Terminale spécialité / Vecteurs, droites et plans de l'espace

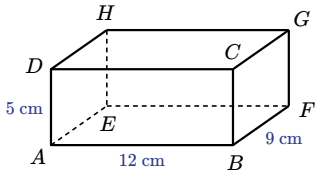
benprof particulier.fr

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 3e : géométrie dans l'espace*

À retenir : Cube coupé par un plan : un polygone (du triangle à l'hexagone), jamais un cercle. Deux faces opposées sont coupées selon deux droites parallèles. Sphère : $r^2 = R^2 - d^2$ (ex. $R = 5$, $d = 3$: $r = 4$). Sphère → cercle, boule → disque.

Ex. 1 ★☆☆ **Sections d'une poutre de charpente** — Une poutre de charpente a la forme du pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, avec $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm et $AE = 9$ cm. Pour chaque plan, donne la nature et les dimensions de la section du pavé.



(a) Un plan parallèle à la face $ABCD$.

(b) Un plan parallèle à la face $ABFE$.

(c) Un plan parallèle aux arêtes $[BC]$ et $[BF]$, qui coupe $[AB]$ en son milieu.

(d) Le plan qui contient les arêtes $[AE]$ et $[CG]$.

(e) Le plan qui contient les arêtes $[BC]$ et $[EH]$.

Ex. 2 ★☆☆ **Cylindre, sphère et boule** — Pour chaque solide coupé par un plan, donne la nature de la section, puis calcule ce qui est demandé.

(a) Un cylindre de rayon 6 cm et de hauteur 10 cm est coupé par un plan perpendiculaire à son axe. Donne l'aire exacte de la section, puis son arrondi au dixième.

(b) Le même cylindre est coupé par un plan qui contient son axe. Donne les dimensions de la section.

(c) Le même cylindre est coupé par un plan parallèle à son axe, situé à 3,6 cm de lui. Donne les dimensions de la section.

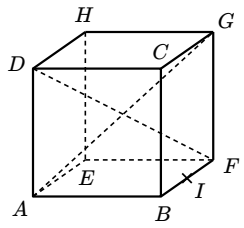
(d) Une sphère de centre O et de rayon 13 cm est coupée par un plan situé à 5 cm de O. Donne le rayon de la section.

(e) Une boule de rayon 25 cm est coupée par un plan situé à 7 cm de son centre. Donne le rayon et l'aire exacte de la section.

Ex. 2 (suite)

(f) Une sphère de rayon 4,5 cm est coupée par un plan situé à 4,5 cm de son centre, puis par un plan qui passe par son centre. Donne la nature de chaque section.

Ex. 3 ★★☆ **Lire un cube en perspective cavalière** — Le cube $ABCDEFGH$ est dessiné ci-dessous en perspective cavalière : la face avant est $ABCD$, et E, F, G, H sont derrière A, B, C, D. Le point I est le milieu de l'arête $[BF]$.



(a) Quel sommet du cube est caché ? Déduis-en les arêtes dessinées en pointillés.

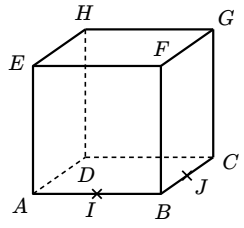
(b) Sur le dessin, les segments $[EF]$ et $[BC]$ se croisent. Les droites (EF) et (BC) sont-elles sécantes ? Justifie.

(c) Les droites (AB) et (HG) sont-elles coplanaires ? Et les droites (AB) et (CG) ? Justifie.

(d) Cite les deux faces du cube qui contiennent I. Faut-il tracer $[AI]$ en trait plein ou en pointillés ? Et $[CI]$? Justifie.

(e) Sur le dessin, les segments $[AG]$ et $[DF]$ se croisent aussi. Les droites (AG) et (DF) sont-elles sécantes ? Justifie.

Ex. 4 ★★☆ **Section d'une maquette cubique par le plan (IJG)** — Une maquette a la forme d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 cm. Sa face du bas est $ABCD$ et sa face du haut est $EFGH$, avec E au-dessus de A. I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$. On coupe le cube par le plan (IJG).



(a) Justifie que $[IJ]$ est un côté de la section. Cite ensuite les deux faces qui contiennent J, puis déduis-en un deuxième côté.

Ex. 4 **(suite)**

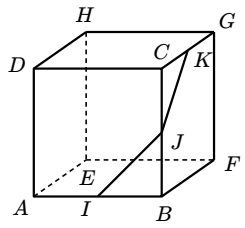
(b) Les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles. Déduis-en le côté de la section situé dans la face $EFGH$.

(c) Termine la construction de la section, puis donne sa nature. Justifie.

(d) Calcule les longueurs exactes IJ, EG et EI.

(e) Sur la figure, quel côté de la section faut-il tracer en pointillés ? Justifie.

Ex. 5 ★★★ **La plaque de verre d'un module de verrière** — Un module de verrière a la forme du cube $ABCDEFGH$ d'arête 4 cm dessiné ci-dessous : la face avant est $ABCD$, et E, F, G, H sont derrière A, B, C, D. Une plaque de verre passe par I, J et K, les milieux de $[AB]$, $[BC]$ et $[CG]$. On note M, N et P les milieux de $[GH]$, $[HE]$ et $[EA]$. On travaille dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$.



(a) Justifie que $[IJ]$ et $[JK]$ sont deux côtés de la section du cube par le plan (IJK). Précise les deux faces du cube qui contiennent J.

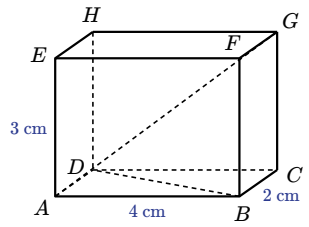
(b) Donne les coordonnées de I, J, K et M, puis démontre que M appartient au plan (IJK).

(c) Les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles. Déduis-en le côté de la section porté par la face $EFGH$, et démontre que N est une de ses extrémités.

(d) Avec les faces $BCGF$ et $ADHE$, démontre de la même façon que P est un sommet de la section. Termine la construction de la section en citant la face qui contient chaque côté.

(e) Donne la nature de la section, puis calcule son périmètre en cm
(valeur exacte, puis arrondi au centième).

Ex. 6 ★★★ **Les fils lumineux d'une vitrine de musée** — Une vitrine de musée a la forme du pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous. Sa base est $ABCD$, et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On a $AB = 4$ dm, $AD = 2$ dm et $AE = 3$ dm. On se place dans le repère $(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$. Lina tend des fils lumineux entre les sommets.



(a) Repère C, G et H sur la figure, puis donne leurs coordonnées.

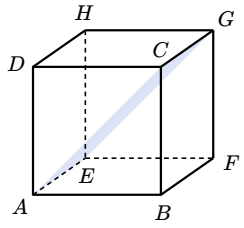
(b) Lina affirme : « $[AH]$ et $[BG]$ sont sur deux faces opposées et ne se touchent pas, donc les droites (AH) et (BG) sont non coplanaires. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Sur la figure, les fils $[AG]$ et $[BD]$ se croisent. Les droites (AG) et (BD) sont-elles sécantes ? Justifie, puis donne leur position relative.

