $\mathcal{C}$? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Les visées rasantes d'Inès** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, Inès est postée en $A(3\,;7)$ et observe un îlot dont le bord est le cercle $\mathcal{C} : x^2+y^2+4x+6y-12=0$. Ses deux lignes de visée rasantes sont les tangentes à $\mathcal{C}$ qui passent par A.



(a) Complète les carrés pour donner le centre K et le rayon r de $\mathcal{C}$, puis justifie que A est à l'extérieur du disque.

(b) Soit $T(x\,;y)$ un point de $\mathcal{C}$. Justifie que la tangente en T passe par A si et seulement si $\overrightarrow{TK}\cdot\overrightarrow{TA}=0$. Déduis-en une équation développée du cercle Γ de diamètre $[KA]$.

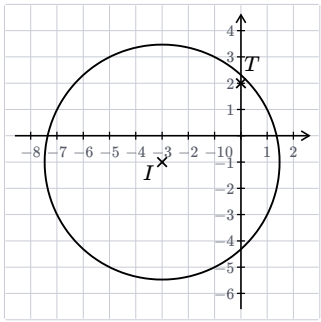
(c) Soustrais les équations de $\mathcal{C}$ et de Γ : montre que les points de contact sont sur une droite que tu donneras. Calcule ensuite leurs coordonnées (T_1 est celui d'ordonnée négative).

Ex. 40 **(suite)**

(d) Pour la tangente en T_2, Yanis prend $\overrightarrow{KT_2}$ comme vecteur directeur et trouve $4x+3y+17=0$. Explique son erreur, corrige-la, puis contrôle que ta droite passe par A.

(e) Donne une équation de la tangente en T_1, puis compare les longueurs AT_1 et AT_2.

Ex. 41 ★★★ **Le phare et les bateaux** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : le kilomètre), un phare est placé en $I(-3\,;-1)$. La zone qu'il éclaire est limitée par le cercle $\mathcal{C} : (x+3)^2+(y+1)^2=20$. Pour tout réel m, on note d_m la droite d'équation $2x-y+m=0$.



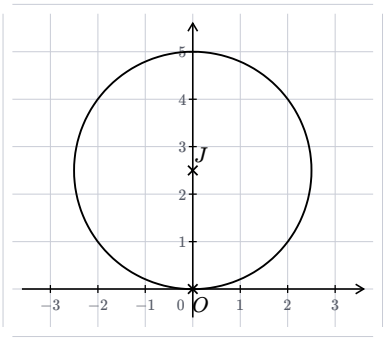
(a) Malo veut la tangente à $\mathcal{C}$ en $T(0\,;2)$. Il prend $\overrightarrow{IT}$ comme vecteur normal et trouve $x+y-2=0$. A-t-il raison ? Justifie.

(b) Calcule, en fonction de m, les coordonnées du projeté orthogonal H_m de I sur d_m, puis la distance IH_m.

(c) Détermine les valeurs de m pour lesquelles d_m est tangente à $\mathcal{C}$, et donne chaque point de contact. Justifie que ces deux points sont diamétralement opposés.

(d) Un bateau suit la route d_0. Montre qu'il traverse la zone éclairée, puis calcule la longueur exacte de la partie de sa route qui est éclairée.

Ex. 42 ★★★ **Un cercle et la parabole** — Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, Ben trace la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ et le cercle $\mathcal{C} : x^2+y^2-5y=0$.



(a) Complète le carré en y pour donner le centre J et le rayon r de $\mathcal{C}$.

Ex. 42 **(suite)**

(b) Remplace x^2 par y pour déterminer les points communs à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$. On note A celui d'abscisse positive et B son symétrique.

(c) Écris une équation de la tangente t_A à $\mathcal{C}$ en A, puis contrôle ton résultat avec un vecteur directeur de t_A.

(d) Chloé affirme : « t_A ne rencontre $\mathcal{P}$ qu'au point A. » Vrai ou faux ? Justifie, puis explique pourquoi on obtient t_A sans aucune dérivée.

(e) Les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et en B se coupent en S. Calcule les coordonnées de S et la longueur SA.

