1. Rappels de 2nde : géométrie repérée

Ex. 1 ★☆☆ **Vecteurs, milieux et distances**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$, soit $(1-(-3)\,;-1-2)$.
Donc $\overrightarrow{AB}\,(4\,;-3)$. Contrôle : A plus $(4\,;-3)$ donne bien $(1\,;-1)$, c'est-à-dire B.

(b) Le milieu, c'est la demi-somme des coordonnées : $x_I = \frac{-3+1}{2} = -1$ et $y_I = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$.
Donc $I\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$.

(c) $AB = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$. Attention : $(-3)^2 = 9$, pas -9.
Donc $AB = 5$.

(d) $\overrightarrow{AC}\,(-5-(-3)\,;5-2)$, soit $\overrightarrow{AC}\,(-2\,;3)$. Puis $AC = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
Donc $AC = \sqrt{13}$.

(e) $x_K = \dfrac{1+(-5)}{2} = -2$ et $y_K = \dfrac{-1+5}{2} = 2$.
Donc $K(-2\,;2)$.

(f) La formule vient du théorème de Pythagore, appliqué au triangle rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. Il faut donc des axes perpendiculaires, et la même unité sur les deux axes ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$). C'est exactement ce qu'est un repère orthonormé.

Ex. 2 ★☆☆ **Colinéarité et alignement par le déterminant**

(a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 2\times 9 - (-3)\times(-6) = 18-18 = 0$. Le déterminant est nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (d'ailleurs $\vec{v} = -3\vec{u}$).

(b) $\det(\vec{s},\vec{w}) = 3\times 3 - 5\times 5 = 9-25 = -16 \neq 0$. Les vecteurs ne sont donc pas colinéaires. Piège : $xx' - yy' = 15-15 = 0$, ce qui ferait croire le contraire. Ce n'est pas le déterminant.

(c) $\overrightarrow{EF}\,(3\,;2)$ et $\overrightarrow{EG}\,(9\,;6)$. $\det = 3\times 6 - 2\times 9 = 18-18 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires et ont le point E en commun, donc E, F, G sont alignés.

(d) $\overrightarrow{PQ}\,\left(1\,;\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{PR}\,\left(3\,;\frac{7}{2}\right)$. $\det = 1\times\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\times 3 = \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -1 \neq 0$. Les points P, Q, R ne sont donc pas alignés.

(e) Les vecteurs sont colinéaires $\iff m\times 6 - 4\times 3 = 0 \iff 6m = 12 \iff m = 2$. Contrôle : $\vec{a}\,(2\,;4)$ et $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a}$.
Donc $m = 2$.

Ex. 3 ★★☆ **Équations cartésiennes : lire, tester, convertir**

(a) Sur $ax+by+c=0$, le vecteur $(-b\,;a)$ est directeur. Pour d_1 : $a=4$, $b=2$, donc $\vec{u}_1\,(-2\,;4)$. Contrôle : $4\times(-2)+2\times 4 = 0$. Pour d_2 : $a=2$, $b=0$, donc $\vec{u}_2\,(0\,;2)$, un vecteur vertical.

(b) Pour A : $4\times(-1)+2\times 5-6 = 0$, donc $A\in d_1$. Pour B : $4\times 1+2\times 2-6 = 2\neq 0$, donc $B\notin d_1$.

(c) $4x+2y-6=0 \iff 2y = -4x+6 \iff y = -2x+3$. Contrôle avec A : $-2\times(-1)+3 = 5$. La pente est -2, qui est négative.

(d) Non. d_2 : $2x+5=0 \iff x = -\frac{5}{2}$. Il n'y a pas de terme en y, donc on ne peut pas isoler y : la droite est verticale. Une droite verticale n'a pas d'équation réduite $y = mx+p$, mais elle a une équation cartésienne.

(e) $M(x\,;y)\in(AC) \iff \overrightarrow{AM}\,(x+1\,;y-5)$ et $\overrightarrow{AC}\,(5\,;0)$ sont colinéaires $\iff (x+1)\times 0 - (y-5)\times 5 = 0 \iff -5y+25 = 0 \iff y-5=0$. Contrôles : A et C ont pour ordonnée 5, et $5-5=0$.
Donc (AC) : $y-5=0$, soit $0x+y-5=0$. C'est une droite horizontale, de vecteur directeur $(-b\,;a) = (-1\,;0)$. Contrairement à d_2, elle a une équation réduite : $y=5$, de pente nulle.

Ex. 4 ★★☆ **Carte au trésor : corrige les erreurs**

(a) Inès a calculé $P-R$ au lieu de $R-P$. On a $\overrightarrow{PR}\,(x_R - x_P\,;y_R-y_P) = (4-(-2)\,;-1-3)$, donc $\overrightarrow{PR}\,(6\,;-4)$.

(b) Jules a pris la demi-différence. Le milieu, c'est la demi-somme : $x_J = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $y_J = \frac{3+(-1)}{2} = 1$.
Donc $J(1\,;1)$.

(c) Malo s'est trompé sur $(-4)^2$, qui vaut 16 et non -16. Nora a élevé la somme au carré, alors qu'il faut le carré de chaque différence. Correction : $PR^2 = 6^2+(-4)^2 = 36+16 = 52$, donc $PR = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (environ 72 m).

(d) $\frac{1}{3}\overrightarrow{PR}\,\left(2\,;-\frac{4}{3}\right)$.
Donc $x_T = -2+2 = 0$ et $y_T = 3-\frac{4}{3} = \frac{5}{3}$, d'où $T\left(0\,;\frac{5}{3}\right)$. Contrôle : $\overrightarrow{PT}\,\left(2\,;-\frac{4}{3}\right)$ et $\overrightarrow{PR}\,(6\,;-4)$ donnent $\det = 2\times(-4) - \left(-\frac{4}{3}\right)\times 6 = 0$. Les vecteurs sont bien colinéaires.

Ex. 5 ★★★ **Le parallélogramme du jardin**

(a) $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. On a $\overrightarrow{BC}\,(4-2\,;3-(-2))$, soit $\overrightarrow{BC}\,(2\,;5)$ (arrivée moins départ, et pas $B-C$). Avec $D(x\,;y)$: $\overrightarrow{AD}\,(x+3\,;y-1)$, donc $x+3=2$ et $y-1=5$, d'où $D(-1\,;6)$. Le centre K est le milieu de $[AC]$ (demi-somme) : $K\left(\frac{-3+4}{2}\,;\frac{1+3}{2}\right)$, soit $K\left(\frac{1}{2}\,;2\right)$. Contrôle : le milieu de $[BD]$ est $\left(\frac{2-1}{2}\,;\frac{-2+6}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\,;2\right)$. Les diagonales ont bien le même milieu.

(b) Le repère est orthonormé, donc on peut utiliser la formule de la distance. $\overrightarrow{AB}\,(5\,;-3)$, donc $AB=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$. Attention : $(-3)^2=9$, et pas -9. $\overrightarrow{AD}\,(2\,;5)$, donc $AD=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$. Comme $34\neq 29$, on a $AB\neq AD$: deux côtés consécutifs n'ont pas la même longueur.
Donc $ABCD$ n'est pas un losange.

(c) $\overrightarrow{BD}\,(-1-2\,;6+2)$, soit $\overrightarrow{BD}\,(-3\,;8)$, dirige (BD). La droite $ax+by+c=0$ est dirigée par $(-b\,;a)$. On prend $-b=-3$ et $a=8$, donc $b=3$, et on obtient $8x+3y+c=0$. Avec B : $16-6+c=0$, donc $c=-10$. Ainsi (BD) : $8x+3y-10=0$. Contrôle avec D : $-8+18-10=0$, et avec K : $4+6-10=0$. Comme $b\neq 0$, on isole y : $3y=-8x+10$, soit $y=-\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}$.

(d) B, D et E sont alignés $\iff$ $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires. On a $\overrightarrow{BD}\,(-3\,;8)$ et $\overrightarrow{BE}\,(-4\,;11)$. Le déterminant vaut $xy'-yx'=(-3)\times 11-8\times(-4)=-33+32=-1$. Il est non nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points ne sont pas alignés. Léo a tort. Contrôle avec l'équation : $8\times(-2)+3\times 9-10=1\neq 0$. Le dessin trompe : seul le calcul permet de conclure.

Ex. 6 ★★★ **Trois antennes et un relais**

(a) Le repère est orthonormé, donc on applique la formule de la distance, en mettant au carré chaque différence (et pas leur somme). $RS=\sqrt{(5-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$. $RT=\sqrt{(5-3)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$. $ST=\sqrt{(5-5)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{25}=5$. On a $RS^2+RT^2=5+20=25=ST^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en R. Il n'est pas isocèle, car $\sqrt{5}\neq 2\sqrt{5}$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse $[ST]$.
Donc $K\left(\frac{5+5}{2}\,;\frac{1+(-4)}{2}\right)$, soit $K\left(5\,;-\frac{3}{2}\right)$, et $r=\frac{ST}{2}=\frac{5}{2}$. Contrôle : $KR=\sqrt{(3-5)^2+\left(0+\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$.

(c) On compare KP et r. $KP^2=\left(\frac{7}{2}-5\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2^2=\frac{9}{4}+\frac{16}{4}=\frac{25}{4}$. Attention : $\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ est positif.
Donc $KP=\frac{5}{2}=r$: le relais P est exactement sur le cercle.

(d) $[RW]$ est un diamètre, donc K est le milieu de $[RW]$: $x_K=\frac{x_R+x_W}{2}$, d'où $x_W=2x_K-x_R=10-3=7$, et de même $y_W=2y_K-y_R=-3-0=-3$.
Donc $W(7\,;-3)$. Contrôle : $KW^2=(7-5)^2+\left(-3+\frac{3}{2}\right)^2=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$, donc $KW=\frac{5}{2}=r$. Les diagonales $[RW]$ et $[ST]$ de $RSWT$ ont le même milieu K, donc $RSWT$ est un parallélogramme. Elles ont aussi la même longueur : $RW=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5=ST$.
Donc $RSWT$ est un rectangle.

(e) Non. Le repère de Hugo n'est pas orthonormé, et la formule de la distance n'est valable qu'en repère orthonormé. $[ST]$ est vertical et mesure 5 unités d'ordonnée, donc $5\times 2=10$ cm sur le dessin. Pour $[RS]$: 2 unités en abscisse donnent 2 cm, et 1 unité en ordonnée donne 2 cm. Par Pythagore sur le papier, $RS=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ cm, et non $\sqrt{5}$ cm.

Ex. 7 ★★★ **Le drone et son couloir**

(a) Pour $ax+by+c=0$, un vecteur directeur est $(-b\,;a)$. Ici $a=3$ et $b=-2$, donc $\vec{u}\,(2\,;3)$. Nadia a oublié le changement de signe. Son vecteur ne convient pas : $(-2)\times 3-3\times 2=-12\neq 0$, donc il n'est pas colinéaire à $\vec{u}$. Contrôle : $U(-2\,;-1)$ est sur d car $-6+2+4=0$, et $V(0\,;2)$ aussi car $0-4+4=0$. On obtient $\overrightarrow{UV}\,(2\,;3)=\vec{u}$.

(b) Ilyes a calculé $xx'-yy'$, ce qui n'est pas le déterminant. La trajectoire est parallèle à d $\iff$ $\vec{u}\,(2\,;3)$ et $\vec{v}_m$ sont colinéaires $\iff$ $2(m-2)-3(m+1)=0$. Cela donne $-m-7=0$, donc $m=-7$.
Contrôle : $\vec{v}_{-7}\,(-6\,;-9)=-3\vec{u}$. Avec $m=8$, on aurait $\vec{v}\,(9\,;6)$ et $2\times 6-3\times 9=-15\neq 0$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Enfin $P\notin d$, car $3\times(-3)-2\times 1+4=-7\neq 0$. La trajectoire est donc strictement parallèle à d, et le drone ne rencontre jamais le couloir.

Ex. 7 **(suite)**

(c) Pour $m = 3$, $\vec{v}_3\,(4\,;1)$. On veut $(-b\,;a) = (4\,;1)$, donc $b = -4$ et $a = 1$: l'équation s'écrit $x - 4y + c = 0$. Avec P : $-3 - 4 + c = 0$, donc $c = 7$, et Δ : $x - 4y + 7 = 0$.
On résout le système par substitution. De Δ, on tire $x = 4y - 7$, qu'on remplace dans d :
$3(4y - 7) - 2y + 4 = 0$, soit $10y - 17 = 0$.
Donc $y = \frac{17}{10}$ et $x = \frac{68}{10} - 7 = -\frac{1}{5}$. Ainsi $I\left(-\frac{1}{5}\,;\frac{17}{10}\right)$.
Contrôle dans d : $-\frac{6}{10} - \frac{34}{10} + \frac{40}{10} = 0$. Contrôle dans Δ : $-\frac{2}{10} - \frac{68}{10} + \frac{70}{10} = 0$.

(d) Le repère est orthonormé. On a $\overrightarrow{PI}\left(-\frac{1}{5} + 3\,;\frac{17}{10} - 1\right)$, soit $\overrightarrow{PI}\left(\frac{14}{5}\,;\frac{7}{10}\right)$.
Donc $PI = \sqrt{\frac{784}{100} + \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{833}{100}} = \frac{7\sqrt{17}}{10}$ unité. Avec 1 unité $= 100$ m : $PI = 70\sqrt{17} \approx 288{,}6$ m, soit environ 289 m au mètre près.

2. *Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite*

Ex. 8 ★☆☆ **Lire une équation cartésienne**

(a) Sur $ax + by + c = 0$, $\vec{n}\,(a\,;b)$ est normal et $\vec{u}\,(-b\,;a)$ est directeur. Ici $a = 5$ et $b = 2$: $\vec{n}\,(5\,;2)$ est normal à d_1 et $\vec{u}\,(-2\,;5)$ la dirige. Contrôle : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 5 \times (-2) + 2 \times 5 = 0$.