(d) Déduis-en que les points A, B, D et G ne sont pas coplanaires.

(e) Étudie la position relative des droites (AG) et (EC). Si elles sont sécantes, donne les coordonnées de leur point d'intersection.

Ex. 7 ★★★ **Une pièce cube et cylindre dans un logiciel 3D** — Dans un logiciel 3D, Inès modélise une pièce : le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm ci-dessous (face avant $ABCD$, et E, F, G, H derrière A, B, C, D). Ce cube contient un cylindre dont les bases sont les disques inscrits dans les carrés $ABCD$ et $EFGH$. On note Ω et Ω' les centres de ces carrés : la droite $(\Omega\Omega')$ est l'axe du cylindre.



(a) Un plan parallèle à $ABCD$ passe par le milieu de $[AE]$. Donne la nature et les dimensions de la section du cube, puis de celle du cylindre. Calcule l'aire de la partie de la section du cube qui est hors du cylindre.

(b) Justifie que le plan $(ACGE)$ contient l'axe du cylindre. Donne la nature et les dimensions exactes de la section du cube, puis de celle du cylindre, par ce plan.

(c) Un plan parallèle à la face $ADHE$ coupe $[AB]$ en M, avec $AM = 1$ cm. Donne la nature des sections du cube et du cylindre, et calcule leurs dimensions.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Marius affirme : « Si on incline bien le plan, la section du cube peut être un disque, comme pour le cylindre. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Détermine la section du cube par le plan (BDE) en citant la face qui contient chaque côté. Donne sa nature et son périmètre
(valeur exacte, puis arrondi au centième).

2. *Vecteurs de l'espace, coordonnées, colinéarité et alignement*

À retenir : $\overrightarrow{AB}$: arrivée moins départ, sur les trois coordonnées. Colinéaires : le même k sur les trois coordonnées, cherché sur une coordonnée non nulle (ex. $(0\,;\,-6\,;\,4) = -2(0\,;\,3\,;\,-2)$). A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires.

Ex. 8 ★☆☆ **Vecteurs et milieux avec des négatifs** — Dans un repère de l'espace, on donne les points $P(-2\,;\,5\,;\,1)$, $Q(4\,;\,-1\,;\,-3)$ et $R(3\,;\,-4\,;\,6)$.

(a) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

(b) Donne les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{QP}$.

(c) Calcule les coordonnées du milieu M de $[PQ]$.

(d) Calcule les coordonnées du milieu L de $[PR]$.

(e) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{QR}$ et de $\overrightarrow{PR}$, puis vérifie que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

(f) Calcule les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Colinéaires ou pas ?** — On travaille dans un repère de l'espace. Les vecteurs et les points sont donnés dans chaque question.

(a) Exprime $\vec{v}(-6\,;\,4\,;\,-10)$ en fonction de $\vec{u}(3\,;\,-2\,;\,5)$.

(b) Lina affirme que $\vec{s}(4\,;\,-6\,;\,2)$ et $\vec{r}(6\,;\,-9\,;\,4)$ sont colinéaires, car $6 = \frac{3}{2} \times 4$ et $-9 = \frac{3}{2} \times (-6)$. A-t-elle raison ? Justifie.

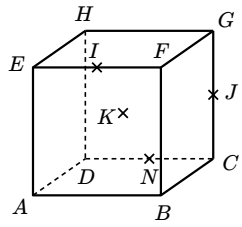
(c) Les vecteurs $\vec{a}(2\,;\,0\,;\,-3)$ et $\vec{b}(-4\,;\,1\,;\,6)$ sont-ils colinéaires ? Justifie.

(d) Les vecteurs $\vec{c}(0\,;\,5\,;\,-1)$ et $\vec{e}(0\,;\,-15\,;\,3)$ sont-ils colinéaires ? Justifie.

(e) Détermine le réel a tel que $\vec{w}(a\,;\,6\,;\,-9)$ soit colinéaire à $\vec{t}(-4\,;\,-2\,;\,3)$.

(f) Avec $A(1\,;\,2\,;\,-1)$, $B(4\,;\,0\,;\,3)$, $C(-2\,;\,5\,;\,0)$ et $D(4\,;\,1\,;\,8)$, les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Justifie.

Ex. 10 ★★☆ **Une maquette cubique** — Pour une maquette, Ben modélise un cube $ABCDEFGH$: face $ABCD$ en bas, E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Repère : $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I, J, N sont les milieux de $[EF]$, $[CG]$, $[DC]$ et K est le centre du cube (milieu de $[AG]$).



(a) Donne les coordonnées de C, D, E, F et G, puis calcule celles de I, J, K et N.

(b) À l'aide de la relation de Chasles, exprime $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

(c) Les points I, K et N sont-ils alignés ? Justifie.

(d) Les points I, J et N sont-ils alignés ? Justifie.

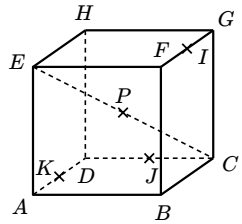
Ex. 11 ★★☆ **Ancrages alignés d'un câble** — Sur la maquette numérique d'un pont, un câble rectiligne passe par les points d'ancrage $A(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $B(5\,;\,1\,;\,-1)$, dans un repère de l'espace.

(a) On pose $C(m\,;\,5\,;\,-9)$, où m est un réel. Détermine m pour que les points A, B et C soient alignés.

(b) Pour $F(-1\,;\,-3\,;\,7)$, Noé écrit $\overrightarrow{BF}(6\,;\,4\,;\,8)$, le compare à $\overrightarrow{AB}$ et conclut que A, B, F ne sont pas alignés. Corrige son erreur et conclus.

(c) Existe-t-il un réel m tel que le point $D(m\,;\,3\,;\,m)$ soit sur la droite (AB) ? Justifie.

Ex. 12 ★★★ **Le centre du cube et ses alignements** — $ABCDEFGH$ est un cube : la face $ABCD$ est en bas, et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I, J, K sont les milieux de $[FG]$, $[CD]$, $[AD]$, et P est le point tel que $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$.



(a) À l'aide de la relation de Chasles, exprime $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Déduis-en les coordonnées de $\overrightarrow{EC}$.

(b) Donne les coordonnées de I, J, K, puis celles de P.

(c) Les points I, P, K sont-ils alignés ? Justifie.

(d) Les points I, P, J sont-ils alignés ? Justifie.

(e) Les droites (IK) et (DG) sont-elles parallèles ? Justifie.

Ex. 13 ★★★ **La trajectoire d'un drone de livraison** — Un drone de livraison doit voler en ligne droite. Dans un repère de l'espace (unité : 100 m), son logiciel enregistre trois positions : $A(-3\,;\,2\,;\,-1)$, $B(1\,;\,-4\,;\,1)$ et $C(9\,;\,-16\,;\,6)$.