7. *Intersections droite-cercle et parabole-cercle*

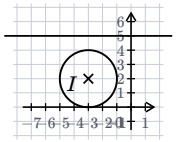
À retenir : Substitue y (ou x) de la droite dans le cercle, puis ordonne le trinôme : $\Delta > 0$ deux points, $\Delta = 0$ tangente, $\Delta < 0$ aucun point. L'autre coordonnée se calcule avec la DROITE. Ex. : $x^2 + y^2 = 2$ et $y = x$ donnent $2x^2 = 2$, puis $(1\,;1)$ et $(-1\,;-1)$.

Ex. 43 ★☆☆ **Combien de points communs ?** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Dans chaque cas, substitue, ordonne le trinôme obtenu, calcule Δ et déduis-en le nombre de points communs au cercle $\mathcal{C}$ et à la droite d.

(a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 10$ et $d : y = x + 2$.

(b) $\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ et la droite verticale $d : x = 4$.

(c) $\mathcal{C} : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$ et la droite horizontale $d : y = 5$.



(d) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 20$ et $d : y = \dfrac{1}{2}x + 5$.

(e) $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ et $d : y = -3x + 10$.

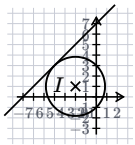
Ex. 44 ★☆☆ **Coordonnées des points communs** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Dans chaque cas, détermine les coordonnées des points communs au cercle $\mathcal{C}$ et à la droite d, puis contrôle.

(a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$ et $d : y = x - 1$.

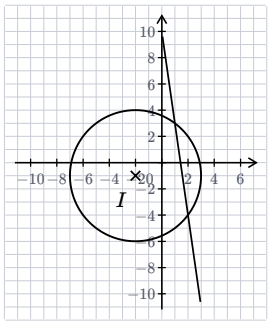
(b) $\mathcal{C} : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$ et $d : x - 2y - 7 = 0$ (isole x).

(c) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ et $d : y = -x + 2$.

(d) $\mathcal{C} : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $d : y = x + 7$.



Ex. 45 ★★☆ **Le cargo et la portée du phare** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé, l'unité est le kilomètre. Un phare est placé en $I(-2\,;-1)$ et sa portée est de 5 km. Un cargo suit la route rectiligne $d : 7x + y - 10 = 0$.



(a) Écris une équation du cercle $\mathcal{C}$ qui limite la zone éclairée par le phare.

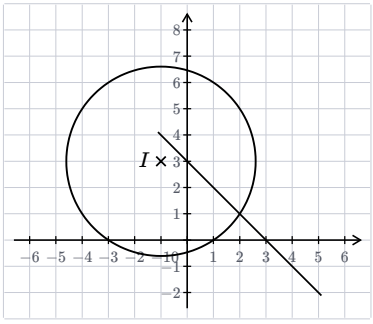
(b) Détermine le projeté orthogonal H de I sur d en écrivant $H = I + t\,\vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur normal à d, puis IH. Annonce le nombre de points communs à d et à $\mathcal{C}$.

(c) Substitue y dans l'équation de $\mathcal{C}$, ordonne le trinôme et calcule Δ. Est-ce cohérent avec ta prévision ? Justifie.

(d) Déduis-en les coordonnées des points A et B où la route du cargo coupe $\mathcal{C}$ (A est celui qui a la plus petite abscisse).

(e) Calcule la longueur du trajet du cargo dans la zone éclairée.

Ex. 46 ★★☆ **Quatre points pour Noé ?** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. On considère $\mathcal{C} : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$ et $d : x + y - 3 = 0$. Noé écrit : « $y = -x + 3$, j'obtiens $x^2 + x - 6 = 0$, donc $x = 2$ ou $x = -3$. Avec $x = 2$ dans $\mathcal{C}$, $(y-3)^2 = 4$, donc $y = 1$ ou $y = 5$. Avec $x = -3$, $y = 0$ ou $y = 6$. Il y a quatre points communs. »



(a) Donne le centre et le rayon de $\mathcal{C}$, puis développe et ordonne pour vérifier l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ de Noé.

(b) Noé a-t-il raison de trouver quatre points ? Justifie, puis donne les vrais points communs.