(b) $x = -5$ s'écrit $x + 0y + 5 = 0$. Ici $a = 1$ et $b = 0$: $\vec{n}\,(1\,;0)$ est normal à d_2 et $\vec{u}\,(0\,;1)$ la dirige. Contrôle : $1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. La droite d_2 est verticale (parallèle à l'axe des ordonnées).

(c) On multiplie par 2 : $2y = -x + 6$, soit d_3 : $x + 2y - 6 = 0$.
Donc $\vec{n}\,(1\,;2)$ est normal à d_3. Contrôle avec $(0\,;3)$: $0 + 6 - 6 = 0$. Contrôle avec $(6\,;0)$: $6 + 0 - 6 = 0$.

(d) On remplace : $5 \times 4 + 2 \times (-5) - 10 = 20 - 10 - 10 = 0$. Les coordonnées de A vérifient l'équation, donc $A \in d_1$.

(e) Non. $(5\,;2)$ est un vecteur NORMAL à d_1 : on le lit sur l'équation. Un vecteur directeur est $\vec{u}\,(-2\,;5)$. Or $\det(\vec{w}, \vec{u}) = 5 \times 5 - 2 \times (-2) = 29 \neq 0$, donc $\vec{w}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires. De plus $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$: $\vec{w}$ est orthogonal à d_1. Léa a tort.

(f) Vrai. $-10x - 4y + 20 = -2(5x + 2y - 10)$. Multiplier une équation par un réel non nul donne une autre équation de la même droite : l'équation cartésienne n'est pas unique.

Ex. 9 ★☆☆ **Un point et un vecteur normal**

(a) $M(x\,;y)$ est sur la droite $\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 2(x - 3) - 5(y - 1) = 0 \iff 2x - 5y - 1 = 0$.
Contrôle avec A : $6 - 5 - 1 = 0$.

(b) $-1(x + 2) + 3(y - 4) = 0 \iff -x + 3y - 14 = 0$.
Attention au signe de $c = -(ax_B + by_B) = -(2 + 12) = -14$. Contrôle avec B : $2 + 12 - 14 = 0$.

(c) $0(x - 0) + 1(y + 3) = 0 \iff y + 3 = 0$, soit $y = -3$.
Contrôle avec C : $-3 + 3 = 0$. Le vecteur normal $(0\,;1)$ est vertical, donc la droite est horizontale.

(d) $1(x - 5) + 0(y + 1) = 0 \iff x - 5 = 0$, soit $x = 5$.
Contrôle avec D : $5 - 5 = 0$. Le vecteur normal $(1\,;0)$ est horizontal, donc la droite est verticale.

(e) $6\vec{n}\,(3\,;4)$ est colinéaire à $\vec{n}$, donc normal lui aussi.
L'équation est $3x + 4y + c = 0$; avec E : $-12 - 8 + c = 0$, donc $c = 20$. Ainsi $3x + 4y + 20 = 0$.
Contrôle avec E : $-12 - 8 + 20 = 0$.

(f) Il faut $y - y_F = y - (-6) = y + 6$. L'équation correcte est $4(x - 1) + (y + 6) = 0$, soit $4x + y + 2 = 0$.
Contrôle avec F : $4 - 6 + 2 = 0$, alors que l'équation de Tom donne $4 - 6 - 10 = -12 \neq 0$.

Ex. 10 ★★☆ **La trajectoire d'un drone**

(a) $\overrightarrow{RS}\,(5 - (-3)\,;-2 - 2)$, soit $\overrightarrow{RS}\,(8\,;-4)$. C'est un vecteur DIRECTEUR, comme $\vec{u}\,(2\,;-1)$. On échange les coordonnées et on change un signe : $\vec{n}\,(1\,;2)$.
Contrôle : $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{n} = 8 \times 1 + (-4) \times 2 = 0$.
Donc $\vec{n}$ est normal à (RS).

(b) L'équation est $x + 2y + c = 0$. Avec R : $-3 + 4 + c = 0$, donc $c = -1$. Ainsi (RS) : $x + 2y - 1 = 0$. Contrôle avec S : $5 - 4 - 1 = 0$.

(c) Avec R : $2 \times (-3) - 2 + 8 = 0$. Avec S : $2 \times 5 - (-2) + 8 = 20 \neq 0$. Nadia a pris $(2\,;-1)$, qui est un vecteur directeur, comme vecteur normal. Sa droite passe par R mais elle est perpendiculaire à (RS). Le contrôle avec un second point aurait révélé l'erreur.

(d) $11 + 2 \times (-5) - 1 = 0$: les coordonnées de B vérifient l'équation de (RS). Le drone passe donc par la base.

(e) $K \in (RS) \iff k + 2 \times 3 - 1 = 0 \iff k = -5$.
Contrôle : $-5 + 6 - 1 = 0$.
Donc $K(-5\,;3)$.

Ex. 11 ★★☆ **Médiatrice et hauteur dans un triangle**

(a) $I\left(\frac{-2+4}{2}\,;\,\frac{-1+1}{2}\right)$, soit $I(1\,;0)$. $\overrightarrow{AB}\,(4-(-2)\,;1-(-1))$, soit $\overrightarrow{AB}\,(6\,;2)$.

(b) La médiatrice passe par le milieu I et admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal, donc aussi $\vec{n}\,(3\,;1)$. L'équation est $3x+y+c=0$; avec I : $3+0+c=0$, donc $c=-3$. Ainsi $\Delta : 3x+y-3=0$. Contrôle : un vecteur directeur de Δ est $(-1\,;3)$ et $\overrightarrow{AB}\cdot(-1\,;3)=6\times(-1)+2\times 3=0$.

(c) $3\times 0+3-3=0$, donc $M\in\Delta$. $MA^2=(-2-0)^2+(-1-3)^2=4+16=20$ et $MB^2=(4-0)^2+(1-3)^2=16+4=20$.
Donc $MA=MB=2\sqrt{5}$: c'est bien la propriété de la médiatrice.

(d) La hauteur issue de A passe par A et elle est perpendiculaire à (BC) : $\overrightarrow{BC}\,(-3\,;4)$ lui est normal. Donc $-3(x+2)+4(y+1)=0 \iff -3x+4y-2=0$, soit $h : 3x-4y+2=0$. Contrôle avec A : $-6+4+2=0$. Contrôle avec $(2\,;2)$: $6-8+2=0$, et $\overrightarrow{BC}\cdot(4\,;3)=-12+12=0$.

(e) Faux. $J\left(\frac{5}{2}\,;3\right)$ et $3\times\frac{5}{2}-4\times 3+2=-\frac{5}{2}\neq 0$. La hauteur passe par le sommet A, pas par le milieu de $[BC]$
(c'est la médiatrice de $[BC]$ qui passe par J).

Ex. 12 ★★★ **Une famille de droites** d_m

(a) Sur $ax+by+c=0$, on lit le vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b)$ et le vecteur directeur $(-b\,;a)$. Ici $\vec{n}\,(2m-1\,;m+3)$ et $\vec{u}\,(-m-3\,;2m-1)$. Contrôle : $\vec{u}\cdot\vec{n}=(2m-1)(-m-3)+(m+3)(2m-1)=0$. Pour que $\vec{n}$ soit nul, il faudrait $2m-1=0$, soit $m=\frac{1}{2}$, mais alors $m+3=\frac{7}{2}\neq 0$.
Donc $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ pour tout m : d_m est une droite.

(b) Pour $m=0$: $d_0 : -x+3y-7=0$. Avec $x=2$: $-2+3y-7=0$, donc $y=3$ et $G(2\,;3)$. Avec $x=-4$: $4+3y-7=0$, donc $y=1$ et $L(-4\,;1)$. Ainsi $\overrightarrow{GL}\,(-6\,;-2)$. Pour $m=0$, $\vec{u}\,(-3\,;-1)$ et $\det(\overrightarrow{GL},\vec{u})=(-6)\times(-1)-(-2)\times(-3)=0$: les deux vecteurs sont colinéaires ($\overrightarrow{GL}=2\vec{u}$). Contrôle : avec $\vec{n}\,(-1\,;3)$, $\overrightarrow{GL}\cdot\vec{n}=(-6)\times(-1)+(-2)\times 3=0$. Conclusion : $\vec{u}$ dirige bien d_0, et $(-1\,;3)$, lu sur l'équation, lui est normal.

Ex. 12 **(suite)**

(c) Une droite verticale a pour vecteur normal $(1\,;0)$: il faut donc $b=0$, soit $m+3=0$, c'est-à-dire $m=-3$. Alors $a=2\times(-3)-1=-7$ et $d_{-3} : -7x-7=0$, soit $x=-1$. Contrôle : le vecteur normal $(-7\,;0)=-7\,(1\,;0)$. Conclusion : pour $m=-3$, d_m est la droite verticale $x=-1$.

(d) $\vec{w}$ dirige d_m si et seulement si $\vec{w}$ et $\vec{u}\,(-m-3\,;2m-1)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si leur déterminant est nul : $(-m-3)\times 2-(2m-1)\times 1=-4m-5=0$, donc $m=-\frac{5}{4}$. Piège : écrire $\det(\vec{w},\vec{n})=1\times(m+3)-2\times(2m-1)=-3m+5=0$ donnerait $m=\frac{5}{3}$, la valeur pour laquelle $\vec{w}$ est NORMAL à d_m. Pour $m=-\frac{5}{4}$: $a=-\frac{7}{2}$ et $b=\frac{7}{4}$, soit $-\frac{7}{2}x+\frac{7}{4}y-7=0$. En multipliant par $\frac{4}{7}$: $-2x+y-4=0$, soit $y=2x+4$. Contrôle : $\vec{w}\cdot\vec{n}=1\times(-2)+2\times 1=0$. Conclusion : $m=-\frac{5}{4}$ et la droite a pour équation $y=2x+4$.

(e) On regroupe les termes en m : $m(2x+y)+(-x+3y-7)=0$. Si $F(x\,;y)$ est sur toutes les droites d_m, alors $m=0$ donne $-x+3y-7=0$, puis $m=1$ donne $2x+y=0$. On résout par substitution : $y=-2x$, donc $-x-6x-7=0$, d'où $x=-1$ et $y=2$.
Réciproquement, pour tout m : $(2m-1)(-1)+(m+3)\times 2-7=-2m+1+2m+6-7=0$. Contrôle : F est bien sur $x=-1$ et sur $y=2x+4$, car $2\times(-1)+4=2$. Conclusion : toutes les droites d_m passent par $F(-1\,;2)$.

Ex. 13 ★★★ **Des copies à corriger sur la droite** (AB)

(a) Avec B : $3\times\frac{5}{2}-4\times(-1)+\frac{27}{2}=\frac{15}{2}+4+\frac{27}{2}=25\neq 0$.
Donc B n'est pas sur la droite de Hugo. Son erreur : $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur DIRECTEUR de (AB), et il l'a pris comme vecteur normal. Il a obtenu la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à (AB). Son contrôle avec A, le point qui lui avait servi à calculer c, ne pouvait pas révéler l'erreur. Il fallait contrôler avec B.

(b) $\overrightarrow{AB}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\,;-1-3\right)=(3\,;-4)$ dirige (AB). On échange les coordonnées et on change un signe : $\vec{n}\,(4\,;3)$, car $3\times 4+(-4)\times 3=0$. D'où $(AB) : 4x+3y+c=0$. Avec A : $4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\times 3+c=0$, soit $-2+9+c=0$, donc $c=-7$. Contrôle avec B : $4\times\frac{5}{2}+3\times(-1)-7=10-3-7=0$.
Conclusion : $(AB) : 4x+3y-7=0$.

Ex. 13 **(suite)**

(c) Inès : $-8x-6y+14=-2(4x+3y-7)$. Son équation est la nôtre multipliée par $-2\neq 0$, elle décrit donc (AB). Yanis : en multipliant par 3, on obtient $3y=-4x+7$, soit $4x+3y-7=0$: c'est aussi (AB). Léo : avec A, on obtient $4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\times 3+7=14\neq 0$, donc A n'est pas sur sa droite. Il a le bon vecteur normal mais pas le bon signe pour c ($c=-(4x_A+3y_A)=-7$). Sa droite est strictement parallèle à (AB). Conclusion : Inès et Yanis ont raison, Léo a tort.

(d) Le bon développement est $3(x-2)-4(y-5)=3x-6-4y+20=3x-4y+14$. Sacha a écrit $-6-20$ au lieu de $-6+20$: il a oublié que $-4\times(-5)=+20$. Donc $\Delta : 3x-4y+14=0$. Contrôle avec C : $3\times 2-4\times 5+14=0$. Avec l'équation de Sacha, on aurait obtenu $6-20-26=-40\neq 0$. C'est le contrôle qui révèle l'erreur.

Ex. 14 ★★★ **L'antenne entre deux villages**

(a) Les distances sont positives, donc $MU=MV \iff MU^2=MV^2$. On a $MU^2=(x+2)^2+(y+3)^2=x^2+4x+4+y^2+6y+9$ et $MV^2=(x-4)^2+(y-1)^2=x^2-8x+16+y^2-2y+1$. Les termes x^2 et y^2 s'éliminent : $MU^2=MV^2 \iff 4x+6y+13=-8x-2y+17 \iff 12x+8y-4=0$. On divise par 4 : $MU=MV \iff 3x+2y-1=0$.

(b) La médiatrice passe par le MILIEU $I\left(\frac{-2+4}{2};\frac{-3+1}{2}\right)=(1;-1)$. Elle est perpendiculaire à (UV) : $\overrightarrow{UV}(6;4)$ est orthogonal à ses vecteurs directeurs, c'est donc un vecteur NORMAL. D'où $6x+4y+c=0$. Avec I : $6-4+c=0$, donc $c=-2$. On obtient $6x+4y-2=0$, soit $3x+2y-1=0$ après division par 2. Contrôle : un vecteur directeur est $(-4;6)$ et $\overrightarrow{UV}\cdot(-4;6)=-24+24=0$. On retrouve bien l'équation de la question 1.