(a) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

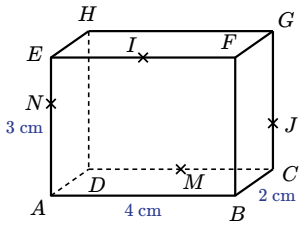
(b) Yanis écrit : « $12 = 3 \times 4$ et $-18 = 3 \times (-6)$, donc A, B, C sont alignés. » Ce raisonnement est-il correct ? Justifie.

(c) Détermine le réel m tel que les points A, B et $D(m\,;\,-1\,;\,m+1)$ soient alignés.

(d) Démontre qu'il n'existe aucun réel m tel que les points A, B et $E(m\,;\,5\,;\,2m)$ soient alignés.

(e) Pour un second drone, on donne $\vec{u}(0\,;\,3\,;\,-6)$ et $\vec{v}(0\,;\,-1\,;\,2)$. Sacha affirme : « Je ne peux pas calculer $\frac{0}{0}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. » Cette affirmation est-elle correcte ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Les points d'attache d'une verrière** — Une verrière a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$ ($ABCD$ au sol ; E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Dans un repère orthonormé d'origine A (unité : le mètre), on a $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,2\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,3)$. I et M sont les milieux de $[EF]$ et de $[DC]$. $J \in [CG]$ avec $CJ = \frac{1}{3}CG$, et $N \in [AE]$ avec $AN = \frac{2}{3}AE$.



(a) Donne les coordonnées de C, F, G, puis celles de I, J, M et N.

(b) À l'aide de la relation de Chasles, exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$. Vérifie ensuite avec les coordonnées.

(c) Calcule les coordonnées des milieux de $[IM]$ et de $[JN]$. Déduis-en la nature du quadrilatère $IJMN$.

(d) Vrai ou faux : les droites (IJ) et (EC) sont parallèles. Justifie.

(e) Ben veut fixer un spot en $R\left(m\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$. Détermine m pour que R appartienne à la droite (IJ).

3. *Vecteurs coplanaires, points coplanaires, bases et repères*

À retenir : Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont non colinéaires : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Deux équations donnent a et b, la troisième décide. Base $\Leftrightarrow$ non coplanaires. $(1\,;0\,;1)$, $(0\,;1\,;1)$, $(1\,;1\,;2)$: deux à deux non colinéaires, mais pas une base.

Ex. 15 ★★★ **Coplanaires ou base ?** — Dans un repère de l'espace, chaque question donne trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

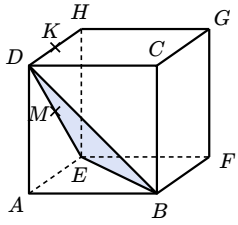
(a) $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,-1)$, $\vec{v}(3\,;\,0\,;\,2)$, $\vec{w}(-1\,;\,4\,;\,-4)$: trouve deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, puis conclus sur la coplanarité.

(b) $\vec{u}(2\,;\,-1\,;\,0)$, $\vec{v}(0\,;\,3\,;\,1)$, $\vec{w}(4\,;\,1\,;\,2)$: ces vecteurs sont-ils coplanaires ou forment-ils une base ? Justifie.

(c) $\vec{u}(1\,;\,-2\,;\,3)$, $\vec{v}(-2\,;\,4\,;\,-6)$, $\vec{w}(0\,;\,1\,;\,1)$: ces vecteurs forment-ils une base ? Justifie.

(d) Vrai ou faux ? « $\vec{u}(2\,;\,0\,;\,4)$, $\vec{v}(1\,;\,1\,;\,-1)$ et $\vec{w}(2\,;\,1\,;\,1)$ forment une base. » Justifie.

Ex. 16 ★★★ **La plaque de la maquette** — Inès fabrique une maquette en forme de cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Elle veut y coller une plaque triangulaire BDE. Dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$, on a $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$. On place aussi $K\left(0\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$, milieu de $[DH]$, et $M\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, centre de la face $ADHE$.



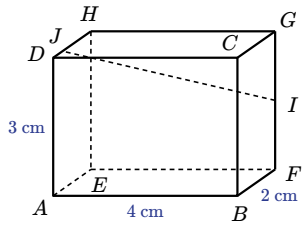
(a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.

(b) Les points B, D, E sont-ils alignés ? Justifie.

(c) Le point K appartient-il au plan (BDE) ? Justifie.

(d) Le point M appartient-il au plan (BDE) ? Justifie.

Ex. 17 ★★★ **Une pièce dans un logiciel 3D** — Dans un logiciel 3D, Nora modélise une pièce en forme de pavé $ABCDEFGH$ avec $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm et $AE = 2$ cm. Elle travaille dans le repère non orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I est le milieu de $[FG]$ et J est le point de $[DH]$ tel que $DJ = 0{,}5$ cm.



(a) Décompose $\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$ à l'aide de la relation de Chasles.

(b) Décompose $\overrightarrow{EC}$ dans cette base et donne ses coordonnées.

(c) Donne les coordonnées de F et de G, puis celles de I.

(d) Nora affirme que $J(0\,;\,1\,;\,0{,}5)$ car $DJ = 0{,}5$ cm. A-t-elle raison ? Justifie et corrige.

Ex. 17 (suite)

(e) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

Ex. 18 ★★☆ **Les câbles du pont** — Pour modéliser les câbles d'un pont, Théo utilise, dans un repère de l'espace, les vecteurs $\vec{u}(1\,;\,-1\,;\,0)$, $\vec{v}(0\,;\,2\,;\,1)$ et $\vec{w}(2\,;\,0\,;\,1)$. Il affirme : « Ces trois vecteurs sont deux à deux non colinéaires, donc ils forment une base de l'espace. »

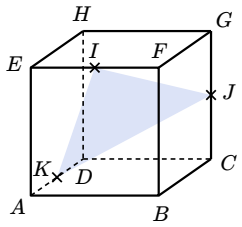
(a) Théo a-t-il raison ? Justifie.

(b) Pour un réel m, on pose $\vec{w}_m(2\,;\,m\,;\,3)$. Détermine m pour que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}_m$ soient coplanaires.

(c) On prend $m = 0$ et on note $\vec{t}(2\,;\,0\,;\,3)$. Démontre que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ est une base de l'espace.

(d) Décompose le vecteur $\vec{s}(3\,;\,3\,;\,5)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$.

Ex. 19 ★★★ **La vitre de la verrière** — Sacha conçoit une verrière en forme de cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 : $ABCD$ est la face du bas, E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Une vitre passe par I milieu de $[EF]$, J milieu de $[CG]$ et K milieu de $[AD]$. On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$.



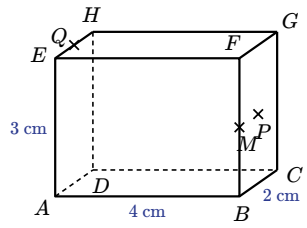
(a) Décompose $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$ avec la relation de Chasles, puis donne les coordonnées de I, J et K.

(b) Démontre que les points I, J et K définissent un plan.

(c) Le sommet G appartient-il au plan (IJK) ? Justifie.

(d) Pour un réel m de $[0\,;\,1]$, M est le point de $[DC]$ tel que $\overrightarrow{DM} = m\,\overrightarrow{DC}$. Détermine m pour que M appartienne au plan (IJK), puis précise la position de M.