(c) Vérifie que tes deux points appartiennent à $\mathcal{C}$ et à d, et que le point $(2\,;5)$ de Noé n'est pas sur d.

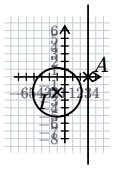
Ex. 46 **(suite)**

(d) Pour quelles valeurs du réel k la droite $d_k : x + y - k = 0$ est-elle tangente à $\mathcal{C}$?

Ex. 47 ★★★ **Le drone et la zone interdite** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé, l'unité est le kilomètre. Une zone interdite de survol est limitée par le cercle $\mathcal{C} : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$. Le drone d'Inès part de $A(3\,;0)$ en ligne droite. Pour m réel, on note $d_m : y = m(x-3)$.

(a) Détermine le centre I et le rayon de $\mathcal{C}$, puis la position de A par rapport à $\mathcal{C}$.

(b) La droite verticale $\delta : x = 3$ passe par A. Prévois par la distance de I à δ, puis vérifie par le calcul, le nombre de points communs à δ et $\mathcal{C}$.



(c) Montre que les abscisses des points communs à d_m et $\mathcal{C}$ vérifient $(1+m^2)x^2 + (2+4m-6m^2)x + 9m^2 - 12m - 5 = 0$.

(d) Montre que le discriminant vaut $\Delta = -8(3m^2 - 8m - 3)$. Déduis-en les valeurs de m pour lesquelles d_m est tangente à $\mathcal{C}$, puis celles pour lesquelles elle traverse la zone.

(e) Pour chaque tangente trouvée, calcule les coordonnées du point de contact T, puis contrôle avec le vecteur $\overrightarrow{IT}$.

Ex. 48 ★★★ **Des balles dans le bol de skate** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé. Dans un plan de coupe, le bol de skate de Malo a pour profil la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$. On étudie ses points communs avec le cercle $\Gamma : x^2 + (y-1)^2 = 3$, puis, pour $k > 0$, avec le cercle $\mathcal{C}_k$: $x^2 + (y-2)^2 = k$.

(a) Donne le centre et le rayon de Γ. Remplace x^2 par y dans l'équation de Γ et ordonne l'équation en y obtenue.

(b) Résous cette équation, puis donne les coordonnées de tous les points communs à $\mathcal{P}$ et Γ.

(c) Montre que les ordonnées des points communs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_k$ vérifient $y^2 - 3y + 4 - k = 0$, de discriminant $\Delta = 4k - 7$.

(d) Pour $k = 4$, Malo affirme : « deux valeurs de y positives ou nulles, donc quatre points communs ». A-t-il raison ? Justifie en donnant les points.

(e) Selon les valeurs de $k > 0$, détermine le nombre de points communs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_k$. Pour $k = \frac{7}{4}$, donne leurs coordonnées.

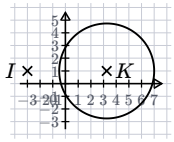
Ex. 49 ★★★ **Les deux antennes de Chloé** — Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé, l'unité est le kilomètre. Chloé étudie les zones couvertes par deux antennes, limitées par les cercles $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ et $\mathcal{C}_2 : 2x^2 + 2y^2 - 13x - 4y - 5 = 0$.

(a) Complète les carrés pour déterminer le centre I et le rayon de $\mathcal{C}_1$.

Ex. 49 **(suite)**

(b) Divise l'équation de $\mathcal{C}_2$ par 2, puis détermine son centre K et son rayon.

(c) Soustrais membre à membre l'équation de $\mathcal{C}_1$ et celle de $\mathcal{C}_2$ divisée par 2. Déduis-en que tout point commun aux deux cercles est sur une droite δ à préciser.



(d) Compare $\text{dist}(I\,;\delta)$ au rayon de $\mathcal{C}_1$ pour prévoir, puis calcule les points communs E (ordonnée positive) et F. Vérifie qu'ils sont sur $\mathcal{C}_2$.

(e) Écris une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_1$ en E. Montre que $K \in T$, puis déduis-en que T est perpendiculaire à la tangente à $\mathcal{C}_2$ en E.