Corrigé – Problèmes : quel théorème ?

Mathématiques – Troisième

Pythagore, Thalès, trigonométrie · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – La diagonale du terrain ★

1. **Outil :** le théorème de Pythagore.
   $ABCD$ est un rectangle, donc le triangle ABC est rectangle en B ; on connaît deux côtés et on cherche le troisième.

2. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
   $AC^2 = 24^2 + 10^2$
   $= 576 + 100$
   $= 676$
   $AC = \sqrt{676} = 26$ m.

3. **Outil :** la trigonométrie : le triangle ABC est rectangle et on cherche un angle.
   Par rapport à $\widehat{BAC}$, $[BC]$ est le côté opposé et $[AB]$ le côté adjacent : tangente.
   $\tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{10}{24}$, donc $\widehat{BAC} = \tan^{-1}\left(\dfrac{10}{24}\right) \approx 22{,}6°$.

Exercice 2 – Le support d'étagère ★

1. **Outil :** le théorème de Thalès.
   Les droites (AB) et (AC) se coupent en A, et $(MN) \parallel (BC)$: configuration de Thalès (triangles emboîtés).

2. M est sur $[AB]$: $AB = AM + MB = 30 + 20 = 50$ cm.

3. D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$, soit $\dfrac{30}{50} = \dfrac{MN}{60}$.
   $MN = \dfrac{30 \times 60}{50} = \dfrac{1\,800}{50} = 36$ cm.

Exercice 3 – Angle droit ou pas ? ★

1. **Outil :** la réciproque du théorème de Pythagore.
   On veut **prouver** un angle droit et on connaît les trois côtés.

2. Le plus grand côté est $[RT]$.
   D'une part : $RT^2 = 5{,}3^2 = 28{,}09$.
   D'autre part :
   $RS^2 + ST^2 = 2{,}8^2 + 4{,}5^2$
   $= 7{,}84 + 20{,}25$
   $= 28{,}09$
   Égalité : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en S.

3. **Outil :** la trigonométrie, maintenant que l'angle droit en S est démontré.
   Par rapport à $\widehat{STR}$, $[RS]$ est le côté opposé et $[ST]$ le côté adjacent : tangente.
   $\tan(\widehat{STR}) = \dfrac{2{,}8}{4{,}5}$, donc $\widehat{STR} \approx 31{,}9°$.

Exercice 4 – La pente du toit ★

1. **Outil :** la trigonométrie.
   Le triangle ABH est rectangle en H ; on connaît un angle ($35°$) et un côté ($BH = 8 \div 2 = 4$ m).

2. Par rapport à $\widehat{ABH}$, $[AH]$ est le côté opposé et $[BH]$ le côté adjacent : tangente.
   $\tan(35°) = \dfrac{AH}{4}$, donc $AH = 4 \times \tan(35°) \approx 2{,}8$ m.

3. Par rapport à $\widehat{ABH}$, $[AB]$ est l'hypoténuse et $[BH]$ le côté adjacent : cosinus.
   $\cos(35°) = \dfrac{4}{AB}$, donc $AB = \dfrac{4}{\cos(35°)} \approx 4{,}9$ m.

Exercice 5 – Le triangle et la perpendiculaire ★★

1. **Outil :** le théorème de Pythagore (triangle ABC rectangle en B, deux côtés connus).
   D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
   $AC^2 = 6^2 + 8^2$
   $= 36 + 64$
   $= 100$
   $AC = \sqrt{100} = 10$ cm.

2. (MN) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB) : elles sont parallèles.

3. **Outil :** le théorème de Thalès ($(MN) \parallel (BC)$, sécantes en A).
   $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$, soit $\dfrac{4{,}5}{6} = \dfrac{AN}{10} = \dfrac{MN}{8}$.
   $MN = \dfrac{4{,}5 \times 8}{6} = \dfrac{36}{6} = 6$ cm et $AN = \dfrac{4{,}5 \times 10}{6} = \dfrac{45}{6} = 7{,}5$ cm.

4. **Outil :** la trigonométrie (triangle ABC rectangle en B, angle cherché).
   Par rapport à $\widehat{BAC}$, $[BC]$ est opposé et $[AB]$ adjacent : $\tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{8}{6}$, donc $\widehat{BAC} \approx 53{,}1°$.

Exercice 6 – Prouver, puis calculer ★★

1. Non : aucun angle droit n'est codé ni donné.
   Il faut d'abord démontrer que le triangle est rectangle, avec la réciproque du théorème de Pythagore.

2. Le plus grand côté est $[DF]$.
   D'une part : $DF^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$.
   D'autre part :
   $DE^2 + EF^2 = 3{,}3^2 + 5{,}6^2$
   $= 10{,}89 + 31{,}36$
   $= 42{,}25$
   Égalité : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle DEF est rectangle en E.

3. **Outil :** la trigonométrie, dans le triangle DEF rectangle en E.
   Par rapport à $\widehat{EDF}$, $[EF]$ est opposé et $[DE]$ adjacent : $\tan(\widehat{EDF}) = \dfrac{5{,}6}{3{,}3}$, donc $\widehat{EDF} \approx 59{,}5°$.