Ex. 20 ★★★ **La charpente de Malik** — Malik dessine la charpente d'un abri en forme de pavé $ABCDEFGH$: $ABCD$ est le sol, E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D, avec $AB = 4$ m, $AD = 2$ m et $AE = 3$ m. P est le centre de la face $BCGF$, Q le milieu de $[EH]$ et M le milieu de $[BF]$. On travaille dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$.



(a) Ce repère n'est pas orthonormé. Décompose $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{AM}$ avec la relation de Chasles, puis donne les coordonnées de G, P, Q et M.

(b) Léo affirme : « $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont deux à deux non colinéaires, donc ils forment une base. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Démontre que $(\overrightarrow{AP},\,\overrightarrow{AQ},\,\overrightarrow{AG})$ est une base de l'espace.

(d) Décompose $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\overrightarrow{AP},\,\overrightarrow{AQ},\,\overrightarrow{AG})$.

Ex. 21 ★★★ **La toile de la tente** — Pour monter une tente, Lucie repère, dans un repère de l'espace, trois points d'attache de la toile : $A(1\,;\,2\,;\,0)$, $B(3\,;\,1\,;\,2)$ et $C(0\,;\,4\,;\,1)$. La lettre m désigne un nombre réel.

(a) Démontre que les points A, B et C définissent un plan.

(b) On note $D(2\,;\,m\,;\,m)$. Détermine m pour que D appartienne au plan (ABC).

(c) Vrai ou faux ? « Pour $\vec{v}(-4\,;\,2\,;\,-4)$, $\overrightarrow{AC}$ ne s'écrit pas $a\overrightarrow{AB} + b\vec{v}$, donc $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires. » Justifie.

(d) Pour $E(4\,;\,2\,;\,4)$, Yanis résout $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ avec les abscisses et les ordonnées. Il trouve $a = 2$ et $b = 1$, et conclut que $E \in (ABC)$. Corrige son erreur.

4. *Représentation paramétrique d'une droite*

À retenir : Les constantes donnent un point, les coefficients de t un vecteur directeur (non nul). $M \in (d)$ si un même t vérifie les trois équations. Ex. : $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3$ passe par $(1\,;\,0\,;\,3)$ et est dirigée par $(1\,;\,2\,;\,0)$.

Ex. 22 ★☆☆ **Lire et écrire une représentation paramétrique** — L'espace est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$.

(a) Donne un point et un vecteur directeur de la droite $\begin{cases} x = 2t \\ y = -7 \\ z = 6 - 5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Que remarques-tu sur l'ordonnée de ses points ?

Ex. 22 **(suite)**

(b) Donne le point de paramètre 0 et un vecteur directeur de la droite $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - t \\ y = 3t \\ z = -4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

(c) Pour la droite $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, Inès annonce le point $(-2\,;\,5\,;\,1)$ et le vecteur directeur $(4\,;\,-3\,;\,1)$. Corrige son erreur.

(d) Le système $\begin{cases} x = 3 + 0t \\ y = -1 + 0t \\ z = 2 + 0t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ représente-t-il une droite ? Justifie.

(e) Calcule les coordonnées du point de paramètre $t = -3$ de la droite $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

(f) Écris une représentation paramétrique de la droite passant par $P(0\,;\,-2\,;\,7)$ et dirigée par $\vec{w}\left(-3\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Ex. 23 ★☆☆ **Le drone est-il passé par là ?** — Dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$, un drone suit une trajectoire rectiligne $(d) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

(a) Le point $A(-3\,;\,5\,;\,4)$ appartient-il à (d) ? Justifie.

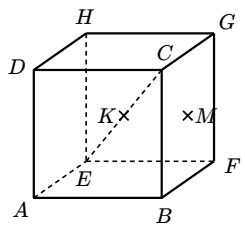
(b) Léo remarque que $t = -2$ donne $x = 5$ et $y = 1$. Il en conclut que $B(5\,;\,1\,;\,-7)$ appartient à (d). A-t-il raison ? Justifie.

(c) Détermine les coordonnées du point de (d) d'abscisse 6.

(d) Détermine les coordonnées du point où (d) coupe le plan (xOy), c'est-à-dire du point de (d) de cote nulle.

(e) Trouve le réel m pour que le point $E(m\,;\,0\,;\,-11)$ appartienne à (d).

Ex. 24 ★★☆ **La diagonale d'une maquette cubique** — Une maquette est un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. K est le centre du cube (milieu de $[AG]$) et M le centre de la face $BCGF$ (milieu de $[BG]$).



(a) Lis sur la figure les coordonnées de E et de C. Écris une représentation paramétrique de (EC) avec le point E et le vecteur $\overrightarrow{EC}$.

Ex. 24 **(suite)**

(b) Le point K appartient-il à la droite (EC) ? Justifie.

(c) Le point M appartient-il à la droite (EC) ? Justifie.

(d) Quelle valeur du paramètre donne le point C ? Déduis-en les valeurs de t qui décrivent le segment $[EC]$.

Ex. 25 ★★☆ **Trois saisies dans un logiciel 3D** — Dans un logiciel 3D, Maëlle saisit trois droites dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$: $(d_1) : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$; $(d_2) : \begin{cases} x = -1 + 6s \\ y = -2s \\ z = 2 + 4s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$; $(d_3) : \begin{cases} x = 5 - 6s \\ y = -2 + 2s \\ z = 7 - 4s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.

(a) Donne un point et un vecteur directeur de (d_1), puis de (d_2).

(b) Les représentations de (d_1) et (d_2) décrivent-elles la même droite ? Justifie.

(c) Les représentations de (d_1) et (d_3) décrivent-elles la même droite ? Justifie.

(d) Vrai ou faux ? Le point de paramètre $t = 3$ sur (d_1) est aussi le point de paramètre $s = 3$ sur (d_2). Justifie.

(e) Écris une nouvelle représentation paramétrique de (d_1) qui utilise le point de paramètre $t = 2$ et un vecteur directeur d'abscisse -3.

Ex. 26 ★★★ **Un câble de pont, plusieurs écritures** — Dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$, un câble de pont suit la droite (AB) avec $A(3\,;\,-2\,;\,5)$ et $B(-1\,;\,4\,;\,-3)$. Le tablier du pont est dans le plan $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, formé des points de cote nulle.

(a) Écris une représentation paramétrique de (AB) de point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, puis donne le point C de (AB) d'abscisse 0.

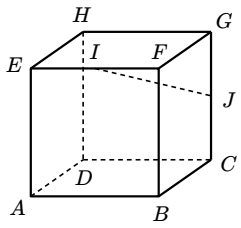
(b) Le câble traverse le plan $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ en un point T. Calcule les coordonnées de T. Le point T est-il situé entre A et B ? Justifie.

(c) Yanis écrit $(d') : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 1 - 3s \\ z = 1 + 4s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$ et affirme : « les écritures sont différentes, donc $(d') \neq (AB)$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(d) Lina remplace la constante 1 de y par 2 dans (d'), ce qui donne (d''). Détermine la position relative de (d'') et (AB). Justifie.