(c) $r : x=-3$ s'écrit $x+0y+3=0$, donc $\vec{n}_r(1;0)$: la droite est verticale. La médiatrice a pour vecteur normal $(3;2)$. On calcule $\det=3\times 0-2\times 1=-2\neq 0$: les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires, donc les droites sont sécantes. On remplace $x=-3$ dans $3x+2y-1=0$: $-9+2y-1=0$, donc $y=5$, et $W(-3;5)$. Contrôle : $WU^2=(-1)^2+8^2=65$ et $WV^2=(-7)^2+4^2=65$. Conclusion : l'antenne est en $W(-3;5)$ et $WU=WV=\sqrt{65}$ km.

Ex. 14 **(suite)**

(d) Cette droite a pour équation $6(x+2)+4(y+3)=0$, soit $6x+4y+24=0$, c'est-à-dire $3x+2y+12=0$. Elle a le même vecteur normal $(3;2)$ que la médiatrice, mais pas le même c ($12\neq -1$) : les deux droites sont strictement parallèles. Contrôle : le milieu $I(1;-1)$ donne $3-2+12=13\neq 0$, et U n'est pas sur la médiatrice : $3\times(-2)+2\times(-3)-1=-13\neq 0$. Ben a tort : la médiatrice passe par le MILIEU de $[UV]$, pas par une extrémité.

(e) P est à égale distance de U et V si et seulement s'il est sur la médiatrice : $3k+2\times 2k-1=0$, soit $7k=1$, donc $k=\frac{1}{7}$ et $P\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right)$. Contrôle : $PU^2=\left(\frac{15}{7}\right)^2+\left(\frac{23}{7}\right)^2=\frac{754}{49}$ et $PV^2=\left(-\frac{27}{7}\right)^2+\left(-\frac{5}{7}\right)^2=\frac{754}{49}$. Conclusion : $k=\frac{1}{7}$.

3. *Droites parallèles, perpendiculaires, point d'intersection*

Ex. 15 ★☆☆ **Comparer des vecteurs normaux**

(a) $\vec{n}(5;2)$ est normal à d et $\vec{n'}(2;-5)$ est normal à d'. Produit scalaire : $5\times 2+2\times(-5)=0$. Les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc d et d' sont perpendiculaires (contrôle : déterminant $5\times(-5)-2\times 2=-29\neq 0$, elles sont bien sécantes).

(b) $\vec{n}(6;-10)$ et $\vec{n'}(-9;15)$. Déterminant : $6\times 15-(-9)\times(-10)=90-90=0$. Les vecteurs normaux sont colinéaires, donc les droites sont parallèles (attention : le produit scalaire vaut -204, mais ce n'est pas le critère de parallélisme). On a $\vec{n'}=-\frac{3}{2}\vec{n}$, mais $-\frac{3}{2}\times 1=-\frac{3}{2}\neq 4$: les équations ne sont pas proportionnelles. Les droites sont strictement parallèles.

(c) $d : x-3=0$ admet $\vec{n}(1;0)$ comme vecteur normal et $d' : y+2=0$ admet $\vec{n'}(0;1)$. Produit scalaire : $1\times 0+0\times 1=0$. Les normaux sont orthogonaux : la droite verticale d et la droite horizontale d' sont perpendiculaires.

(d) $\vec{n}(3;1)$ et $\vec{n'}(1;3)$. Déterminant : $3\times 3-1\times 1=8\neq 0$, donc les droites sont sécantes. Produit scalaire : $3\times 1+1\times 3=6\neq 0$, donc elles ne sont pas perpendiculaires. Échanger a et b ne suffit pas : il faut aussi changer un signe. Les droites sont seulement sécantes.

Ex. 15 **(suite)**

(e) $\vec{n}\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{4}\right)$ et $\vec{n'}\,(8\,;3)$. Déterminant : $\frac{2}{3}\times 3-8\times\frac{1}{4}=2-2=0$, donc les droites sont parallèles. En multipliant l'équation de d par 12, on obtient $8x+3y-12=0$, c'est-à-dire l'équation de d'. Les équations sont proportionnelles : les droites sont confondues.

(f) $\vec{n}\,(-2\,;8)$ et $\vec{n'}\,(4\,;1)$. Produit scalaire : $-2\times 4+8\times 1=0$. Les normaux sont orthogonaux, donc d et d' sont perpendiculaires.

Ex. 16 ★☆☆ **Parallèle et perpendiculaire passant par un point**

(a) Une parallèle à d garde le vecteur normal $\vec{n}\,(3\,;5)$: elle a une équation $3x+5y+c=0$. Avec P : $3\times(-3)+5\times 2+c=0$, donc $c=-1$. La parallèle a pour équation $3x+5y-1=0$. Contrôle : $-9+10-1=0$.

(b) Le vecteur $(3\,;5)$, normal à d, est un vecteur directeur de la perpendiculaire : elle admet donc $(5\,;-3)$ comme vecteur normal (garder $(3\,;5)$ donnerait une parallèle). $5(x+3)-3(y-2)=0$, soit $5x-3y+21=0$. Contrôle : $5\times(-3)-3\times 2+21=0$ et $(3\,;5)\cdot(5\,;-3)=15-15=0$.

(c) $x=4$ s'écrit $x-4=0$, de vecteur normal $(1\,;0)$. La perpendiculaire admet $(0\,;-1)$ comme vecteur normal : $0\times(x-1)-1\times(y+3)=0$, soit $y=-3$ (droite horizontale). Contrôle : Q a pour ordonnée -3, et $1\times 0+0\times(-1)=0$.

(d) Deux droites parallèles non verticales ont le même coefficient directeur : $y=-2x+p$. Avec R : $2=-2\times 3+p$, donc $p=8$. La parallèle a pour équation $y=-2x+8$. Contrôle : $-6+8=2$.

(e) Deux droites non verticales sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1 : $m'=-1\div\frac{2}{3}=-\frac{3}{2}$.
Donc $y=-\frac{3}{2}x+p$, et avec S : $0=-6+p$, d'où $p=6$.
La perpendiculaire a pour équation $y=-\frac{3}{2}x+6$.
Contrôle : $\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$ et $-\frac{3}{2}\times 4+6=0$.

Ex. 17 ★★☆ **Trajectoires de drones : résoudre des systèmes**

(a) $\vec{n_1}\,(2\,;-3)$ et $\vec{n_2}\,(5\,;2)$: $2\times 2-5\times(-3)=19\neq 0$, donc les droites sont sécantes. Combinaison : $2\times d_1$ donne $4x-6y+14=0$ et $3\times d_2$ donne $15x+6y-33=0$. En additionnant : $19x-19=0$, donc $x=1$. Dans d_1 : $2-3y+7=0$, donc $y=3$. Contrôle : $2-9+7=0$ et $5+6-11=0$. Les trajectoires se croisent au point $(1\,;3)$.

(b) $2\times d_1$ donne $4x-6y+14=0$. On soustrait d_3 : $(4x-6y+14)-(4x-6y+3)=11$, donc on obtient $11=0$, ce qui est impossible. Le système n'a aucune solution : d_1 et d_3 n'ont aucun point commun, elles sont strictement parallèles (contrôle : $2\times(-6)-4\times(-3)=0$).

(c) $-3\times(2x-3y+7)=-6x+9y-21$: l'équation de d_4 est celle de d_1 multipliée par -3. Les deux équations sont équivalentes, donc le système a une infinité de solutions : d_1 et d_4 sont confondues. Par exemple $(1\,;3)$ et $(4\,;5)$: $2\times 4-3\times 5+7=0$ et $-6\times 4+9\times 5-21=0$.

(d) K est bien sur d_5 : $3\times 5-2\times 1-13=0$. Mais dans d_2 : $5\times 5+2\times 1-11=16\neq 0$. K n'est pas sur d_2 : Tom a tort, il faut vérifier les deux équations. Le déterminant des normaux $(5\,;2)$ et $(3\,;-2)$ vaut $5\times(-2)-3\times 2=-16\neq 0$, donc d_2 et d_5 sont sécantes. En additionnant d_2 et d_5 : $8x-24=0$, donc $x=3$, puis $15+2y-11=0$, donc $y=-2$. Contrôle : $15-4-11=0$ et $9+4-13=0$. Les droites se coupent en $(3\,;-2)$.

Ex. 18 ★★☆ **Allées d'un jardin : trouver le paramètre**

(a) $\vec{n_m}\,(m\,;2)$ et $\vec{n'}\,(3\,;-1)$. Les droites sont parallèles si et seulement si les normaux sont colinéaires : $m\times(-1)-3\times 2=0$, donc $-m-6=0$, d'où $m=-6$. Alors d_{-6} : $-6x+2y-4=0$. On multiplie d' par -2 : $-6x+2y-2=0$. Les termes constants -4 et -2 diffèrent : les équations ne sont pas proportionnelles, les droites sont strictement parallèles.

(b) Non : Inès utilise le déterminant, qui est le critère de parallélisme. Les droites sont perpendiculaires si et seulement si les normaux sont orthogonaux : $m\times 3+2\times(-1)=0$, donc $3m-2=0$, d'où $m=\frac{2}{3}$. Contrôle : $\frac{2}{3}\times 3+2\times(-1)=0$.

Ex. 18 **(suite)**

(c) $d_{2/3} : \frac{2}{3}x + 2y - 4 = 0$ donne $2y = -\frac{2}{3}x + 4$, soit $y = -\frac{1}{3}x + 2$. $d' : y = 3x + 1$. Produit des coefficients directeurs : $-\frac{1}{3} \times 3 = -1$. Les droites sont bien perpendiculaires.

(d) Par substitution de $y = 3x + 1$ dans $\frac{2}{3}x + 2y - 4 = 0$: $\frac{2}{3}x + 6x + 2 - 4 = 0$, soit $\frac{20}{3}x = 2$, donc $x = \frac{3}{10}$, puis $y = \frac{9}{10} + 1 = \frac{19}{10}$. Contrôle : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{19}{10} - 4 = \frac{1}{5} + \frac{19}{5} - 4 = 0$ et $3 \times \frac{3}{10} - \frac{19}{10} + 1 = 0$. La fontaine est au point $(0{,}3\,;1{,}9)$.

Ex. 19 ★★★ **Orthocentre d'un triangle et erreur de Noa**

(a) Avec A : $5 \times (-2) + 3 \times 1 + 7 = -10 + 3 + 7 = 0$, donc la droite de Noa passe bien par A. Elle a pour vecteur normal $(5\,;3)$, comme (BC) : le déterminant vaut $5 \times 3 - 5 \times 3 = 0$, donc les vecteurs normaux sont colinéaires et les deux droites sont parallèles. Les termes constants 7 et -17 sont différents : les droites sont strictement parallèles. C'est donc la parallèle à (BC) passant par A, pas une hauteur. L'erreur : le vecteur normal $(5\,;3)$ de (BC) est un vecteur **directeur** de la hauteur. La hauteur a donc pour vecteur normal $(3\,;-5)$.

(b) La hauteur h_A est perpendiculaire à (BC), donc $(5\,;3)$ en est un vecteur directeur et $\vec{n}\,(3\,;-5)$ un vecteur normal. Contrôle : $5 \times 3 + 3 \times (-5) = 0$. Pour $M(x\,;y)$: $3(x+2) - 5(y-1) = 0$, soit $h_A : 3x - 5y + 11 = 0$. Contrôle avec A : $-6 - 5 + 11 = 0$. Équations réduites : $(BC) : y = -\frac{5}{3}x + \frac{17}{3}$ et $h_A : y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$. Produit des coefficients directeurs : $-\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = -1$. Les deux droites sont bien perpendiculaires.

(c) La hauteur h_B passe par B et admet $\overrightarrow{AC}\,(3\,;3)$ comme vecteur normal. On obtient $3(x-4) + 3(y+1) = 0$, soit $3x + 3y - 9 = 0$, c'est-à-dire $h_B : x + y - 3 = 0$. Contrôle avec B : $4 - 1 - 3 = 0$.

(d) Les vecteurs normaux sont $(3\,;-5)$ et $(1\,;1)$. Le déterminant vaut $3 \times 1 - 1 \times (-5) = 8 \neq 0$, donc les droites sont sécantes. De h_B, on tire $x = 3 - y$. Dans h_A : $3(3-y) - 5y + 11 = 0$, soit $20 - 8y = 0$. Donc $y = \frac{5}{2}$, puis $x = \frac{1}{2}$. Contrôle dans h_A : $\frac{3}{2} - \frac{25}{2} + 11 = -11 + 11 = 0$. Contrôle dans h_B : $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$. Conclusion : $H\left(\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$.

Ex. 19 **(suite)**

(e) On a $\overrightarrow{CH}\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AB}\,(6\,;-2)$. Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \times 6 + \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-2) = -3 + 3 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux, donc (CH) est perpendiculaire à (AB) : c'est la hauteur issue de C. Les trois hauteurs passent par H, qui est donc l'orthocentre du triangle ABC.

Ex. 20 ★★★ **Faisceaux radar : discuter selon m**

(a) Les vecteurs normaux sont $\vec{n}\,(m\,;2)$ et $\vec{n'}\,(2\,;m)$. Les droites sont parallèles si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire si $m \times m - 2 \times 2 = m^2 - 4 = 0$, soit $m = 2$ ou $m = -2$. Pour $m = 2$: $d_2 : 2x + 2y - 4 = 0$ et $d'_2 : 2x + 2y - 4 = 0$. Les équations sont identiques, donc les droites sont confondues et le système a une infinité de solutions. Pour $m = -2$: $d_{-2} : -2x + 2y = 0$ et $d'_{-2} : 2x - 2y - 4 = 0$. En multipliant la première par -1, on obtient $2x - 2y + 0 = 0$, mais le terme constant 0 n'est pas -4. Les droites sont strictement parallèles et le système n'a aucune solution. Contrôle : $O(0\,;0)$ est sur d_{-2} mais pas sur d'_{-2}, car $0 - 0 - 4 \neq 0$.