4. Le triangle est rectangle en E : $[DE]$ et $[EF]$ sont une base et la hauteur associée.
   Aire $= \dfrac{DE \times EF}{2} = \dfrac{3{,}3 \times 5{,}6}{2} = 9{,}24$ cm².

Exercice 7 – Le papillon et l'angle ★★

1. **Outil :** le théorème de Thalès.
   A, O, C sont alignés, ainsi que B, O, D, et $(AB) \parallel (CD)$: configuration papillon de sommet O.

2. D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD}$, soit $\dfrac{3}{7{,}5} = \dfrac{2{,}4}{CD}$.
   $CD = \dfrac{7{,}5 \times 2{,}4}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$ cm.

3. **Outil :** le théorème de Pythagore : $(CD) \perp (AC)$, donc le triangle OCD est rectangle en C.
   D'après le théorème de Pythagore : $OD^2 = OC^2 + CD^2$.
   $OD^2 = 7{,}5^2 + 6^2$
   $= 56{,}25 + 36$
   $= 92{,}25$
   $OD = \sqrt{92{,}25} \approx 9{,}6$ cm.

4. **Outil :** la trigonométrie dans OCD rectangle en C.
   Par rapport à $\widehat{COD}$, $[CD]$ est opposé et $[OC]$ adjacent (valeurs exactes, pas l'arrondi de OD) :
   $\tan(\widehat{COD}) = \dfrac{6}{7{,}5}$, donc $\widehat{COD} \approx 38{,}7°$.

Exercice 8 – L'échelle contre le mur ★★

1. **Outil :** la trigonométrie.
   Le triangle PMH est rectangle en M (mur vertical, sol horizontal) ; on connaît un angle et l'hypoténuse.

2. Par rapport à $\widehat{MPH}$, $[MH]$ est opposé et $[PH]$ l'hypoténuse : sinus.
   $MH = 5 \times \sin(65°) \approx 4{,}5$ m.

3. $[PM]$ est le côté adjacent : cosinus.
   $PM = 5 \times \cos(65°) \approx 2{,}1$ m.

4. Opposé (4,8 m) et hypoténuse (5 m) : sinus.
   $\sin(\alpha) = \dfrac{4{,}8}{5}$, donc $\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{4{,}8}{5}\right) \approx 73{,}7°$.

Exercice 9 – Le parcours ★★★

1. **Outil :** le théorème de Pythagore (triangle ABC rectangle en B).
   D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
   $AC^2 = 12^2 + 9^2$
   $= 144 + 81$
   $= 225$
   $AC = \sqrt{225} = 15$ km.

2. **Outil :** la réciproque du théorème de Thalès (on veut prouver un parallélisme).
   On compare $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{8}{12}$ et $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{10}{15}$.
   Produits en croix : $8 \times 15 = 120$ et $12 \times 10 = 120$.
   Égaux, et $D \in [AB]$, $E \in [AC]$ (même ordre) : d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(DE) \parallel (BC)$.

3. **Outil :** le théorème de Thalès, puisque $(DE) \parallel (BC)$.
   $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC}$, soit $\dfrac{8}{12} = \dfrac{DE}{9}$, donc $DE = \dfrac{8 \times 9}{12} = \dfrac{72}{12} = 6$ km.

4. **Outil :** la trigonométrie (triangle ABC rectangle en B).
   Par rapport à $\widehat{BAC}$, $[BC]$ est opposé et $[AB]$ adjacent :
   $\tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{9}{12}$, donc $\widehat{BAC} \approx 36{,}9°$.

5. $CE = AC - AE = 15 - 10 = 5$ km.
   Total : $AB + BC + CE + ED + DA = 12 + 9 + 5 + 6 + 8 = 40$ km.

Exercice 10 – Le toboggan ★★★

1. **Outil :** le théorème de Pythagore : $[AB]$ est vertical et (BC) horizontal, donc ABC est rectangle en B.
   D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
   $AC^2 = 1{,}6^2 + 3^2$
   $= 2{,}56 + 9$
   $= 11{,}56$
   $AC = \sqrt{11{,}56} = 3{,}4$ m.

2. **Outil :** la trigonométrie.
   Par rapport à $\widehat{ACB}$, $[AB]$ est opposé et $[BC]$ adjacent :
   $\tan(\widehat{ACB}) = \dfrac{1{,}6}{3}$, donc $\widehat{ACB} \approx 28{,}1°$.

3. **Outil :** le théorème de Thalès.
   $[MN]$ et $[AB]$ sont verticaux, donc $(MN) \parallel (AB)$; les droites (CA) et (CB) se coupent en C.
   $\dfrac{CN}{CB} = \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{MN}{BA}$, soit $\dfrac{1{,}2}{3} = \dfrac{MN}{1{,}6}$, donc $MN = \dfrac{1{,}2 \times 1{,}6}{3} = \dfrac{1{,}92}{3} = 0{,}64$ m.