(e) Dans ta représentation de (AB), remplace t par $2t - 1$. Justifie que le système obtenu représente encore (AB) et donne les valeurs de t qui donnent A et B.

Ex. 27 ★★★ **Une barre de verrière dans un cube** — Un module de verrière est un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 : $ABCD$ est la face du bas, et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I est le milieu de $[EF]$ et J celui de $[CG]$. Une barre suit la droite (IJ). On pose $\vec{w}(1\,;\,2\,;\,-1)$.



(a) Lis les coordonnées de E, F, C et G. Déduis-en celles de I, de J et du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

(b) Justifie que $\vec{w}$ dirige (IJ), puis écris une représentation paramétrique de (IJ) de point I et de vecteur directeur $\vec{w}$.

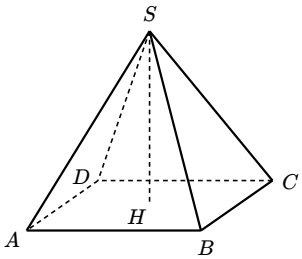
(c) Pour quelles valeurs du réel m le vecteur $\vec{u}_m(m-1\,;\,2m-2\,;\,1-m)$ est-il un vecteur directeur de (IJ) ? Justifie.

(d) Avec ta représentation, pour quelles valeurs de t le point obtenu est-il sur le segment $[IJ]$? Déduis-en le milieu de $[IJ]$, puis vérifie avec la formule du milieu.

(e) Détermine le point L où (IJ) coupe le plan (ADE). Le point L est-il sur la face $ADHE$ du cube ? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **La charpente pyramidale** — Une charpente $SABCD$ est modélisée dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ par $A(2\,;\,-2\,;\,0)$, $B(2\,;\,2\,;\,0)$, $C(-2\,;\,2\,;\,0)$, $D(-2\,;\,-2\,;\,0)$ et $S(0\,;\,0\,;\,4)$. Pour la poutre (SA), Noé prend le point S et le vecteur $\overrightarrow{SA}$, puis il écrit

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = -4 + 4t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$



(a) Calcule $\overrightarrow{SA}$, puis explique l'erreur de Noé. Quelle droite son système représente-t-il en réalité ? Justifie.

(b) Écris une représentation paramétrique correcte de (SA). Un entrait est fixé sur $[SA]$ au point P de cote 1 : calcule les coordonnées de P.

(c) Une poutre (δ) passe par P et est parallèle à (AB). Écris une représentation paramétrique de (δ). Que remarques-tu sur ses abscisses et ses cotes ?

Ex. 28 **(suite)**

(d) Zoé écrit $(SB) : x = 2t,\ y = 2t,\ z = 4 - 4t$. Elle garde le même t que pour (δ), trouve une contradiction et conclut que (δ) ne touche pas (SB). Corrige-la et conclus.

5. *Représentation paramétrique d'un plan*

À retenir : verif plan-06 complétée

Ex. 29 ★★★ **Écrire la représentation paramétrique d'un plan** — L'espace est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$. Avant d'écrire un plan, vérifie que ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ou que ses trois points ne sont pas alignés. Utilise deux paramètres λ et μ.

(a) Écris une représentation paramétrique du plan passant par $A(2\,;\,-1\,;\,3)$ et dirigé par $\vec{u}(1\,;\,0\,;\,2)$ et $\vec{v}(0\,;\,1\,;\,-1)$.

(b) Les vecteurs $\vec{u}(2\,;\,-6\,;\,4)$ et $\vec{v}(-1\,;\,3\,;\,-2)$ dirigent-ils un plan passant par $B(0\,;\,4\,;\,-2)$? Justifie.

(c) Avec $E(1\,;\,2\,;\,0)$, $F(3\,;\,1\,;\,1)$ et $G(-1\,;\,5\,;\,2)$, écris une représentation paramétrique du plan (EFG), si ce plan existe.

(d) Avec $K(1\,;\,0\,;\,2)$, $L(2\,;\,2\,;\,1)$ et $M(4\,;\,6\,;\,-1)$, écris une représentation paramétrique du plan (KLM), si ce plan existe.

(e) Écris une représentation paramétrique du plan passant par $D\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,-1\right)$ et dirigé par $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 3\vec{\imath} + \vec{k}$.

Ex. 30 ★★★ **Un drone de tournage dans un plan** — Dans un repère de l'espace, un drone de tournage reste dans le plan $\mathcal{P} : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda + \mu \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda - 2\mu \end{cases}, \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Le point $P_1(0\,;\,4\,;\,5)$ appartient-il à $\mathcal{P}$? Justifie.

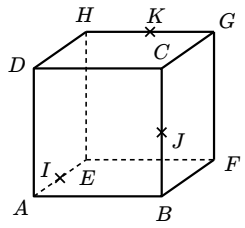
(b) Le point $P_2\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ appartient-il à $\mathcal{P}$? Justifie.

(c) Pour $P_3(4\,;\,1\,;\,-1)$, Élise tire $\lambda = 2$ de y, puis $\mu = 1$ de x, et conclut : $P_3 \in \mathcal{P}$. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Calcule les coordonnées du point de $\mathcal{P}$ obtenu pour $\lambda = 2$ et $\mu = -1$.

(e) Détermine le réel c tel que $Q(-2\,;\,4\,;\,c)$ appartienne à $\mathcal{P}$.

Ex. 31 ★★☆ **Une pièce cubique dans un logiciel 3D** — Léna modélise une pièce dans un logiciel 3D : c'est le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 ci-dessous, dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. Les points I, J, K sont les milieux de $[AE]$, $[BC]$ et $[GH]$.



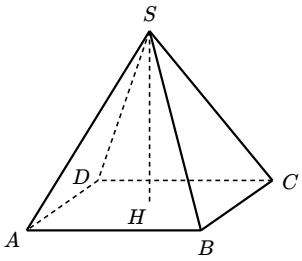
(a) Donne les coordonnées de I, J et K dans ce repère.

(b) Démontre que I, J, K ne sont pas alignés, puis écris une représentation paramétrique du plan (IJK).

(c) Le centre $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ du cube appartient-il au plan (IJK) ? Justifie.

(d) Détermine le réel m tel que le point $M(1\,;\,1\,;\,m)$ de l'arête $[CG]$ appartienne à (IJK). Que représente M pour $[CG]$?

Ex. 32 ★★☆ **La maquette d'une tente** — Ben fabrique la maquette d'une tente : c'est une pyramide $SABCD$ à base carrée. Dans un repère orthonormé, $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $C(4\,;\,4\,;\,0)$, $D(0\,;\,4\,;\,0)$ et $S(2\,;\,2\,;\,4)$. Aux questions b) à e), dis si l'affirmation est vraie ou fausse, et justifie.



(a) Démontre que A, B, S ne sont pas alignés, puis écris une représentation paramétrique du plan (SAB) passant par A.

(b) Affirmation : le système $\begin{cases} x = 4 + \lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = 2\mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, est aussi une représentation paramétrique de (SAB).

(c) Affirmation : la droite (d) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est incluse dans le plan (SAB).