(b) Les droites sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ (ne pas confondre avec le déterminant). On calcule $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 2m + 2m = 4m$, donc $4m = 0$, soit $m = 0$. On obtient alors $d_0 : 2y - 2 = 0$, c'est-à-dire $y = 1$ (droite horizontale), et $d'_0 : 2x - 4 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$ (droite verticale). Contrôle : $(0\,;2) \cdot (2\,;0) = 0$. La méthode de Sami ne s'applique pas : d'_0 est verticale, elle n'a pas d'équation réduite, donc pas de coefficient directeur. Les droites sont pourtant bien perpendiculaires.

(c) Pour $m \neq \pm 2$, le déterminant $m^2 - 4$ n'est pas nul : les droites sont sécantes en un unique point. Le système s'écrit $mx + 2y = m + 2$ et $2x + my = 4$. Pour éliminer y, on multiplie la 1re équation par m et la 2de par 2, puis on soustrait : $(m^2 - 4)x = m^2 + 2m - 8 = (m-2)(m+4)$, donc $x = \frac{m+4}{m+2}$. Pour éliminer x, on multiplie la 1re par 2 et la 2de par m, puis on soustrait : $(m^2 - 4)y = 4m - 2m - 4 = 2(m-2)$, donc $y = \frac{2}{m+2}$. Contrôle dans d_m : $\frac{m(m+4)+4}{m+2} = \frac{(m+2)^2}{m+2} = m + 2$. Contrôle dans d'_m : $\frac{2(m+4)+2m}{m+2} = \frac{4(m+2)}{m+2} = 4$. Exemple pour $m = 1$: $K_1\left(\frac{5}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$, et on a bien $\frac{5}{3} + \frac{4}{3} - 3 = 0$ et $\frac{10}{3} + \frac{2}{3} - 4 = 0$.

Ex. 20 **(suite)**

(d) On calcule $x_{K_m} - y_{K_m} - 1 = \frac{m+4-2}{m+2} - 1 = \frac{m+2}{m+2} - 1 = 0$.

Donc $K_m \in \Delta$ pour toute valeur $m \neq \pm 2$. Pour le point $E(1\,;0)$, il faudrait $\frac{2}{m+2} = 0$, ce qui est impossible car le numérateur vaut 2. Ce n'est donc jamais un point K_m. Contrôle par l'abscisse : $\frac{m+4}{m+2} = 1$ donnerait $m+4 = m+2$, ce qui est impossible.

Ex. 21 ★★★ **Carte au trésor : murs, puits et rivière**

(a) Les vecteurs normaux sont $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{3}\right)$, $(-9\,;6)$ et $(6\,;-4)$. Pour d_1 et d_2 : $\frac{1}{2}\times 6 - (-9)\times\left(-\frac{1}{3}\right) = 3-3 = 0$. Pour d_1 et d_3 : $\frac{1}{2}\times(-4) - 6\times\left(-\frac{1}{3}\right) = -2+2 = 0$. Les vecteurs normaux sont colinéaires, donc les trois droites sont parallèles. En multipliant l'équation de d_1 par -18, on obtient $-9x+6y-18=0$: c'est l'équation de d_2, donc d_1 et d_2 sont confondues. En la multipliant par 12, on obtient $6x-4y+12=0$, mais d_3 a pour terme constant $5 \neq 12$: d_3 est strictement parallèle à d_1 (et donc à d_2).

(b) On multiplie l'équation de d_1 par 6 : $d_1 : 3x-2y+6=0$, de vecteur normal $(3\,;-2)$. Ce vecteur est directeur de p, donc $\vec{n}\,(2\,;3)$ est normal à p. Contrôle : $3\times 2 + (-2)\times 3 = 0$. On obtient $2(x-6)+3(y+1)=0$, soit $p : 2x+3y-9=0$. Contrôle avec P : $12-3-9=0$.

(c) Le point $(3\,;1)$ est bien sur p, car $6+3-9=0$. En revanche, il n'est pas sur d_1 : $\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+1 = \frac{13}{6} \neq 0$. Lucas a tort : il faut vérifier le point dans les deux équations. Calcul de T : on multiplie $3x-2y+6=0$ par 3 et $2x+3y-9=0$ par 2, puis on additionne : $9x-6y+18+4x+6y-18=0$, soit $13x=0$. Donc $x=0$, puis $3y=9$, donc $y=3$. Contrôle dans d_1 : $0-1+1=0$. Contrôle dans p : $0+9-9=0$. Conclusion : $T(0\,;3)$.

(d) L'équation réduite de d_1 est $y=\frac{3}{2}x+3$. Aucune des deux droites n'est verticale, donc $r \perp d_1$ si et seulement si $k\times\frac{3}{2} = -1$, soit $k=-\frac{2}{3}$. L'équation réduite de p est $y=-\frac{2}{3}x+3$: r et p ont le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles. Leurs ordonnées à l'origine $\frac{1}{2}$ et 3 sont différentes : r est strictement parallèle à p, pas confondue avec elle.

Ex. 21 **(suite)**

(e) La rivière r est perpendiculaire à d_1, et d_3 est parallèle à d_1.

Donc r est perpendiculaire à d_3 : elles ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes. On substitue $y = -\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$ dans d_3 : $6x-4\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)+5=0$, soit $\frac{26}{3}x+3=0$.

Donc $x=-\frac{9}{26}$, puis $y=\frac{6}{26}+\frac{13}{26}=\frac{19}{26}$. Contrôle dans d_3 : $\frac{-54-76}{26}+5 = -5+5=0$. Contrôle dans r : $-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{9}{26}\right)+\frac{1}{2}=\frac{19}{26}$. Le point d'intersection est $\left(-\frac{9}{26}\,;\frac{19}{26}\right)$.

4. *Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite*

Ex. 22 ★☆☆ **Projeté ou pas ?**

(a) H est le projeté si $H \in d$ et si $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à un vecteur directeur de d. On a $2\times 1+3-5=0$, donc $H \in d$. Le vecteur $\vec{u}\,(-1\,;2)$ dirige d et $\overrightarrow{MH}\,(-4\,;0)$. Alors $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = (-4)\times(-1)+0\times 2 = 4 \neq 0$. Faux : H est sur d, mais (MH) n'est pas perpendiculaire à d. Un point choisi « à vue » ne suffit pas.

(b) On a $2-2\times 3+4=0$, donc $H \in d$. Le vecteur $\vec{u}\,(2\,;1)$ dirige d et $\overrightarrow{MH}\,(-2\,;4)$. Alors $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = -4+4=0$. Vrai : H est le projeté orthogonal de M sur d.

(c) $\overrightarrow{MH}\,(0\,;4)$ est bien orthogonal à $\vec{u}\,(1\,;0)$, qui dirige d. Mais H a pour ordonnée $5 \neq 4$, donc $H \notin d$. Faux : le projeté est $(-3\,;4)$.

(d) On a $3\times 1-1-2=0$, donc $M \in d$. Le projeté de M est alors M lui-même. Vrai : $H=M$, et la distance de M à d vaut 0.

(e) $d : x+y-6=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;1)$. On a $\frac{5}{2}+\frac{7}{2}-6=0$, donc $H \in d$. $\overrightarrow{MH}\left(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u} = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$. Vrai : H est le projeté orthogonal de M sur d.

Ex. 23 ★☆☆ **Méthode ② : trouver t**

(a) $\vec{n}\,(1\,;1)$ et $H(4+t\,;1+t)$. $H \in d \iff (4+t)+(1+t)-1=0 \iff 2t+4=0 \iff t=-2$.

Donc $H(2\,;-1)$. Contrôle : $2-1-1=0$.

$MH = |-2|\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Contrôle : $\overrightarrow{MH}\,(-2\,;-2)$ et $\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

(b) $\vec{n}\,(3\,;-1)$ et $H(3+3t\,;-t)$. $H \in d \iff 3(3+3t)-(-t)+1=0 \iff 10t+10=0 \iff t=-1$.

Donc $H(0\,;1)$. Contrôle : $0-1+1=0$.

$MH = 1\times\sqrt{10} = \sqrt{10}$.

Ex. 23 **(suite)**

(c) $\vec{n}\,(2\,;-3)$ et $H(1+2t\,;-1-3t)$. $H \in d \iff 2(1+2t)-3(-1-3t)+6=0 \iff 13t+11=0 \iff t=-\frac{11}{13}$.
Donc $H\left(-\frac{9}{13}\,;\frac{20}{13}\right)$. Contrôle : $\frac{-18-60+78}{13}=0$. $MH=\frac{11}{13}\times\sqrt{13}=\frac{11\sqrt{13}}{13}$.

(d) $d : x+1=0$, donc $\vec{n}\,(1\,;0)$ et $H(3+t\,;2)$. $H \in d \iff 3+t+1=0 \iff t=-4$.
Donc $H(-1\,;2)$. $MH=|-4|\times 1=4$.

Ex. 24 ★★☆ **Le tuyau du jardin de Noé**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(6\,;-3)$. Le vecteur $\vec{n}\,(1\,;2)$ vérifie $6\times 1+(-3)\times 2=0$: il est normal à (AB). $M(x\,;y)\in(AB) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff 1(x+3)+2(y-2)=0$, soit $(AB) : x+2y-1=0$. Contrôle avec B : $3-2-1=0$.

(b) Le vecteur $\vec{n}\,(1\,;2)$, normal à (AB), dirige d'. Le vecteur $(2\,;-1)$ est donc normal à $d' : 2(x-3)-1(y-4)=0$, soit $d' : 2x-y-2=0$. Contrôle avec C : $6-4-2=0$.

(c) La deuxième équation donne $y=2x-2$. On remplace : $x+2(2x-2)=1$, soit $5x=5$, donc $x=1$ et $y=0$. Ainsi $H(1\,;0)$. Contrôle : $1+0-1=0$, et $\overrightarrow{CH}\,(-2\,;-4)$ vérifie $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=-12+12=0$.

(d) $CH=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ m. $AB=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$ m. $[CH]$ est la hauteur issue de C, donc l'aire vaut $\frac{AB\times CH}{2}=\frac{3\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{2}=15$ m².

Ex. 25 ★★☆ **Le drone et l'antenne : l'erreur de Lina**

(a) $H(6+2t\,;-t)$. $H\in d \iff 2(6+2t)-(-t)+3=0 \iff 5t+15=0 \iff t=-3$.
Donc $H(0\,;3)$. Contrôle : $0-3+3=0$, et $\overrightarrow{MH}\,(-6\,;3)$ est orthogonal à $\vec{u}\,(1\,;2)$, qui dirige d : $-6+6=0$.

(b) Non : une distance n'est jamais négative. On a $\overrightarrow{MH}=t\,\vec{n}$, donc $MH=|t|\times\|\vec{n}\|=3\sqrt{5}$ km. Contrôle : $MH=\sqrt{(-6)^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.
(Approfondissement : $\frac{|2\times 6-0+3|}{\sqrt{5}}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$.)

(c) $2\times(-1)-1+3=0$, donc $P\in d$. $MP^2=(-7)^2+1^2=50$, $MH^2=45$ et $HP^2=(-1)^2+(-2)^2=5$. On retrouve $MP^2=MH^2+HP^2$: le triangle MHP est rectangle en H (Pythagore), et $MP=5\sqrt{2}>3\sqrt{5}=MH$.

Ex. 25 **(suite)**

(d) Soit $P\in d$ avec $P\neq H$. (MH) est perpendiculaire à d, donc le triangle MHP est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $MP^2=MH^2+HP^2$. Or $HP^2>0$, donc $MP^2>MH^2$, puis $MP>MH$ (longueurs positives). H est donc le point de d le plus proche de l'antenne.

Ex. 26 ★★★ **Sacha et la bouée : le point le plus proche**

(a) $3\times 2+2\times 0-6=0$, donc $P\in d$. Le vecteur $\vec{n}\,(3\,;2)$ est normal à d, donc $\vec{u}\,(-2\,;3)$ dirige d. On a $\overrightarrow{MP}\,(-3\,;-4)$ et $\overrightarrow{MP}\cdot\vec{u}=(-3)\times(-2)+(-4)\times 3=6-12=-6\neq 0$. Les vecteurs ne sont pas orthogonaux : P n'est pas le projeté de M. Hugo a tort : un point de d choisi « à vue » ne suffit pas.

(b) Le vecteur $\vec{n}\,(3\,;2)$, normal à d, dirige d'. Le vecteur $(2\,;-3)$ est orthogonal à $\vec{n}$ $(6-6=0)$, donc il est normal à d'. $N(x\,;y)\in d' \iff 2(x-5)-3(y-4)=0$, soit $d' : 2x-3y+2=0$. Contrôle : $2\times 5-3\times 4+2=0$, donc $M\in d'$.

(c) Système : $3x+2y=6$ et $2x-3y=-2$. On multiplie par 3 et par 2 : $9x+6y=18$ et $4x-6y=-4$. En additionnant, $13x=14$, donc $x=\frac{14}{13}$, puis $y=\frac{6-\frac{42}{13}}{2}=\frac{18}{13}$.
Donc $H\left(\frac{14}{13}\,;\frac{18}{13}\right)$. Contrôle : $\frac{42}{13}+\frac{36}{13}-\frac{78}{13}=0$, donc $H\in d$. $\overrightarrow{MH}\left(-\frac{51}{13}\,;-\frac{34}{13}\right)$ et $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}=\frac{102}{13}-\frac{102}{13}=0$: $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à d.