4. Avec la même égalité : $\dfrac{1{,}2}{3} = \dfrac{CM}{3{,}4}$, donc $CM = \dfrac{1{,}2 \times 3{,}4}{3} = \dfrac{4{,}08}{3} = 1{,}36$ m.

Exercice 11 – La voile ★★★

1. **Outil :** la réciproque du théorème de Pythagore (prouver un angle droit, trois côtés connus).
   Le plus grand côté est $[AC]$.
   D'une part : $AC^2 = 5{,}8^2 = 33{,}64$.
   D'autre part :
   $AB^2 + BC^2 = 4{,}2^2 + 4^2$
   $= 17{,}64 + 16$
   $= 33{,}64$
   Égalité : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

2. **Outil :** la trigonométrie, dans ABC rectangle en B.
   Par rapport à $\widehat{BAC}$, $[BC]$ est opposé et $[AB]$ adjacent :
   $\tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{4}{4{,}2}$, donc $\widehat{BAC} \approx 43{,}6°$.

3. **Outil :** la réciproque du théorème de Thalès.
   On compare $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3{,}15}{4{,}2}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4{,}35}{5{,}8}$.
   Produits en croix : $3{,}15 \times 5{,}8 = 18{,}27$ et $4{,}2 \times 4{,}35 = 18{,}27$.
   Égaux, et $M \in [AB]$, $N \in [AC]$: d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

4. **Outil :** le théorème de Thalès.
   $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$, soit $\dfrac{3{,}15}{4{,}2} = \dfrac{MN}{4}$, donc $MN = \dfrac{3{,}15 \times 4}{4{,}2} = \dfrac{12{,}6}{4{,}2} = 3$ m.

Exercice 12 – Trouve l'erreur ★★

Chaque élève s'est trompé d'outil ou l'a mal utilisé. Explique l'erreur, puis corrige (au dixième si besoin).

a) *Le triangle n'est pas rectangle : Pythagore ne s'applique pas.*
Troisième angle : $180° - 50° - 45° = 85°$.
Aucun angle n'est droit, donc on ne peut utiliser ni le théorème de Pythagore ni la trigonométrie.

b) *On ne sait pas encore que $(MN) \parallel (BC)$: il faut le démontrer d'abord.*
Réciproque : produits en croix $2 \times 6{,}5 = 13$ et $5 \times 2{,}6 = 13$, égaux, même ordre, donc $(MN) \parallel (BC)$.
Ensuite seulement, le théorème de Thalès donne $MN = \dfrac{2 \times 4}{5} = 1{,}6$ cm.

c) *La réciproque de Pythagore prouve un angle droit, pas un parallélisme.*
On utilise la réciproque du théorème de Thalès : produits en croix $3 \times 5 = 15$ et $7{,}5 \times 2 = 15$.
Égaux et même ordre : $(MN) \parallel (BC)$.

d) *L'arrondi de BC a été réutilisé : l'erreur se propage.*
On utilise les longueurs exactes : $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2}$ (ou $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$), donc $\widehat{ABC} \approx 26{,}6°$.

e) *Les deux longueurs ne sont pas dans la même unité.*
50 cm $= 0{,}5$ m : $\tan(\alpha) = \dfrac{0{,}5}{1{,}2}$, donc $\alpha \approx 22{,}6°$.

f) *Pour prouver qu'un triangle est rectangle, on cite la **réciproque** du théorème de Pythagore.*
D'une part $7{,}4^2 = 54{,}76$.
D'autre part :
$2{,}4^2 + 7^2$
$= 5{,}76 + 49$
$= 54{,}76$
Égalité : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle (l'angle droit est opposé au côté de 7,4 cm).

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Un triangle est rectangle ; on connaît deux côtés et on cherche le troisième. On utilise :

Réponse B : le théorème de Pythagore
Angle droit connu et longueurs : théorème de Pythagore.

2. On veut prouver qu'un triangle dont on connaît les trois côtés est rectangle. On utilise :

Réponse D : la réciproque du théorème de Pythagore

Prouver un angle droit : réciproque du théorème de Pythagore.

3. Dans un triangle rectangle, on connaît un angle aigu et un côté ; on cherche un autre côté. On utilise :

Réponse A : la trigonométrie

Un angle et des côtés dans un triangle rectangle : cosinus, sinus ou tangente.

4. Deux droites sécantes sont coupées par deux parallèles ; on cherche une longueur. On utilise :

Réponse C : le théorème de Thalès

Parallèles connues et longueur cherchée : théorème de Thalès.

5. On veut prouver que deux droites sont parallèles. On utilise :

Réponse C : la réciproque du théorème de Thalès

Prouver un parallélisme : réciproque du théorème de Thalès.

6. Un triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit 7 cm et 24 cm. L'angle opposé au côté de 7 cm mesure, au degré près :

Réponse A : $16°$

$\tan(\alpha) = \dfrac{7}{24}$, donc $\alpha \approx 16°$ ($74°$ est l'autre angle aigu).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).