(d) Affirmation : le plan $\mathcal{P}$ parallèle à (SAB) passant par C contient le point $T(0\,;\,6\,;\,4)$.

(e) Affirmation de Noah : les plans (SCD) et (SAB) sont parallèles.

Ex. 33 ★★★ **Deux représentations pour une verrière** — Dans un repère de l'espace, une verrière est contenue dans le plan $\mathcal{P}_1$: $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

L'architecte, Sofia, utilise le plan $\mathcal{P}_2$:
$\begin{cases} x = 4 + 3\lambda' - \mu' \\ y = 1 - \lambda' - \mu' \\ z = 2 + 2\lambda' \end{cases}$, $(\lambda', \mu') \in \mathbb{R}^2$.

(a) Lis sur la représentation de $\mathcal{P}_1$ un point A et deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$. Justifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent bien un plan.

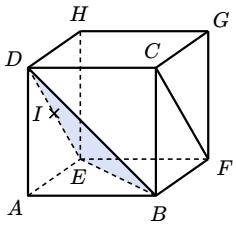
(b) Inès écrit $\mathcal{P}_1$ avec un seul paramètre : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Explique son erreur. Quel ensemble a-t-elle décrit ?

(c) Démontre que le point $B(4\,;\,1\,;\,2)$ de $\mathcal{P}_2$ appartient à $\mathcal{P}_1$.

(d) Lis deux vecteurs \vec{u}\,' et \vec{v}\,' qui dirigent $\mathcal{P}_2$, puis démontre que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondus.

(e) Détermine le réel m tel que la droite (δ) passant par B et dirigée par $\vec{w}(m\,;\,2\,;\,1)$ soit parallèle à $\mathcal{P}_1$. Donne alors la position de (δ) par rapport à $\mathcal{P}_1$.

Ex. 34 ★★★ **La charpente d'un abri cubique** — Hugo dessine la charpente d'un abri : c'est le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 ci-dessous, dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. Ainsi $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et $H(0\,;\,1\,;\,1)$. Une plaque de renfort occupe le triangle BDE. I est le milieu de $[DE]$.



(a) Donne les coordonnées de B, D, E. Démontre que B, D, E ne sont pas alignés, puis écris une représentation paramétrique de (BDE) avec B, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.

(b) Décompose $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$. Qu'en déduis-tu pour $\overrightarrow{CF}$ et la direction de (BDE) ?

(c) Démontre que la droite (d) passant par I et dirigée par $\overrightarrow{CF}$ est incluse dans (BDE).

(d) Tom affirme : « $\overrightarrow{CF}$ est dans la direction de (BDE), donc la droite (CF) est incluse dans (BDE). » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Écris une représentation paramétrique du plan $\mathcal{Q}$ passant par C et parallèle à (BDE). Démontre que F et H appartiennent à $\mathcal{Q}$, puis déduis-en la position de (CFH) et (BDE).

Ex. 35 ★★★ **La nappe de câbles d'un pont** — Dans un repère orthonormé de l'espace, la nappe de câbles d'un pont à haubans est contenue dans le plan (ABC), avec $A(2\,;\,0\,;\,1)$, $B(4\,;\,1\,;\,0)$ et $C(1\,;\,2\,;\,3)$. Un câble de secours suit la droite (Δ) passant par $E(0\,;\,1\,;\,-1)$ et dirigée par $\vec{w}(1\,;\,1\,;\,1)$.

(a) Démontre que A, B, C ne sont pas alignés, puis écris une représentation paramétrique du plan (ABC).

(b) Détermine le réel m tel que le point $D(m\,;\,5\,;\,2)$ soit dans le plan (ABC).

(c) Démontre que $\vec{w}$ ne s'écrit pas $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Déduis-en que (Δ) est sécante à (ABC).

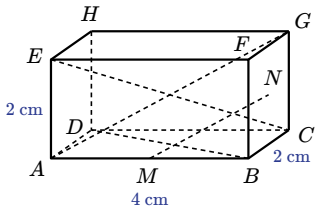
(d) Détermine les coordonnées du point d'intersection K de (Δ) et de (ABC).

(e) Malo résout les deux premières équations pour $G(3\,;\,3\,;\,3)$ et conclut que $G \in (ABC)$. Corrige-le, puis donne la position de la droite passant par G et dirigée par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ par rapport à (ABC).

6. *Positions relatives de droites et de plans*

À retenir : Droites : directeurs colinéaires → parallèles (tester un point : confondues ou non) ; sinon système en t et s : sécantes ou non coplanaires. Droite et plan : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$? Ex. $(3\,;1\,;5) = 3(1\,;0\,;1) + (0\,;1\,;2)$: parallèles.

Ex. 36 ★☆☆ **Câbles d'un pont : parallèles ou non ?** — La maquette d'une travée de pont a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$: $ABCD$ est la face du bas et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Dans le repère orthonormé $(A\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$, on a $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,2\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,2)$. Des câbles sont tendus selon (AG), (EC) et (BD). M est le milieu de $[AB]$ et N le centre de la face $BCGF$.



(a) Donne les coordonnées des points C, G, M et N.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont-ils colinéaires ? Justifie.

(c) Démontre que $(MN) \parallel (AG)$. Ces droites sont-elles strictement parallèles ou confondues ? Justifie.

(d) La droite (d) passe par $P\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et est dirigée par $\vec{v}(-6\,;\,-3\,;\,-3)$. Détermine la position relative de (d) et (AG).

(e) Nora affirme : « (AG) et (BD) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 37 ★★☆ **Une face de pièce dans un logiciel 3D** — Dans un logiciel 3D, une face d'une pièce est portée par le plan $\mathcal{P} : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \mu \\ z = -1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On note $\vec{u}(1\,;\,0\,;\,2)$ et $\vec{v}(0\,;\,1\,;\,-1)$. On donne $\vec{w_1}(2\,;\,3\,;\,1)$ et $\vec{w_2}(1\,;\,2\,;\,3)$.

(a) Le vecteur $\vec{w_1}$ s'écrit-il $a\vec{u} + b\vec{v}$? Justifie.

(b) Le vecteur $\vec{w_2}$ s'écrit-il $a\vec{u} + b\vec{v}$? Justifie.

(c) La droite (d_1) passe par $B(3\,;\,3\,;\,0)$ et est dirigée par $\vec{w_1}$. Est-elle incluse dans $\mathcal{P}$ ou strictement parallèle à $\mathcal{P}$? Justifie.

(d) La droite (d_2) passe par $E(3\,;\,-2\,;\,3)$ et est dirigée par $\vec{w_1}$. Est-elle incluse dans $\mathcal{P}$ ou strictement parallèle à $\mathcal{P}$? Justifie.

(e) La droite (d_3) passe par $C(3\,;\,1\,;\,-3)$ et est dirigée par $\vec{w_2}$. Calcule les coordonnées de son point d'intersection avec $\mathcal{P}$.