(d) La distance de M à d est $MH=\sqrt{\left(\frac{51}{13}\right)^2+\left(\frac{34}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{3757}{169}}=\sqrt{\frac{289}{13}}=\frac{17}{\sqrt{13}}=\frac{17\sqrt{13}}{13}$ km, environ 4,71 km.
Or $MP=\sqrt{9+16}=5$ km.
Donc $MH<MP$. Contrôle (approfondissement) : $\frac{|3\times 5+2\times 4-6|}{\sqrt{13}}=\frac{17}{\sqrt{13}}$.

(e) Soit $N\in d$. Comme (MH) est perpendiculaire à d, le théorème de Pythagore donne $MN^2=MH^2+HN^2$. Donc $MN=5 \iff HN^2=25-\frac{289}{13}=\frac{36}{13}$. Or $\overrightarrow{HP}\left(\frac{12}{13}\,;-\frac{18}{13}\right)$, donc $HP^2=\frac{468}{169}=\frac{36}{13}$. Sur d, les points à la distance HP de H sont P et son symétrique par rapport à H : H est le milieu de $[PN]$. Ainsi $x_N=2\times\frac{14}{13}-2=\frac{2}{13}$ et $y_N=2\times\frac{18}{13}-0=\frac{36}{13}$, d'où $N\left(\frac{2}{13}\,;\frac{36}{13}\right)$. Contrôle : $\frac{6}{13}+\frac{72}{13}-\frac{78}{13}=0$, donc $N\in d$; $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{63}{13}\,;-\frac{16}{13}\right)$ et $MN^2=\frac{3969+256}{169}=\frac{4225}{169}=25$, donc $MN=5$.

Ex. 27 ★★★ **La parcelle de Maëlle**

(a) $\overrightarrow{AB}(6\,;-4)$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=6\times2+(-4)\times3=0$: $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de (AB), donc il est normal à (AB). $M(x\,;y)\in(AB)\iff\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\iff2(x+2)+3(y-1)=0$, soit $(AB):2x+3y+1=0$. Contrôle : $2\times4+3\times(-3)+1=0$, donc $B\in(AB)$.

(b) $H(3+2t\,;5+3t)$ et $H\in(AB):2(3+2t)+3(5+3t)+1=0$, soit $13t+22=0$, donc $t=-\frac{22}{13}$. Alors $H\left(3-\frac{44}{13}\,;5-\frac{66}{13}\right)$, soit $H\left(-\frac{5}{13}\,;-\frac{1}{13}\right)$. Contrôle : $-\frac{10}{13}-\frac{3}{13}+1=0$, donc $H\in(AB)$; $\overrightarrow{CH}\left(-\frac{44}{13}\,;-\frac{66}{13}\right)$ et $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{264}{13}+\frac{264}{13}=0$.

(c) $\overrightarrow{CH}=t\,\vec{n}$, donc $CH=|t|\times\|\vec{n}\|=\frac{22}{13}\times\sqrt{13}=\frac{22\sqrt{13}}{13}$ hm (avec $|t|$: t est négatif, mais une distance ne l'est jamais). $AB=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$. Aire $=\frac{AB\times CH}{2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times\frac{22}{\sqrt{13}}=22$. La parcelle mesure 22 hectares. Contrôle (approfondissement) : $\frac{|6+15+1|}{\sqrt{13}}=\frac{22}{\sqrt{13}}$.

(d) $2\times1+3\times(-1)+1=0$, donc $E\in(AB)$. Avec $H'=E+t\,\vec{n}$: $2(1+2t)+3(-1+3t)+1=0$, soit $13t=0$, donc $t=0$ et $H'=E$. La distance de E à (AB) est $|0|\times\sqrt{13}=0$. Maëlle a tort : $\|\vec{n}\|$ n'est pas une distance à la droite, il faut multiplier par $|t|$.

Ex. 28 ★★★ **Le radar côtier : l'oubli de Yanis**

(a) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\iff3y=-4x+2\iff4x+3y-2=0$. Sur $ax+by+c=0$, le vecteur $\vec{n}\,(a\,;b)$ est normal : $\vec{n}\,(4\,;3)$, et $\|\vec{n}\|=\sqrt{16+9}=5$.

(b) $H(m+4t\,;4+3t)$ et $H\in d:4(m+4t)+3(4+3t)-2=0$, soit $25t+4m+10=0$, donc $t=-\frac{4m+10}{25}$. Alors $H\left(\frac{9m-40}{25}\,;\frac{70-12m}{25}\right)$. Contrôle : $4(9m-40)+3(70-12m)=50$ et $\frac{50}{25}-2=0$, donc $H\in d$ pour tout m.

(c) $\overrightarrow{RH}=t\,\vec{n}$, donc $RH=|t|\times\|\vec{n}\|=\frac{|4m+10|}{25}\times5=\frac{|4m+10|}{5}$. Le réel t peut être négatif (selon le côté de d où se trouve R), alors qu'une distance n'est jamais négative : la valeur absolue est indispensable.

(d) $RH=2\iff|4m+10|=10\iff4m+10=10$ ou $4m+10=-10\iff m=0$ ou $m=-5$. Yanis a oublié le cas négatif de la valeur absolue. Pour $m=0$: $H\left(-\frac{8}{5}\,;\frac{14}{5}\right)$, $\overrightarrow{RH}\left(-\frac{8}{5}\,;-\frac{6}{5}\right)$, $RH=\frac{\sqrt{64+36}}{5}=2$. Pour $m=-5$: $H\left(-\frac{17}{5}\,;\frac{26}{5}\right)$, contrôle $-\frac{68}{5}+\frac{78}{5}-2=0$; $\overrightarrow{RH}\left(\frac{8}{5}\,;\frac{6}{5}\right)$, $RH=2$. Contrôle (approfondissement) : $\frac{|4\times(-5)+3\times4-2|}{5}=\frac{|-10|}{5}=2$; sans valeur absolue, on trouverait -2.

Ex. 28 **(suite)**

(e) $R\in d\iff4m+3\times4-2=0\iff m=-\frac{5}{2}$. Alors $t=-\frac{-10+10}{25}=0$, donc $H=R\left(-\frac{5}{2}\,;4\right)$ et la distance de R à d vaut 0. Contrôle : $\frac{|4\times(-\frac{5}{2})+12-2|}{5}=0$.

5. *Équation d'un cercle : centre et rayon*

Ex. 29 ★☆☆ **Lire et écrire une équation de cercle**

(a) On reconnaît $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ avec $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=-4$, car $y+4=y-(-4)$. Et $r^2=49$ avec $r>0$, donc $r=7$. $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}\,;-4\right)$ et de rayon 7.

(b) On a $x+3=x-(-3)$ et $y-5$: le centre est $(-3\,;5)$, les signes s'inversent. Le second membre est $r^2=11$, donc $r=\sqrt{11}$ (et non 11). Contrôle : en développant, $(x+3)^2+(y-5)^2-11=x^2+y^2+6x-10y+23$. $\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre $(-3\,;5)$ et de rayon $\sqrt{11}$.

(c) Avec $\alpha=-2$, $\beta=-7$ et $r^2=(\sqrt{6})^2=6$: $(x+2)^2+(y+7)^2=6$. Sous forme développée : $x^2+y^2+4x+14y+47=0$, car $4+49-6=47$.

(d) Le rayon vaut JA, donc $r^2=JA^2=(2-(-1))^2+(0-4)^2=9+16=25$. Une équation est $(x+1)^2+(y-4)^2=25$, et le rayon vaut 5. Contrôle : A vérifie l'équation, car $3^2+(-4)^2=25$.

(e) On remplace dans l'équation de $\mathcal{C}_1$: $\left(-3-\frac{1}{2}\right)^2+(0+4)^2=\frac{49}{4}+16=\frac{113}{4}$. Or $\frac{113}{4}\neq49=\frac{196}{4}$, donc B n'appartient pas à $\mathcal{C}_1$.

Ex. 30 ★☆☆ **Compléter les carrés : cercle, point ou vide ?**

(a) On a $x^2-6x=(x-3)^2-9$ (sans oublier le -9) et $y^2+2y=(y+1)^2-1$. L'équation devient $(x-3)^2-9+(y+1)^2-1-3=0$, soit $(x-3)^2+(y+1)^2=13$. Comme $13>0$, c'est le cercle de centre $(3\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{13}$. Contrôle : en développant, on retrouve l'équation de départ.

(b) On a $x^2+8x=(x+4)^2-16$ et $y^2-2y=(y-1)^2-1$. L'équation devient $(x+4)^2+(y-1)^2=16+1-17=0$. Une somme de deux carrés est nulle si et seulement si chaque carré est nul : $x=-4$ et $y=1$. L'ensemble se réduit au seul point $(-4\,;1)$. Ce n'est pas un cercle.

(c) On a $x^2-2x=(x-1)^2-1$ et $y^2+4y=(y+2)^2-4$. L'équation devient $(x-1)^2+(y+2)^2=1+4-10=-5$. Une somme de carrés n'est jamais négative : aucun point ne vérifie l'équation, l'ensemble est vide.

Ex. 30 **(suite)**

(d) On divise d'abord toute l'équation par 2 : $x^2+y^2+2x-6y+1=0$. On a $x^2+2x=(x+1)^2-1$ et $y^2-6y=(y-3)^2-9$, d'où $(x+1)^2+(y-3)^2=1+9-1=9$. Comme $9>0$, c'est le cercle de centre $(-1\,;3)$ et de rayon 3. Contrôle : $2\left[(x+1)^2+(y-3)^2-9\right]=2x^2+2y^2+4x-12y+2$.

Ex. 31 ★★☆ **Le bassin du jardin de Maëlle**

(a) Le centre du cercle de diamètre $[AB]$ est le milieu de $[AB]$: $I\left(\frac{-3+5}{2}\,;\frac{1-5}{2}\right)$, soit $I(1\,;-2)$. On a $AB=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10$. Le rayon vaut $\frac{AB}{2}=5$ m (et non $AB=10$).

(b) Avec le centre $I(1\,;-2)$ et $r^2=25$: $\mathcal{C}:(x-1)^2+(y+2)^2=25$. En développant : $x^2-2x+1+y^2+4y+4-25=0$, soit $x^2+y^2-2x+4y-20=0$. Contrôle par $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$: $(x+3)(x-5)+(y-1)(y+5)=x^2+y^2-2x+4y-20$. De plus, A vérifie l'équation : $9+1+6+4-20=0$.

(c) Un point M est dans le bassin si $IM^2<r^2=25$. Pour la statue : $IS^2=(4-1)^2+(1+2)^2=9+9=18<25$, donc la statue est dans le bassin. Pour le banc : $IN^2=(-4-1)^2+(0+2)^2=25+4=29>25$, donc le banc est hors du bassin.

(d) $L\in\mathcal{C}\iff(a-1)^2+(2+2)^2=25\iff(a-1)^2=9\iff a-1=3$ ou $a-1=-3$, c'est-à-dire $a=4$ ou $a=-2$. Contrôle : $(4-1)^2+4^2=25$ et $(-2-1)^2+4^2=25$. La lampe peut être en $(4\,;2)$ ou en $(-2\,;2)$.

Ex. 32 ★★☆ **Erreurs d'élèves et vrai ou faux**

(a) Non, Inès fait deux erreurs. Les signes du centre s'inversent : $x+2=x-(-2)$ et $y-7$, donc le centre est $(-2\,;7)$. Le second membre est r^2 : $r^2=20$ donne $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. C'est le cercle de centre $(-2\,;7)$ et de rayon $2\sqrt{5}$.

(b) Non. Tom a oublié les constantes en complétant les carrés : $x^2-10x=(x-5)^2-25$ et $y^2+6y=(y+3)^2-9$. L'équation devient $(x-5)^2-25+(y+3)^2-9+30=0$, soit $(x-5)^2+(y+3)^2=25+9-30=4$. Comme $4>0$, c'est le cercle de centre $(5\,;-3)$ et de rayon 2.

Ex. 32 **(suite)**

(c) Faux. Une équation de cercle développée s'écrit $x^2+y^2+ax+by+c=0$: x^2 et y^2 ont le même coefficient. Ici, ils valent 1 et 3. Contrôle par des points : $A(5\,;0)$, $B(-1\,;0)$, $D(0\,;1)$ et $D'\left(0\,;-\frac{5}{3}\right)$ vérifient l'équation. Si c'était un cercle, son centre serait sur les médiatrices $x=2$ de $[AB]$ et $y=-\frac{1}{3}$ de $[DD']$, donc en $K\left(2\,;-\frac{1}{3}\right)$. Or $KA^2=\frac{82}{9}$ et $KD^2=\frac{52}{9}$: ces deux carrés sont différents, contradiction. Ce n'est pas un cercle.

(d) Faux. Le terme en xy empêche d'écrire l'équation sous la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$. En fait, $x^2+y^2+2xy-9=(x+y)^2-9=(x+y-3)(x+y+3)$. L'équation équivaut donc à $x+y=3$ ou $x+y=-3$: c'est la réunion de deux droites parallèles. Par exemple, $(3\,;0)$, $(0\,;3)$ et $(1\,;2)$ sont alignés et vérifient l'équation, alors qu'une droite coupe un cercle en au plus deux points.

Ex. 33 ★★★ **L'émetteur et ses trois relais**

(a) Un point appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation. Pour A : $25+0+5a+0\times b+c=0$, soit $5a+c=-25$ (L_1). Pour B : $4+9+2a+3b+c=0$, soit $2a+3b+c=-13$ (L_2). Pour C : $1+9-a-3b+c=0$, soit $-a-3b+c=-10$ (L_3).

