Terminale spécialité / Vecteurs, droites et plans de l'espace — corrigé

benprof particulier.fr

1. Rappels de 3e : géométrie dans l'espace

Ex. 1 ★☆☆ Sections d'une poutre de charpente

(a) Un plan parallèle à la face $ABCD$ donne un rectangle de mêmes dimensions que cette face : 12 cm sur 5 cm.

(b) Un plan parallèle à la face $ABFE$ donne un rectangle de $AB = 12$ cm sur $AE = 9$ cm.

(c) Les droites (BC) et (BF) sont sécantes en B et contenues dans la face $BCGF$. Le plan, parallèle à ces deux droites, est donc parallèle à cette face. La section est un rectangle de $BC = 5$ cm sur $BF = AE = 9$ cm.

(d) La section est le rectangle $ACGE$. Le triangle ABC est rectangle en B, donc $AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ et $AC = 13$ cm. La section est un rectangle de 13 cm sur 9 cm.

(e) Les arêtes $[BC]$ et $[EH]$ sont parallèles, donc la section est le rectangle $BCHE$. Le triangle ABE est rectangle en A, donc $BE^2 = 12^2 + 9^2 = 225$ et $BE = 15$ cm. La section est un rectangle de 15 cm sur 5 cm.

Ex. 2 ★☆☆ Cylindre, sphère et boule

(a) Le plan est perpendiculaire à l'axe, donc la section est un disque de rayon 6 cm. Son aire vaut $\pi \times 6^2 = 36\pi$ cm², soit environ 113,1 cm².

(b) Le plan est parallèle à l'axe, donc la section est un rectangle. Il contient l'axe, donc ce rectangle mesure $2 \times 6 = 12$ cm sur 10 cm.

(c) Le plan est parallèle à l'axe, donc la section est un rectangle de hauteur 10 cm. La demi-corde vérifie $\ell^2 = 6^2 - 3{,}6^2 = 36 - 12{,}96 = 23{,}04$, donc $\ell = 4{,}8$ cm. La section est un rectangle de 9,6 cm sur 10 cm.

(d) La section est un cercle. On a $r^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, donc $r = 12$ cm.

(e) La section est un disque (le solide est une boule). On a $r^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576$, donc $r = 24$ cm. Son aire vaut 576π cm².

(f) Dans le premier cas, $d = R = 4{,}5$ cm : la section se réduit à un point. Dans le second cas, $d = 0$: la section est un grand cercle, de rayon 4,5 cm.

Ex. 3 ★★☆ Lire un cube en perspective cavalière

(a) Le sommet E, situé derrière A, est caché par le cube. Les arêtes issues de E sont donc en pointillés : $[AE]$, $[EF]$ et $[EH]$.

(b) La droite (EF) est dans la face $EFGH$ et la droite (BC) dans la face $ABCD$. Ces deux faces sont parallèles, donc les droites n'ont aucun point commun : elles ne sont pas sécantes. De plus, $(EF) \parallel (AB)$ et (AB) coupe (BC) en B, donc (EF) n'est pas parallèle à (BC). Conclusion : les droites (EF) et (BC) sont non coplanaires. Le croisement n'existe que sur le dessin.

(c) On a $(AB) \parallel (DC)$ (face $ABCD$) et $(DC) \parallel (HG)$ (face $DCGH$), donc $(AB) \parallel (HG)$: les deux droites sont coplanaires, dans le plan $(ABGH)$. On a aussi $(CG) \parallel (BF)$ et (BF) coupe (AB) en B, donc (AB) et (CG) ne sont pas parallèles. La droite (AB) coupe le plan (BCG) seulement en B, et $B \notin (CG)$: elles n'ont aucun point commun. Conclusion : (AB) et (CG) sont non coplanaires.

(d) I est sur l'arête $[BF]$, donc il appartient aux deux faces qui la contiennent : $ABFE$ (dessous) et $BCGF$ (droite). Le segment $[AI]$ est dans la face $ABFE$, qui contient le sommet caché E : cette face est cachée, donc on trace $[AI]$ en pointillés. Le segment $[CI]$ est dans la face visible $BCGF$, donc on le trace en trait plein.

(e) Les faces $ABCD$ et $BCGF$ sont des carrés, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$. Le quadrilatère $ADGF$ est donc un parallélogramme. Ses diagonales $[AG]$ et $[DF]$ se coupent en leur milieu : les droites (AG) et (DF) sont sécantes, au centre du cube. Ici, contrairement à la question 2, le croisement du dessin est un vrai point commun.