Ex. 38 ★★☆ **Trajectoires de drones** — Trois drones suivent des trajectoires rectilignes (les paramètres ne représentent pas le temps). $(d_1) : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $(d_2) : \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 2 + s \\ z = 1 - s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$, $(d_3) : \begin{cases} x = r \\ y = 1 \\ z = 5 + 2r \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}$.

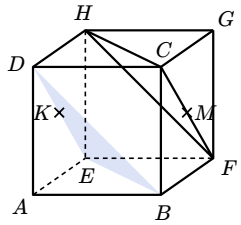
(a) Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ? Justifie.

(b) Léo écrit $-1 + 2t = 4 + t$ et $3 - t = 2 + t$. Il trouve $t = 5$, puis $-2 \neq 7$, et conclut que les trajectoires ne se coupent pas. Explique son erreur.

(c) Détermine la position relative de (d_1) et (d_2). Vérifie le point obtenu dans les deux représentations.

(d) Détermine la position relative de (d_2) et (d_3).

Ex. 39 ★★☆ **Plans dans une verrière cubique** — Une verrière a la forme d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$, où $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et $G(1\,;\,1\,;\,1)$. K est le milieu de $[AH]$ et M le centre de la face $BCGF$.



(a) Démontre que les plans (BDE) et (CFH) sont strictement parallèles.

(b) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est-il dans la direction de (BDE) ? Justifie, puis déduis-en la position relative de (BDE) et (ABG).

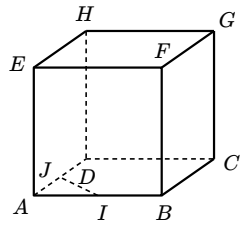
Ex. 39 **(suite)**

(c) Démontre que K appartient aux plans (BDE) et (ABG). Déduis-en leur droite d'intersection.

(d) Démontre que M appartient aux plans (BDG) et (CFH) et que $C \notin (BDG)$. Déduis-en que ces plans sont sécants.

(e) À l'aide du théorème du toit, détermine la droite Δ d'intersection de (BDG) et (CFH).

Ex. 40 ★★★ **Module de charpente : théorème du toit et section** — Un module de charpente a la forme d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. $ABCD$ est la face du bas et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On se place dans le repère $(A\,;\,\vec{AB},\,\vec{AD},\,\vec{AE})$. I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AD]$.



(a) Donne les coordonnées de I, J et H, puis démontre que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.

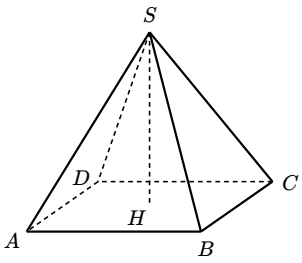
(b) Démontre que I n'appartient pas au plan (BDH), puis justifie que les plans (HIJ) et (BDH) sont sécants.

(c) À l'aide du théorème du toit, détermine la droite d'intersection Δ des plans (HIJ) et (BDH).

(d) Confirme ce résultat en décomposant un vecteur, puis donne la nature de la section du cube par le plan (HIJ).

(e) Démontre que la droite (CE) coupe le plan (HIJ), puis calcule les coordonnées de leur point d'intersection.

Ex. 41 ★★★ **Tente pyramidale : plans, mât et intersection** — Une tente a la forme d'une pyramide $SABCD$ à base carrée. Dans un repère orthonormé $(A\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$, on a $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $C(4\,;\,4\,;\,0)$, $D(0\,;\,4\,;\,0)$ et $S(2\,;\,2\,;\,4)$. M, N et Q sont les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SD]$.



(a) Nina écrit pour le plan (SBC) :
$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda + \mu \\ z = -2 + 4\lambda - 2\mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. A-t-elle raison ? Justifie, puis écris une représentation correcte.

Ex. 41 **(suite)**

(b) Vrai ou faux : la droite (MQ) est strictement parallèle au plan (SBC). Justifie.

(c) Un mât part du milieu K de $[AD]$ et il est dirigé par $\vec{w}(1\,;\,0\,;\,1)$. Démontre qu'il coupe le plan (SBC), puis calcule le point d'intersection.

(d) Les plans (MNQ) et (SBC) sont-ils parallèles ? Justifie, puis détermine leur position relative précise.

Ex. 42 ★★★ **Faisceaux laser et paramètre m** — Lors d'un spectacle, des faisceaux laser suivent des droites. Dans un repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ de l'espace et pour un réel m, on donne
$(d_1) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $(\Delta_m) : \begin{cases} x = m + 2s \\ y = 1 + s \\ z = -1 + s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$.

(a) On donne $(d_2) : \begin{cases} x = 3 - 2r \\ y = 2r \\ z = 7 - 4r \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}$. Détermine la position relative de (d_1) et (d_2).

(b) Démontre que (d_1) et (Δ_m) ne sont jamais parallèles. Détermine ensuite m pour qu'elles soient sécantes, ainsi que leur point commun.

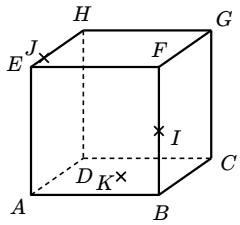
(c) Pour $m = 0$, Léa ne trouve aucun point commun à (d_1) et (Δ_0). Elle conclut : « donc $(d_1) \parallel (\Delta_0)$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Soit $\mathcal{P} : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = 1 - \mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Détermine la position relative de (d_1) et de $\mathcal{P}$.

7. *Sujets type bac*

À retenir : Repère lié au cube : lis chaque sommet, puis place les points sur les arêtes ($\vec{EJ} = \frac{1}{4}\vec{EH}$). Un point est sur l'arête si son paramètre est dans $[0\,;\,1]$. Pour deux droites, prends t et s et teste la troisième équation.

Ex. 43 ★☆☆ **Lire un cube de bac : sommets, milieux et quarts** — Nadia modélise une verrière cubique $ABCDEFGH$ d'arête 1. $ABCD$ est la face du bas et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On se place dans le repère $(A\,;\,\vec{AB},\,\vec{AD},\,\vec{AE})$. I est le milieu de $[BF]$. J est le point de $[EH]$ tel que $\vec{EJ} = \frac{1}{4}\vec{EH}$. K est le centre de la face $ABCD$.



(a) Donne les coordonnées de C et de G.

Ex. 43 **(suite)**

(b) Donne les coordonnées de I.

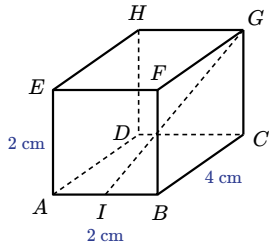
(c) Donne les coordonnées de J.

(d) Donne les coordonnées de K.

(e) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$.

(f) Calcule les coordonnées du milieu M de $[GK]$.

Ex. 44 ★☆☆ **Une droite dans un pavé : sur la droite ou sur le segment ?** — Tom dessine une pièce dans un logiciel 3D : un pavé $ABCDEFGH$. $ABCD$ est la face du bas et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Dans un repère orthonormé d'origine A, on a $B(2\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,4\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,2)$. I est le milieu de $[AB]$.



(a) Donne les coordonnées de G et de I.

(b) Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{IG}$.

(c) Écris une représentation paramétrique de la droite (IG), de paramètre t, passant par I.