(b) L_1-L_2 donne $3a-3b=-12$, soit $a-b=-4$. L_1-L_3 donne $6a+3b=-15$, soit $2a+b=-5$. En additionnant ces deux équations : $3a=-9$, donc $a=-3$. Ensuite $b=a+4=1$ et $c=-25-5a=-25+15=-10$. Contrôle : dans L_2, $2\times(-3)+3\times1-10=-13$, et dans L_3, $3-3-10=-10$. Une équation de $\mathcal{C}$ est donc $x^2+y^2-3x+y-10=0$.

(c) $x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ et $y^2+y=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. Attention à ne pas oublier les termes $-\frac{9}{4}$ et $-\frac{1}{4}$. L'équation devient $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=10+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{25}{2}$. Comme $\frac{25}{2}>0$, c'est un cercle. Les signes s'inversent, donc le centre est $I\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$. Le second membre vaut r^2, donc $r=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ km. Contrôle : $IA^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{50}{4}=\frac{25}{2}$.

(d) Les distances sont positives, donc on peut comparer leurs carrés à $r^2=\frac{25}{2}$. $ID^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}<\frac{25}{2}$: D est à l'intérieur du disque, le hameau est couvert. $IE^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{74}{4}=\frac{37}{2}>\frac{25}{2}$: E est à l'extérieur, la ferme n'est pas couverte.

Ex. 34 ★★★ **Une famille d'équations à paramètre**

(a) Pour $m=0$: $2x^2+2y^2-4x-4=0$. Les coefficients de x^2 et de y^2 valent 2, donc je divise d'abord par 2 : $x^2+y^2-2x-2=0$. Ensuite $x^2-2x=(x-1)^2-1$, donc $(x-1)^2+y^2=3$. Comme $3>0$, $\mathcal{E}_0$ est le cercle de centre $(1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$ (et non 3).

(b) Je divise par 2 : $x^2+y^2-2x+2my+2m^2-2m-2=0$. Puis $x^2-2x=(x-1)^2-1$ et $y^2+2my=(y+m)^2-m^2$. On obtient $(x-1)^2+(y+m)^2=1+m^2-2m^2+2m+2$, soit $(x-1)^2+(y+m)^2=-m^2+2m+3$.
Donc $\beta=-m$ (le signe s'inverse) et $k(m)=-m^2+2m+3$. Contrôle : $k(0)=3$, comme à la question précédente.

(c) $k(m)=-m^2+2m+3$ est un trinôme. $\Delta=2^2-4\times(-1)\times3=16$, donc ses racines sont $m_1=\frac{-2+4}{-2}=-1$ et $m_2=\frac{-2-4}{-2}=3$. Le coefficient de m^2 est négatif, donc $k(m)>0$ entre les racines. Si $-1<m<3$: cercle de centre $(1\,;-m)$ et de rayon $\sqrt{-m^2+2m+3}$. Si $m=-1$: $k=0$, le seul point $(1\,;1)$. Si $m=3$: le seul point $(1\,;-3)$. Si $m<-1$ ou $m>3$: $k(m)<0$. Une somme de carrés n'est jamais négative, donc $\mathcal{E}_m$ est vide.

(d) Forme canonique : $k(m)=-(m-1)^2+4$.
Donc $k(m)\leqslant4$, avec égalité seulement pour $m=1$. Le rayon $\sqrt{k(m)}$ est maximal pour $m=1$ et vaut $\sqrt{4}=2$. Contrôle : $\mathcal{E}_1$: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

(e) $O\in\mathcal{E}_m \iff 4m^2-4m-4=0 \iff m^2-m-1=0$. On a $\Delta=1+4=5$, donc $m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Contrôle : ces valeurs, environ $-0{,}62$ et $1{,}62$, sont bien dans $]-1\,;3[$, et $\mathcal{E}_m$ est alors un vrai cercle. De plus, avec la forme de la question 2 : $1+m^2=-m^2+2m+3 \iff 2m^2-2m-2=0$, c'est la même équation.

Ex. 35 ★★★ **Trois projets de rond-point**

(a) Je divise d'abord par 2 : $x^2+y^2+3x-5y+\frac{1}{2}=0$. Ensuite $x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ et $y^2-5y=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$. L'équation devient $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}-\frac{1}{2}=8$. Comme $8>0$, Γ_1 est un cercle. Les signes s'inversent, donc son centre est $K\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$. Son rayon est $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, soit environ 28 m (et non 8).

Ex. 35 (suite)

(b) Le centre d'un cercle de diamètre $[AB]$ est le milieu de $[AB]$: $\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{2}\,;\frac{\frac{9}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$. $\overrightarrow{AB}\,(-4\,;-4)$, donc $AB=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$. Le rayon vaut $\frac{AB}{2}=2\sqrt{2}$, et non $AB=4\sqrt{2}$. Γ_2 a le même centre et le même rayon que Γ_1 : c'est le même cercle. Contrôle avec $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$: $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)+\left(y-\frac{9}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=x^2+y^2+3x-5y+\frac{1}{2}$, on retrouve l'équation de Γ_1 divisée par 2.

(c) Non. On complète les carrés : $x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ et $y^2-5y=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ (sans oublier ces deux termes). L'équation devient $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}-9=-\frac{1}{2}$. Une somme de deux carrés n'est jamais négative : aucun point ne vérifie l'équation, Γ_3 est l'ensemble vide. Zoé a lu le rayon sur la constante 9 : on ne lit r^2 qu'après avoir complété les carrés. Contrôle : $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=x^2+y^2+3x-5y+9$.

(d) $P\in\Gamma_1 \iff \left(b+\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2=8 \iff 2b^2-2b+\frac{34}{4}-8=0 \iff 4b^2-4b+1=0 \iff (2b-1)^2=0$. Une seule solution : $b=\frac{1}{2}$. La droite $y=x$ coupe Γ_1 en un seul point $P\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$: elle est tangente à Γ_1 en P. Contrôle : $\overrightarrow{KP}\,(2\,;-2)$ et le vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;1)$ de la droite vérifient $2\times1+(-2)\times1=0$. De plus, $\frac{\left|-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=r$.

6. *Tangente à un cercle*

Ex. 36 ★☆☆ **Tangente en un point du cercle**

(a) $(1+2)^2+(5-1)^2=9+16=25$, donc $T\in\mathcal{C}$. La tangente en T a pour vecteur normal le rayon $\overrightarrow{IT}\,(1-(-2)\,;5-1)$, soit $\overrightarrow{IT}\,(3\,;4)$.

(b) $M(x\,;y)\in t \iff \overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{IT}=0 \iff 3(x-1)+4(y-5)=0$, soit t : $3x+4y-23=0$. Contrôle : $3\times1+4\times5-23=0$.

(c) Pour $ax+by+c=0$, $\vec{u}\,(-b\,;a)$ est directeur : $\vec{u}\,(-4\,;3)$. Contrôle : $\overrightarrow{IT}\cdot\vec{u}=3\times(-4)+4\times3=0$. Le rayon est bien orthogonal à la tangente.

(d) Un cercle n'est pas la courbe d'une fonction : la droite verticale $x=1$ le coupe en deux points, $T(1\,;5)$ et $(1\,;-3)$. La tangente à un cercle se trouve avec le rayon, sans dérivée. $(-2+2)^2+(6-1)^2=25$, donc $V\in\mathcal{C}$. $\overrightarrow{IV}\,(0\,;5)$ est normal à la tangente : $0(x+2)+5(y-6)=0$, soit $y=6$. C'est une tangente horizontale. Contrôle : $\vec{u}\,(1\,;0)$ dirige $y=6$ et $\overrightarrow{IV}\cdot\vec{u}=0\times1+5\times0=0$.

Ex. 36 (suite)

(e) Il faut d'abord vérifier que R est sur $\mathcal{C}$: $(1+2)^2+(4-1)^2 = 9+9 = 18 \neq 25$. R n'est pas sur le cercle : « la tangente en R » n'existe pas.

(f) $(2+2)^2+(-2-1)^2 = 16+9 = 25$, donc $U \in \mathcal{C}$, et $\overrightarrow{IU}\,(4\,;-3)$. La droite de Hugo passe par U ($3\times 2+4\times(-2)+2=0$) et par I ($3\times(-2)+4\times 1+2=0$). Son vecteur directeur $(-4\,;3)$ est colinéaire à $\overrightarrow{IU}$: Hugo a pris le rayon comme vecteur directeur, il a tracé un diamètre. Hugo a tort. Correction : $\overrightarrow{IU}$ est normal, donc $4(x-2)-3(y+2)=0$, soit $4x-3y-14=0$. Contrôle : $4\times 2-3\times(-2)-14=0$.

Ex. 37 ★☆☆ Le bassin du jardin

(a) $x^2-6x=(x-3)^2-9$ et $y^2+2y=(y+1)^2-1$. L'équation devient $(x-3)^2+(y+1)^2=10$. Comme $10>0$, c'est le cercle de centre $K(3\,;-1)$ (attention aux signes) et de rayon $r=\sqrt{10}$ (et pas 10).

(b) $0^2+0^2-6\times 0+2\times 0=0$, donc $O\in\mathcal{C}$. La tangente en O a pour vecteur normal $\overrightarrow{KO}\,(-3\,;1)$.

(c) O est sur d_1 ($3\times 0-0=0$). d_1 a pour vecteur normal $\vec{n}_1\,(3\,;-1)$. On a $\det(\overrightarrow{KO},\vec{n}_1)=(-3)\times(-1)-1\times 3=0$: les deux vecteurs sont colinéaires. d_1 passe par O et est perpendiculaire au rayon $[KO]$: c'est la tangente en O.

(d) $4^2+2^2-6\times 4+2\times 2=0$, donc $T\in\mathcal{C}$. On multiplie par 3 : d_2 : $x+3y-10=0$, et $4+3\times 2-10=0$, donc $T\in d_2$. d_2 a pour vecteur normal $(1\,;3)$, qui est égal à $\overrightarrow{KT}\,(1\,;3)$.
Donc d_2 est la tangente en T.

(e) $6^2+0^2-6\times 6+2\times 0=0$, donc $B\in\mathcal{C}$. La tangente en B a pour vecteur normal le rayon $\overrightarrow{KB}\,(3\,;1)$: $3(x-6)+1(y-0)=0$, soit $3x+y-18=0$.
Donc d_3 est la tangente en B pour $a=3$. Attention : $B\in d_3$ donne bien $6a-18=0$, mais il faut AUSSI que $\vec{n}_3\,(a\,;1)$ soit colinéaire à $\overrightarrow{KB}$. Contrôle : $\det(\overrightarrow{KB},\vec{n}_3)=3\times 1-1\times 3=0$. Conclusion : $a=3$.

Ex. 38 ★★☆ Le rond-point et la route

(a) Une tangente parallèle à Δ a un vecteur normal colinéaire à $\vec{n}\,(1\,;2)$, le vecteur normal lu sur Δ. Or la tangente en T a pour vecteur normal le rayon $\overrightarrow{JT}$.
Donc $\overrightarrow{JT}$ est colinéaire à $\vec{n}$: $\overrightarrow{JT}=k\vec{n}$.

Ex. 38 (suite)

(b) $T\in\mathcal{C} \iff (-1+k+1)^2+(2+2k-2)^2=5 \iff k^2+4k^2=5 \iff k^2=1$. On a donc $k=1$ ou $k=-1$, ce qui donne $T_1(0\,;4)$ et $T_2(-2\,;0)$. Contrôle : $(0+1)^2+(4-2)^2=5$ et $(-2+1)^2+(0-2)^2=5$.

(c) En T_1 : $1(x-0)+2(y-4)=0$, soit $x+2y-8=0$. En T_2 : $1(x+2)+2(y-0)=0$, soit $x+2y+2=0$. Elles ont le même vecteur normal que Δ, avec des constantes différentes : elles sont strictement parallèles à Δ.
Milieu : $\left(\frac{0-2}{2}\,;\frac{4+0}{2}\right)=(-1\,;2)=J$. T_1 et T_2 sont diamétralement opposés.

(d) $H=J+t\vec{n}$, soit $H(-1+t\,;2+2t)$. $H\in\Delta \iff -1+t+2(2+2t)-13=0 \iff 5t-10=0 \iff t=2$, d'où $H(1\,;6)$. Contrôle : $1+12-13=0$.
$\overrightarrow{JH}\,(2\,;4)$, donc $JH=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. La distance de J à Δ est $2\sqrt{5}>\sqrt{5}=r$: la route ne touche pas le rond-point (elle n'est ni tangente ni sécante).

Ex. 39 ★★☆ Le drone et l'antenne

(a) On substitue $y=x+p$: $(x-1)^2+(x+p+2)^2=8$. On développe : $x^2-2x+1+x^2+2(p+2)x+(p+2)^2-8=0$, soit $2x^2+(2p+2)x+p^2+4p-3=0$.

(b) $\Delta=(2p+2)^2-4\times 2\times(p^2+4p-3)=-4p^2-24p+28=-4(p^2+6p-7)=-4(p-1)(p+7)$. d_p est tangente si et seulement s'il y a un seul point commun, donc si $\Delta=0$: $p=1$ ou $p=-7$.

(c) Pour $p=1$, l'équation donne $2x^2+4x+2=0$, soit $2(x+1)^2=0$. On a donc $x=-1$ et $y=-1+1=0$: $T(-1\,;0)$. Contrôle : $(-1-1)^2+(0+2)^2=4+4=8$.

(d) d_1 : $x-y+1=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(1\,;-1)$. On pose $H=I+t\vec{n}$, soit $H(1+t\,;-2-t)$. $H\in d_1 \iff 1+t+2+t+1=0 \iff t=-2$, d'où $H(-1\,;0)=T$.
Le point de contact est bien le projeté orthogonal du centre. Contrôle : $\overrightarrow{IT}\,(-2\,;2)$ et $\overrightarrow{IT}\cdot\vec{u}=-2+2=0$.
De plus, $IT=\sqrt{8}=2\sqrt{2}=r$.

(e) Pour $p=0$: $\Delta=-4\times(0+0-7)=28>0$.
L'équation a deux solutions, donc d_0 coupe $\mathcal{C}$ en deux points : le drone traverse la zone couverte.