Ex. 4 ★★☆ Section d'une maquette cubique par le plan (IJG)

(a) I et J appartiennent au plan (IJG) et à la face $ABCD$, donc $[IJ]$ est le côté de la section situé dans cette face. J est sur l'arête $[BC]$, donc il appartient aux faces $ABCD$ et $BCGF$. G appartient aussi à la face $BCGF$ et au plan, donc $[JG]$ est un deuxième côté de la section.

Ex. 4 **(suite)**

(b) Deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan selon deux droites parallèles. Le plan (IJG) coupe donc la face $EFGH$ selon la droite qui passe par G et qui est parallèle à (IJ). Dans le triangle ABC, la droite (IJ) joint les milieux de deux côtés, donc $(IJ) \parallel (AC)$. Comme $ACGE$ est un rectangle, $(AC) \parallel (EG)$. Cette droite est donc (GE), et le côté de la section est $[GE]$.

(c) E et I appartiennent au plan et à la face $ABFE$, donc $[EI]$ est le dernier côté. La section est le quadrilatère $IJGE$. On a $(IJ) \parallel (EG)$ et $IJ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}EG$, donc $IJ \neq EG$: $IJGE$ est un trapèze. Il n'est pas un parallélogramme.

(d) Dans le triangle IBJ rectangle en B :
$IJ^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, donc $IJ = 4\sqrt{2}$ cm. Dans le triangle EFG rectangle en F : $EG^2 = 8^2 + 8^2 = 128$, donc $EG = 8\sqrt{2}$ cm. Dans le triangle EAI rectangle en A : $EI^2 = 8^2 + 4^2 = 80$, donc $EI = 4\sqrt{5}$ cm.

(e) D'après la convention du dessin, le sommet caché est D. Les faces qui contiennent D sont donc cachées, dont la face du bas $ABCD$. Le côté $[IJ]$ se trace en pointillés. Les côtés $[JG]$, $[GE]$ et $[EI]$ sont dans les faces visibles $BCGF$, $EFGH$ et $ABFE$: ils se tracent en trait plein.

Ex. 5 ★★★ **La plaque de verre d'un module de verrière**

(a) $I \in [AB]$ et $J \in [BC]$: ces deux arêtes sont dans la face $ABCD$. Le plan (IJK) et le plan $(ABCD)$ ont donc en commun les points I et J, et ils se coupent selon la droite (IJ). Dans la face, cela donne le côté $[IJ]$.
Comme J est sur l'arête $[BC]$, il appartient aux deux faces $ABCD$ et $BCGF$. $K \in [CG]$ est aussi dans la face $BCGF$, donc $[JK]$ est un autre côté de la section.

(b) On a $I(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0)$, $J(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0)$, $K(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2})$ et $M(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,1)$. On en déduit $\overrightarrow{IJ}(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0)$, $\overrightarrow{IK}(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{IM}(0\,;\,1\,;\,1)$. $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires : la cote de $\overrightarrow{IJ}$ est nulle et pas celle de $\overrightarrow{IK}$, alors que leurs abscisses sont toutes deux non nulles. Ils dirigent donc le plan (IJK). On cherche a et b tels que $\overrightarrow{IM} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK}$: $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 0$ et $\frac{a}{2} + b = 1$. On soustrait : $\frac{b}{2} = 1$, donc $b = 2$ et $a = -2$. Troisième coordonnée :
$0 \times (-2) + \frac{1}{2} \times 2 = 1$, c'est bien vérifié.
Donc $\overrightarrow{IM} = -2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{IK}$: les points I, J, K, M sont coplanaires, et $M \in (IJK)$.

Ex. 5 **(suite)**

(c) Deux faces parallèles sont coupées par le plan (IJK) selon deux droites parallèles. $M \in [GH]$ est dans la face $EFGH$ et dans le plan (IJK). Le côté de la section sur $EFGH$ est donc porté par la parallèle à (IJ) qui passe par M. On a $N(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1)$, donc $\overrightarrow{MN}(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,0)$. Avec $k = -1$ sur l'abscisse, on vérifie : $-\frac{1}{2} = -1 \times \frac{1}{2}$ et $0 = -1 \times 0$, donc $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{IJ}$. N est donc sur cette parallèle, et il est sur l'arête $[HE]$: le côté est $[MN]$.