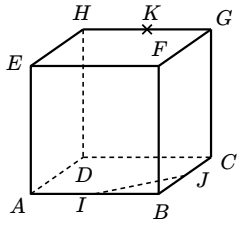
(d) Le point $M\left(\frac{3}{2}\,;\,2\,;\,1\right)$ appartient-il à (IG) ? Justifie.

(e) Pour $N\left(\frac{5}{2}\,;\,6\,;\,2\right)$, Lou trouve $t = \frac{3}{2}$ avec x et avec y. Lou en conclut que $N \in (IG)$. Ce raisonnement est-il juste ? Justifie.

(f) Le point $P(3\,;\,8\,;\,4)$ appartient-il au segment $[IG]$? Justifie.

(g) Donne les coordonnées du point de (IG) obtenu pour $t = -\frac{1}{2}$.

Ex. 45 ★★☆ **Section d'un cube par le plan (IJK), arête par arête** — Inès conçoit une vitre plane qui traverse un atelier cubique $ABCDEFGH$ d'arête 1. $ABCD$ est la face du bas et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I, J, K sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$ et $[GH]$. On cherche la section du cube par le plan (IJK).



(a) Donne les coordonnées de I, J et K, puis justifie que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires.

Ex. 45 **(suite)**

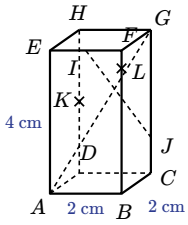
(b) Déduis-en une représentation paramétrique du plan (IJK), de paramètres λ et μ.

(c) La droite (CG) a pour représentation paramétrique $x = 1$, $y = 1$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Détermine son point d'intersection L avec (IJK). Le point L est-il sur l'arête $[CG]$?

(d) La droite (DH) a pour représentation paramétrique $x = 0$, $y = 1$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Le plan (IJK) coupe-t-il l'arête $[DH]$? Justifie.

(e) On admet que (IJK) coupe $[EH]$ en son milieu M et $[AE]$ en son milieu N. Démontre que $(IJ) \parallel (KM)$, puis donne la nature de la section.

Ex. 46 ★★☆ **Maquette d'une tour : alignement, droites, plan et coplanarité** — Malik construit la maquette d'une tour : un pavé $ABCDEFGH$. $ABCD$ est la face du bas et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Dans un repère orthonormé d'origine A, on a $B(2\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,2\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,4)$. I est le milieu de $[EF]$. J est le point de $[CG]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$. K est le milieu de $[DH]$. Enfin, $L\left(2\,;\,0\,;\,\frac{7}{2}\right)$.



(a) Donne les coordonnées de G, I, J et K.

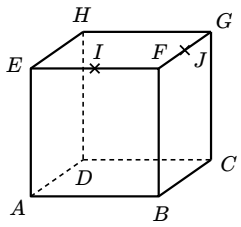
(b) Les points A, I et G sont-ils alignés ? Justifie.

(c) Détermine une représentation paramétrique de (IJ) et une de (AG), puis étudie leur position relative.

(d) Le plan (ABC) passe par A et est dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Justifie que (IJ) coupe ce plan, puis détermine leur point d'intersection R.

(e) Démontre que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Ex. 47 ★★★ **Une plaque dans un abri cubique : section construite pas à pas** — Yanis modélise la charpente d'un abri cubique $ABCDEFGH$ d'arête 1. $ABCD$ est la face du bas et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$. I est le milieu de $[EF]$ et J celui de $[FG]$. Une plaque plane suit le plan (DIJ).



(a) Donne les coordonnées de D, I et J, puis justifie que les points D, I, J définissent un plan.

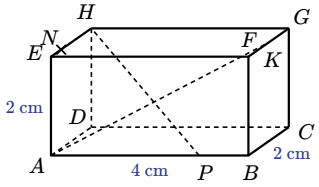
(b) Démontre que $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda - \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique du plan (DIJ).

(c) À l'aide d'une représentation paramétrique de (AE) puis de (CG), détermine les points M et N où ces droites coupent le plan (DIJ). Sont-ils sur les arêtes $[AE]$ et $[CG]$? Justifie.

(d) Lina affirme : « La droite (BF) coupe le plan (DIJ), donc la plaque traverse l'arête $[BF]$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Construis la section du cube par le plan (DIJ) : donne ses sommets et sa nature, puis justifie que $(MI) \parallel (DN)$ et que $(MD) \parallel (JN)$.

Ex. 48 ★★★ **Trois drones dans un hangar : croisement ou pas ?** — Léa programme trois drones dans un hangar en forme de pavé $ABCDEFGH$. $ABCD$ est le sol et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Dans un repère orthonormé d'origine A, on a $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,2\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,2)$. K est le milieu de $[FG]$, $N \in [EH]$ vérifie $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$ et $P \in [AB]$ vérifie $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Le drone 1 suit (AK), le drone 2 suit (PH) et le drone 3 suit la droite (d) passant par N, de vecteur directeur $\vec{w}(2\,;\,0\,;\,-1)$.



(a) Donne les coordonnées de F, G et H, puis celles de K, N et P.

(b) Écris une représentation paramétrique de (AK), de paramètre t, et une représentation paramétrique de (PH), de paramètre s.

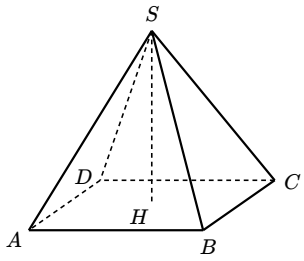
Ex. 48 **(suite)**

(c) Détermine la position relative de (AK) et (PH). Les trajectoires des drones 1 et 2 se coupent-elles ? Justifie.

(d) Hugo écrit (d) avec le même paramètre t que (AK). Il obtient $4t = 2t$, donc $t = 0$, puis $0 = \frac{1}{2}$. Il conclut que les trajectoires 1 et 3 ne se coupent pas. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Démontre que la droite (d) est incluse dans le plan (BCH).

Ex. 49 ★★★ **Une bâche dans une tente pyramidale : intersection et théorème du toit** — Rayan monte une tente en forme de pyramide $SABCD$ à base carrée. Dans un repère orthonormé d'origine A, on a $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $C(4\,;\,4\,;\,0)$, $D(0\,;\,4\,;\,0)$ et $S(2\,;\,2\,;\,4)$. I et J sont les milieux de $[SA]$ et $[SB]$. K est le point de $[SC]$ tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SC}$. Une bâche plane suit le plan (IJK).



(a) Donne les coordonnées de I, J et K. Justifie que $(IJ) \parallel (AB)$ et que les points I, J, K définissent un plan.

(b) Écris une représentation paramétrique du plan (IJK), puis une représentation paramétrique de la droite (SD), de paramètre s.

(c) Détermine le point d'intersection L de la droite (SD) et du plan (IJK). Justifie que L appartient au segment $[SD]$.

(d) Démontre que $(KL) \parallel (CD)$ à l'aide du théorème du toit.

(e) Déduis-en la nature de la section $IJKL$ de la pyramide par le plan (IJK). Justifie en comparant $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.