Ex. 40 ★★★ **Les visées rasantes d'Inès**

(a) On regroupe : $x^2+4x=(x+2)^2-4$ et $y^2+6y=(y+3)^2-9$. L'équation devient $(x+2)^2+(y+3)^2=4+9+12=25$. Comme $25>0$, c'est un cercle. Son centre est $K(-2\,;-3)$ (attention, les signes s'inversent). Son rayon est $r=\sqrt{25}=5$: le second membre vaut r^2, pas r. On a $\overrightarrow{KA}\,(5\,;10)$, donc $KA^2=25+100=125$. Comme $125>25=r^2$, le point A est à l'extérieur du disque.

(b) La tangente en T est la droite qui passe par T et qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{KT}$. Un point M est sur cette droite si et seulement si $\overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{KT}=0$. Avec $M=A$, cela donne $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{KT}=0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{TK}\cdot\overrightarrow{TA}=0$. Cette condition signifie que T est sur le cercle Γ de diamètre $[KA]$. Son équation est $(x+2)(x-3)+(y+3)(y-7)=0$, soit $\Gamma : x^2+y^2-x-4y-27=0$. Contrôle : K vérifie $4+9+2+12-27=0$ et A vérifie $9+49-3-28-27=0$.

(c) La différence des deux équations donne $(4x+6y-12)-(-x-4y-27)=0$, soit $5x+10y+15=0$, c'est-à-dire $x+2y+3=0$. Les points de contact sont donc sur cette droite. On substitue $x=-2y-3$ dans $\mathcal{C}$: $(-2y-1)^2+(y+3)^2=25$, soit $5y^2+10y-15=0$, c'est-à-dire $y^2+2y-3=0$. Le discriminant vaut $\Delta=4+12=16$, d'où $y=-3$ ou $y=1$. On obtient $T_1(3\,;-3)$ et $T_2(-5\,;1)$. Contrôle : $(3+2)^2+0^2=25$ et $(-3)^2+4^2=25$. Ces deux points sont bien sur $\mathcal{C}$.

(d) Le rayon $\overrightarrow{KT_2}\,(-3\,;4)$ est NORMAL à la tangente, pas directeur. La droite de Yanis passe bien par T_2, mais $4\times3+3\times7+17=50\neq0$: elle ne passe pas par A. Correction : $-3(x+5)+4(y-1)=0$, soit $-3x+4y-19=0$. Contrôle par A : $-9+28-19=0$. Contrôle par un vecteur directeur : $\vec{u}\,(4\,;3)$ dirige la droite et $\overrightarrow{KT_2}\cdot\vec{u}=-12+12=0$.

(e) $\overrightarrow{KT_1}\,(5\,;0)$ est normal à la tangente en T_1. On obtient $5(x-3)+0\times(y+3)=0$, soit $x=3$: c'est une droite verticale, et elle passe bien par $A(3\,;7)$. On a $\overrightarrow{AT_1}\,(0\,;-10)$, donc $AT_1=10$. On a $\overrightarrow{AT_2}\,(-8\,;-6)$, donc $AT_2=\sqrt{64+36}=10$. Les deux longueurs sont égales. Contrôle par Pythagore dans le triangle KT_1A, rectangle en T_1 : $AT_1^2=KA^2-r^2=125-25=100$.

Ex. 41 ★★★ **Le phare et les bateaux**

(a) On vérifie d'abord si T est sur $\mathcal{C}$: $(0+3)^2+(2+1)^2=18\neq20$. Le point T n'est pas sur $\mathcal{C}$, donc il n'y a pas de tangente en T. Étudions quand même la droite de Malo. On note $H=I+t\,\vec{n}$ avec $\vec{n}\,(1\,;1)$. En remplaçant, $(-3+t)+(-1+t)-2=0$, d'où $t=3$ et $H(0\,;2)=T$. La distance de I à la droite vaut donc $IT=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Comme $18<20$, cette distance est inférieure à $r=2\sqrt{5}$: la droite coupe $\mathcal{C}$ en deux points. Malo a tort : sa droite n'est pas tangente au cercle.

(b) $\vec{n}\,(2\,;-1)$ est normal à d_m. On cherche $H_m=I+t\,\vec{n}$, soit $H_m(-3+2t\,;-1-t)$. Ce point est sur d_m si $2(-3+2t)-(-1-t)+m=0$, soit $5t-5+m=0$, d'où $t=\frac{5-m}{5}$. On obtient $H_m\left(\frac{-5-2m}{5}\,;\frac{m-10}{5}\right)$. Contrôle : $\frac{2(-5-2m)-(m-10)}{5}+m=\frac{-5m}{5}+m=0$. Ensuite $IH_m=|t|\times\|\vec{n}\|=\frac{|5-m|}{5}\times\sqrt{5}=\frac{|5-m|}{\sqrt{5}}$. Contrôle par la formule : $\frac{|2\times(-3)-(-1)+m|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|m-5|}{\sqrt{5}}$.

(c) d_m est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $IH_m=r$, soit $\frac{|5-m|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, c'est-à-dire $|5-m|=10$. On trouve $m=-5$ ou $m=15$. Le point de contact est le projeté orthogonal de I sur la tangente. Pour $m=-5$ ($t=2$) : $H(1\,;-3)$. Pour $m=15$ ($t=-2$) : $H'(-7\,;1)$. Contrôle : $2\times1-(-3)-5=0$ et $2\times(-7)-1+15=0$; $(1+3)^2+(-3+1)^2=20$ et $(-7+3)^2+(1+1)^2=20$, donc les deux points sont sur $\mathcal{C}$. Le milieu de $[HH']$ est $\left(\frac{1-7}{2}\,;\frac{-3+1}{2}\right)=(-3\,;-1)=I$: les deux points sont diamétralement opposés.

(d) D'après la question 2 avec $m=0$, $IH_0=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$. Comme $\sqrt{5}<2\sqrt{5}$, la route coupe $\mathcal{C}$ en deux points : le bateau traverse la zone éclairée. On substitue $y=2x$ dans $\mathcal{C}$: $(x+3)^2+(2x+1)^2=20$, soit $5x^2+10x-10=0$, c'est-à-dire $x^2+2x-2=0$. Le discriminant vaut $\Delta=4+8=12$, d'où $x=-1\pm\sqrt{3}$. On obtient $E(-1-\sqrt{3}\,;-2-2\sqrt{3})$ et $F(-1+\sqrt{3}\,;-2+2\sqrt{3})$. Alors $EF=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$. Contrôle par Pythagore : $\frac{EF}{2}=\sqrt{20-5}=\sqrt{15}$. La partie éclairée de la route mesure $2\sqrt{15}$ km.

Ex. 42 ★★★ **Un cercle et la parabole**

(a) $y^2-5y=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$. L'équation devient $x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. Comme $\frac{25}{4}>0$, c'est le cercle de centre $J\left(0\,;\frac{5}{2}\right)$. Son rayon est $r=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$, et non $\frac{25}{4}$, qui vaut r^2.

Ex. 42 **(suite)**

(b) Un point commun vérifie $y = x^2$. On remplace x^2 par y dans $\mathcal{C} : y + y^2 - 5y = 0$, soit $y(y-4) = 0$, d'où $y = 0$ ou $y = 4$. Si $y = 0$, alors $x^2 = 0$: c'est le point $O(0\,;0)$. Si $y = 4$, alors $x^2 = 4$, donc $x = 2$ ou $x = -2$. Les points communs sont O, $A(2\,;4)$ et $B(-2\,;4)$. Contrôle : $4 + 16 - 20 = 0$ pour A comme pour B.

(c) A est sur $\mathcal{C}$ (question 2). $\overrightarrow{JA}\left(2\,;\frac{3}{2}\right)$ est normal à t_A. On obtient $2(x-2) + \frac{3}{2}(y-4) = 0$, et en multipliant par 2 : $t_A : 4x + 3y - 20 = 0$. Contrôle : A vérifie $8 + 12 - 20 = 0$. De plus $\vec{u}\,(-3\,;4)$ dirige t_A et $\overrightarrow{JA} \cdot \vec{u} = -6 + 6 = 0$.

(d) On résout le système formé par $y = x^2$ et $4x + 3y - 20 = 0$. Par substitution : $3x^2 + 4x - 20 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 16 + 240 = 256$, d'où $x = \frac{-4+16}{6} = 2$ ou $x = \frac{-4-16}{6} = -\frac{10}{3}$. Il y a donc un second point commun, $\left(-\frac{10}{3}\,;\frac{100}{9}\right)$. Contrôle : $-\frac{40}{3} + \frac{100}{3} - \frac{60}{3} = 0$. C'est FAUX. t_A est tangente au CERCLE, pas à la parabole. Pour un cercle, la tangente se définit par le rayon : elle passe par A et a pour vecteur normal $\overrightarrow{JA}$. Aucune dérivée n'est nécessaire.

(e) $\overrightarrow{JB}\left(-2\,;\frac{3}{2}\right)$ est normal à t_B. On obtient $-2(x+2) + \frac{3}{2}(y-4) = 0$, soit $t_B : -4x + 3y - 20 = 0$. On additionne les équations de t_A et de t_B : $6y - 40 = 0$, d'où $y = \frac{20}{3}$. Puis $4x = 20 - 20$, d'où $x = 0$. On a donc $S\left(0\,;\frac{20}{3}\right)$. Ensuite $SA = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$. Contrôle par Pythagore dans le triangle JAS, rectangle en A : $JS = \frac{25}{6}$ et $JS^2 - r^2 = \frac{625-225}{36} = \frac{100}{9}$.

7. *Intersections droite-cercle et parabole-cercle*

Ex. 43 ★☆☆ **Combien de points communs ?**

(a) On remplace y par $x + 2$: $x^2 + (x+2)^2 = 10$, soit $2x^2 + 4x - 6 = 0$, donc $x^2 + 2x - 3 = 0$. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$: la droite coupe le cercle en deux points.

(b) La droite est verticale, donc on remplace x par 4 : $(4-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, soit $y^2 + 2y + 1 + 4 - 9 = 0$, donc $y^2 + 2y - 4 = 0$. $\Delta = 4 + 16 = 20 > 0$: il y a deux points communs.

(c) On remplace y par 5 : $(x+3)^2 + 3^2 = 4$, soit $x^2 + 6x + 9 + 9 - 4 = 0$, donc $x^2 + 6x + 14 = 0$. $\Delta = 36 - 56 = -20 < 0$: il n'y a aucun point commun. C'est cohérent avec la figure : la droite passe au-dessus du cercle.

Ex. 43 **(suite)**

(d) $x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 5\right)^2 = 20$, soit $\frac{5}{4}x^2 + 5x + 5 = 0$. En multipliant par 4 : $5x^2 + 20x + 20 = 0$, puis $x^2 + 4x + 4 = 0$. $\Delta = 16 - 16 = 0$: il y a un seul point commun, donc d est tangente à $\mathcal{C}$.

(e) $(x-1)^2 + (-3x+9)^2 = 2$, soit $x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 54x + 81 - 2 = 0$, donc $10x^2 - 56x + 80 = 0$, puis $5x^2 - 28x + 40 = 0$. $\Delta = 784 - 800 = -16 < 0$: il n'y a aucun point commun.

Ex. 44 ★★☆ **Coordonnées des points communs**

(a) $x^2 + (x-1)^2 = 25$, soit $2x^2 - 2x - 24 = 0$, donc $x^2 - x - 12 = 0$. $\Delta = 1 + 48 = 49$, d'où $x = \frac{1+7}{2} = 4$ ou $x = \frac{1-7}{2} = -3$. Avec $y = x - 1$: $y = 3$ ou $y = -4$. Contrôle : $16 + 9 = 25$ et $9 + 16 = 25$. Les points communs sont $(4\,;3)$ et $(-3\,;-4)$.

(b) d donne $x = 2y + 7$, donc $x - 3 = 2y + 4$. On obtient $(2y+4)^2 + (y+2)^2 = 5$, soit $5y^2 + 20y + 15 = 0$, puis $y^2 + 4y + 3 = 0$. $\Delta = 16 - 12 = 4$, d'où $y = \frac{-4+2}{2} = -1$ ou $y = \frac{-4-2}{2} = -3$. Avec $x = 2y + 7$: $x = 5$ ou $x = 1$. Contrôle : $(5-3)^2 + (-1+2)^2 = 5$ et $(1-3)^2 + (-3+2)^2 = 5$; $5 + 2 - 7 = 0$ et $1 + 6 - 7 = 0$. Les points communs sont $(5\,;-1)$ et $(1\,;-3)$.

(c) On remplace y par $-x + 2$: $x^2 + (-x+2)^2 - 4x + 2(-x+2) - 20 = 0$, soit $2x^2 - 10x - 12 = 0$, donc $x^2 - 5x - 6 = 0$. $\Delta = 25 + 24 = 49$, d'où $x = 6$ ou $x = -1$. Avec la droite : $y = -4$ ou $y = 3$. Contrôle avec $\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$: $16 + 9 = 25$ et $9 + 16 = 25$. Les points communs sont $(6\,;-4)$ et $(-1\,;3)$.

(d) $(x+2)^2 + (x+6)^2 = 8$, soit $2x^2 + 16x + 32 = 0$, donc $x^2 + 8x + 16 = 0$. $\Delta = 64 - 64 = 0$, d'où une seule solution, $x = -4$, et $y = -4 + 7 = 3$. Contrôle : $(-4+2)^2 + (3-1)^2 = 8$. La droite d est tangente à $\mathcal{C}$ en $(-4\,;3)$.