(d) (IJK) coupe la face $BCGF$ selon (JK). Il coupe donc la face parallèle $ADHE$ selon la parallèle à (JK) qui passe par N ($N \in [HE]$ est dans $ADHE$). On a $\overrightarrow{JK}(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2})$ et $P(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{2})$, donc $\overrightarrow{NP}(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2})$.
Avec $k = -1$ sur l'ordonnée, on vérifie sur la cote : $-\frac{1}{2} = -1 \times \frac{1}{2}$, et sur l'abscisse : $0 = 0$.
Donc $\overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{JK}$ et P, qui est sur $[EA]$, est un sommet de la section. Les côtés sont : $[IJ]$ dans $ABCD$, $[JK]$ dans $BCGF$, $[KM]$ dans $DCGH$, $[MN]$ dans $EFGH$, $[NP]$ dans $ADHE$ et $[PI]$ dans $ABFE$.

(e) La section est l'hexagone $IJKMNP$. Chaque côté joint les milieux de deux arêtes consécutives d'une face. Par exemple, le triangle IBJ est rectangle en B avec $IB = BJ = 2$ cm. D'après le théorème de Pythagore, $IJ^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, donc $IJ = 2\sqrt{2}$ cm, et c'est la même chose pour les six côtés. Le périmètre vaut $6 \times 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \approx 16{,}97$ cm. Conclusion : la section est un hexagone dont les six côtés mesurent $2\sqrt{2}$ cm.

Ex. 6 ★★★ **Les fils lumineux d'une vitrine de musée**

(a) Sur ce dessin, la face avant est $ABFE$ et la base $ABCD$ part vers l'arrière : D est derrière A (c'est le sommet caché) et C est derrière B. G et H sont au-dessus de C et D.
Donc $C(4\,;\,2\,;\,0)$, $G(4\,;\,2\,;\,3)$ et $H(0\,;\,2\,;\,3)$.

(b) $\overrightarrow{AH}(0\,;\,2\,;\,3)$ et $\overrightarrow{BG}(4-4\,;\,2-0\,;\,3-0)$, soit $\overrightarrow{BG}(0\,;\,2\,;\,3)$. Avec $k = 1$ sur l'ordonnée, on vérifie les deux autres coordonnées : $3 = 1 \times 3$ et $0 = 1 \times 0$.
Donc $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$, et les droites sont parallèles. Elles sont même strictement parallèles, car tous les points de (AH) ont pour abscisse 0 alors que B a pour abscisse 4. Deux droites parallèles sont coplanaires (elles sont dans le plan $(ABGH)$) : Lina a tort.

Ex. 6 **(suite)**

(c) $\overrightarrow{AG}(4\,;\,2\,;\,3)$ et $\overrightarrow{BD}(-4\,;\,2\,;\,0)$. Sur l'abscisse, $k = \frac{4}{-4} = -1$, mais sur l'ordonnée $\frac{2}{2} = 1 \neq -1$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On écrit (AG) : $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et (BD) : $\begin{cases} x = 4 - 4s \\ y = 2s \\ z = 0 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$. La cote donne $3t = 0$, donc $t = 0$. L'abscisse donne alors $0 = 4 - 4s$, donc $s = 1$. Mais l'ordonnée donne $2 \times 0 = 2 \times 1$, soit $0 = 2$: c'est impossible. Les droites n'ont donc aucun point commun et ne sont pas parallèles : (AG) et (BD) sont non coplanaires. Le croisement qu'on voit sur le dessin vient seulement de la perspective.

(d) Si A, B, D, G étaient dans un même plan, les droites (AG) et (BD) seraient dans ce plan, donc coplanaires. C'est faux d'après la question précédente : les points A, B, D, G ne sont pas coplanaires.

(e) $E(0\,;\,0\,;\,3)$ et $C(4\,;\,2\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{EC}(4\,;\,2\,;\,-3)$. Sur l'abscisse, $k = 1$, mais sur la cote $-3 \neq 1 \times 3$: ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AG}$. On écrit (EC) : $\begin{cases} x = 4s \\ y = 2s \\ z = 3 - 3s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$. L'abscisse donne $4t = 4s$, donc $s = t$. La cote donne alors $3t = 3 - 3t$, donc $t = \frac{1}{2}$ et $s = \frac{1}{2}$. L'ordonnée est bien vérifiée : $2 \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$. Les droites sont sécantes au point de coordonnées $(2\,;\,1\,;\,\frac{3}{2})$, le centre du pavé.