Ex. 45 ★★☆ **Le cargo et la portée du phare**

(a) Un cercle de centre $I(-2\,;-1)$ et de rayon 5 a pour équation $\mathcal{C} : (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

(b) $\vec{n}\,(7\,;1)$ est normal à d (on lit les coefficients de x et de y). $H = I + t\,\vec{n}$ s'écrit $H(-2 + 7t\,;-1 + t)$. Comme $H \in d$: $7(-2+7t) + (-1+t) - 10 = 0$, soit $50t - 25 = 0$, donc $t = \frac{1}{2}$ et $H\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$. Contrôle : $7 \times \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 10 = 0$. Ensuite $IH = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Or $\frac{5\sqrt{2}}{2} < 5$ car $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$: on attend deux points communs.

Ex. 45 **(suite)**

(c) d donne $y = -7x + 10$, donc $y + 1 = -7x + 11$. On obtient $(x+2)^2 + (-7x+11)^2 = 25$, soit $x^2 + 4x + 4 + 49x^2 - 154x + 121 - 25 = 0$, donc $50x^2 - 150x + 100 = 0$, puis $x^2 - 3x + 2 = 0$. $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$: il y a deux solutions, ce qui confirme la prévision.

(d) $x = \frac{3-1}{2} = 1$ ou $x = \frac{3+1}{2} = 2$. On calcule y avec l'équation de la droite : $y = -7 \times 1 + 10 = 3$ et $y = -7 \times 2 + 10 = -4$. Contrôle : $(1+2)^2 + (3+1)^2 = 25$ et $(2+2)^2 + (-4+1)^2 = 25$.
Donc $A(1\,;3)$ et $B(2\,;-4)$.

(e) $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Contrôle : le milieu de $[AB]$ est $\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$, c'est bien H. Le cargo parcourt $5\sqrt{2}$ km (environ 7,1 km) dans la zone éclairée.

Ex. 46 ★★☆ **Quatre points pour Noé ?**

(a) Le centre est $I(-1\,;3)$ et le rayon est $\sqrt{13}$ (et non 13). Avec $y - 3 = -x$: $(x+1)^2 + (-x)^2 = 13$, soit $2x^2 + 2x + 1 - 13 = 0$, donc $2x^2 + 2x - 12 = 0$, puis $x^2 + x - 6 = 0$. Cette étape de Noé est juste.

(b) Non. Noé calcule y avec l'équation du cercle : il obtient des points du cercle qui ne sont pas tous sur la droite. Un point commun doit vérifier l'équation de d, et le trinôme a au plus deux racines, donc il y a au plus deux points communs. Avec $y = -x + 3$: $x = 2$ donne $y = 1$ et $x = -3$ donne $y = 6$. Les points communs sont $(2\,;1)$ et $(-3\,;6)$.

(c) $(2+1)^2 + (1-3)^2 = 9 + 4 = 13$ et $2 + 1 - 3 = 0$. Ensuite $(-3+1)^2 + (6-3)^2 = 4 + 9 = 13$ et $-3 + 6 - 3 = 0$. Les deux points sont sur $\mathcal{C}$ et sur d. En revanche $2 + 5 - 3 = 4 \neq 0$: $(2\,;5)$ est sur $\mathcal{C}$ mais pas sur d.

(d) d_k donne $y = -x + k$. On obtient $(x+1)^2 + (-x+k-3)^2 = 13$, soit $2x^2 + (8-2k)x + k^2 - 6k - 3 = 0$. $\Delta = (8-2k)^2 - 8(k^2 - 6k - 3) = -4k^2 + 16k + 88$. La droite est tangente si et seulement si $\Delta = 0 \iff k^2 - 4k - 22 = 0$. Le discriminant vaut $16 + 88 = 104$, d'où $k = \frac{4 \pm \sqrt{104}}{2} = 2 \pm \sqrt{26}$. Contrôle : pour $k = 3$, on retrouve $\Delta = -36 + 48 + 88 = 100 > 0$, ce qui convient car $d_3 = d$ coupe le cercle en deux points. d_k est tangente à $\mathcal{C}$ pour $k = 2 + \sqrt{26}$ ou $k = 2 - \sqrt{26}$.

Ex. 47 ★★★ **Le drone et la zone interdite**

(a) Par identification avec $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$: attention aux signes, $x + 1 = x - (-1)$, donc le centre est $I(-1\,;-2)$ et $r^2 = 10$, donc $r = \sqrt{10}$ (et non 10). Position de A : $IA^2 = (3+1)^2 + (0+2)^2 = 16 + 4 = 20$. Comme $20 > 10$, on a $IA > r$: A est à l'extérieur de $\mathcal{C}$, le drone part hors de la zone.

(b) Prévision : la distance de $I(-1\,;-2)$ à la droite verticale $x = 3$ est l'écart des abscisses, $|3 - (-1)| = 4$. Or $4^2 = 16 > 10$, donc $4 > \sqrt{10}$: on attend aucun point commun. Calcul : la droite est verticale, on substitue $x = 3$ dans l'équation du cercle : $(3+1)^2 + (y+2)^2 = 10$, soit $(y+2)^2 = -6$. Un carré n'est jamais négatif : aucune solution. Conclusion : δ et $\mathcal{C}$ n'ont aucun point commun (la droite δ n'est pas de la forme $y = m(x-3)$, d'où son étude à part).

(c) Un point commun vérifie les deux équations. On substitue $y = mx - 3m$: $(x+1)^2 + (mx - 3m + 2)^2 = 10$. On développe : $x^2 + 2x + 1 + m^2x^2 + 2mx(2 - 3m) + (2-3m)^2 - 10 = 0$, avec $(2-3m)^2 = 9m^2 - 12m + 4$. On ordonne : $(1+m^2)x^2 + (2 + 4m - 6m^2)x + (9m^2 - 12m - 5) = 0$. Contrôle pour $m = 3$: on obtient $10x^2 - 40x + 40 = 0$, ce que donne aussi le développement direct de $(x+1)^2 + (3x-7)^2 - 10$.

(d) $\Delta = (2 + 4m - 6m^2)^2 - 4(1+m^2)(9m^2 - 12m - 5)$. D'une part $(2 + 4m - 6m^2)^2 = 4(9m^4 - 12m^3 - 2m^2 + 4m + 1)$. D'autre part $4(1+m^2)(9m^2 - 12m - 5) = 4(9m^4 - 12m^3 + 4m^2 - 12m - 5)$.
Donc $\Delta = 4(-6m^2 + 16m + 6) = -8(3m^2 - 8m - 3)$.
Tangente $\iff \Delta = 0 \iff 3m^2 - 8m - 3 = 0$: discriminant $64 + 36 = 100$, donc $m = \frac{8+10}{6} = 3$ ou $m = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$. Deux points (la droite traverse la zone) $\iff \Delta > 0 \iff 3m^2 - 8m - 3 < 0$: le trinôme est négatif entre ses racines, donc $m \in \left]-\frac{1}{3}\,;3\right[$.
Contrôle par la distance : d_m : $mx - y - 3m = 0$ et $\text{dist}(I\,;d_m) = \frac{|-m+2-3m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|2-4m|}{\sqrt{m^2+1}}$; pour $m = 3$: $\frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$; pour $m = -\frac{1}{3}$: $\frac{10/3}{\sqrt{10}/3} = \sqrt{10}$. Les deux distances valent bien le rayon.

Ex. 47 (suite)

(e) Quand $\Delta = 0$, la racine double est $x = -\frac{b}{2a}$. Pour $m = 3$: $10x^2 - 40x + 40 = 0$, donc $x = \frac{40}{20} = 2$; on calcule y avec l'équation de la DROITE : $y = 3(2-3) = -3$, d'où $T_1(2\,;-3)$. Pour $m = -\frac{1}{3}$: $a = \frac{10}{9}$, $b = 2 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 0$, $c = 1 + 4 - 5 = 0$, donc $x = 0$ et $y = -\frac{1}{3}(0 - 3) = 1$, d'où $T_2(0\,;1)$. Contrôles : $(2+1)^2 + (-3+2)^2 = 10$ et $(0+1)^2 + (1+2)^2 = 10$, les points sont sur $\mathcal{C}$. $\overrightarrow{IT_1}\,(3\,;-1)$ et $\vec{u}_1\,(1\,;3)$ directeur de d_3 : $3 \times 1 + (-1) \times 3 = 0$. $\overrightarrow{IT_2}\,(1\,;3)$ et $\vec{u}_2\,(3\,;-1)$ directeur de $d_{-1/3}$: $1 \times 3 + 3 \times (-1) = 0$. Chaque rayon est orthogonal à la droite : ce sont bien les tangentes en T_1 et T_2.

Ex. 48 ★★★ Des balles dans le bol de skate

(a) Γ : $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 3$: centre $J(0\,;1)$, rayon $\sqrt{3}$. Un point commun vérifie $y = x^2$, on remplace donc x^2 par y : $y + (y-1)^2 = 3$, soit $y + y^2 - 2y + 1 = 3$. On ordonne : $y^2 - y - 2 = 0$.

(b) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$, donc $y = \frac{1+3}{2} = 2$ ou $y = \frac{1-3}{2} = -1$. Piège : $y = -1$ donnerait $x^2 = -1$, impossible ; on rejette cette valeur (la parabole est au-dessus de l'axe des abscisses). Pour $y = 2$: $x^2 = 2$, donc $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ (ne pas oublier le $\pm$). Contrôle : $2 + (2-1)^2 = 3$. Conclusion : deux points communs, $(-\sqrt{2}\,;2)$ et $(\sqrt{2}\,;2)$.

(c) On remplace x^2 par y dans $\mathcal{C}_k$: $y + (y-2)^2 = k$, soit $y + y^2 - 4y + 4 - k = 0$, donc $y^2 - 3y + 4 - k = 0$. Discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (4-k) = 9 - 16 + 4k = 4k - 7$.

(d) Pour $k = 4$: $y^2 - 3y = 0$, soit $y(y-3) = 0$, donc $y = 0$ ou $y = 3$, deux valeurs positives ou nulles. Mais $y = 0$ donne $x^2 = 0$, une SEULE abscisse $x = 0$: le point $O(0\,;0)$. $y = 3$ donne $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$. Contrôles : $0 + (0-2)^2 = 4$ et $3 + (3-2)^2 = 4$. Malo a tort : il y a trois points communs, $O(0\,;0)$, $(-\sqrt{3}\,;3)$ et $(\sqrt{3}\,;3)$.

(e) Les racines, quand elles existent, ont pour somme 3 et pour produit $4-k$. Si $k < \frac{7}{4}$: $\Delta < 0$, aucun y, aucun point. Si $k = \frac{7}{4}$: $\Delta = 0$, $y = \frac{3}{2} \geqslant 0$, $x^2 = \frac{3}{2}$, deux points. Si $\frac{7}{4} < k < 4$: deux racines de produit $4-k > 0$ (même signe) et de somme $3 > 0$, donc toutes deux positives : quatre points. Si $k = 4$: trois points (question précédente). Si $k > 4$: produit $4-k < 0$, une racine négative (rejetée) et une positive : deux points. Pour $k = \frac{7}{4}$: $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$; contrôle $\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 = \frac{7}{4}$. Points : $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$: la balle de rayon $\frac{\sqrt{7}}{2}$ est posée dans le bol.

Ex. 49 ★★★ Les deux antennes de Chloé

(a) $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$ et $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$. L'équation devient $(x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 - 15 = 0$, soit $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$. Comme $25 > 0$, c'est un cercle : centre $I(-3\,;1)$, rayon 5.

(b) Les coefficients de x^2 et y^2 doivent valoir 1 : on divise par 2, $x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 2y - \frac{5}{2} = 0$. $x^2 - \frac{13}{2}x = \left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{169}{16}$ et $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$. D'où $\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{16} + 1 + \frac{5}{2} = \frac{225}{16} > 0$. Centre $K\left(\frac{13}{4}\,;1\right)$, rayon $\sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$.

(c) Un point commun vérifie les deux équations, donc aussi leur différence : $\left(x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15\right) - \left(x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 2y - \frac{5}{2}\right) = 0$. Les termes x^2, y^2 et $-2y$ disparaissent : $\frac{25}{2}x - \frac{25}{2} = 0$, soit $x = 1$. Tout point commun est sur la droite verticale δ : $x = 1$.

(d) Prévision : la distance de $I(-3\,;1)$ à la droite verticale $x = 1$ est $|1 - (-3)| = 4 < 5$: δ coupe $\mathcal{C}_1$ en deux points. Calcul : la droite est verticale, on substitue $x = 1$ dans $\mathcal{C}_1$: $(1+3)^2 + (y-1)^2 = 25$, soit $(y-1)^2 = 9$, donc $y - 1 = 3$ ou $y - 1 = -3$: $y = 4$ ou $y = -2$. D'où $E(1\,;4)$ et $F(1\,;-2)$. Contrôle sur $\mathcal{C}_2$: $\left(1 - \frac{13}{4}\right)^2 + (4-1)^2 = \frac{81}{16} + 9 = \frac{225}{16}$ et $\left(1 - \frac{13}{4}\right)^2 + (-2-1)^2 = \frac{225}{16}$. Les deux cercles se coupent en E et F.

(e) La tangente à $\mathcal{C}_1$ en E a pour vecteur normal $\overrightarrow{IE}\,(4\,;3)$. $M(x\,;y) \in T \iff \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{IE} = 0 \iff 4(x-1) + 3(y-4) = 0 \iff 4x + 3y - 16 = 0$. Contrôle : $4 \times 1 + 3 \times 4 - 16 = 0$. Pour K : $4 \times \frac{13}{4} + 3 \times 1 - 16 = 13 + 3 - 16 = 0$, donc $K \in T$. Ainsi T est la droite (EK), de vecteur directeur $\overrightarrow{KE}$. Or la tangente à $\mathcal{C}_2$ en E a pour vecteur NORMAL $\overrightarrow{KE}$: elle est donc perpendiculaire à T. Contrôle : $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{KE} = 4 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 3 \times 3 = 0$, les deux rayons en E sont orthogonaux.