Ex. 7 ★★★ **Une pièce cube et cylindre dans un logiciel 3D**

(a) Le plan est parallèle à une face du cube : la section du cube est un carré de 6 cm de côté. Il est aussi parallèle aux bases du cylindre, donc perpendiculaire à son axe : la section du cylindre est un disque de même rayon que la base, $r = \frac{6}{2} = 3$ cm. L'aire cherchée vaut $6^2 - \pi \times 3^2 = 36 - 9\pi \approx 7{,}73$ cm².

(b) Ω est le milieu de $[AC]$ et Ω' celui de $[EG]$. Ces deux points sont dans le plan $(ACGE)$, donc l'axe $(\Omega\Omega')$ est dans ce plan. Section du cube : le rectangle $ACGE$. Dans le triangle ABC rectangle en B, $AC^2 = 6^2 + 6^2 = 72$, donc $AC = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm. On obtient un rectangle de $6\sqrt{2}$ cm sur 6 cm. Section du cylindre : le plan contient l'axe, donc c'est un rectangle de $2r = 6$ cm sur $h = 6$ cm (la hauteur est la distance entre $ABCD$ et $EFGH$). C'est donc un carré de 6 cm de côté, et pas un disque.

Ex. 7 **(suite)**

(c) Le plan est parallèle à une face : la section du cube est un carré de 6 cm de côté. La face $ADHE$ contient (AE), qui est parallèle à l'axe, donc le plan est parallèle à l'axe : la section du cylindre est un rectangle de hauteur 6 cm. Dans la face $ABCD$, le plan coupe le disque de base selon une corde portée par la parallèle à (AD) qui passe par M. Cette corde est à $3 - 1 = 2$ cm de Ω. Sa moitié vérifie $\ell^2 = 3^2 - 2^2 = 5$, donc la corde mesure $2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ cm. Conclusion : la section du cylindre est un rectangle de $2\sqrt{5}$ cm sur 6 cm.

(d) Chaque face du cube est dans un plan, et un plan coupe un autre plan selon une droite. Le bord de la section est donc fait de segments : c'est un polygone (triangle, quadrilatère, pentagone ou hexagone), jamais un disque. Le cylindre a une surface courbe, c'est pour cela qu'il peut donner un disque. Marius a tort.

(e) B et D sont dans la face $ABCD$, ce qui donne le côté $[BD]$. B et E sont dans la face $ABFE$, ce qui donne $[BE]$. D et E sont dans la face $ADHE$, ce qui donne $[DE]$. La section est le triangle BDE. Chaque côté est une diagonale d'un carré de côté 6 cm : il mesure $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ cm. La section est donc un triangle équilatéral, de périmètre $3 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \approx 25{,}46$ cm.

2. *Vecteurs de l'espace, coordonnées, colinéarité et alignement*

Ex. 8 ★★★ **Vecteurs et milieux avec des négatifs**

(a) $\overrightarrow{PQ}(4 - (-2)\,;\,-1 - 5\,;\,-3 - 1)$, soit $\overrightarrow{PQ}(6\,;\,-6\,;\,-4)$.

(b) Arrivée P moins départ Q : $\overrightarrow{QP}(-2 - 4\,;\,5 - (-1)\,;\,1 - (-3))$, soit $\overrightarrow{QP}(-6\,;\,6\,;\,4)$. On a bien $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

(c) $M\left(\frac{-2+4}{2}\,;\,\frac{5+(-1)}{2}\,;\,\frac{1+(-3)}{2}\right)$, soit $M(1\,;\,2\,;\,-1)$.

(d) $L\left(\frac{-2+3}{2}\,;\,\frac{5+(-4)}{2}\,;\,\frac{1+6}{2}\right)$, soit $L\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right)$.

(e) $\overrightarrow{QR}(3 - 4\,;\,-4 - (-1)\,;\,6 - (-3))$, soit $\overrightarrow{QR}(-1\,;\,-3\,;\,9)$, et $\overrightarrow{PR}(3 - (-2)\,;\,-4 - 5\,;\,6 - 1)$, soit $\overrightarrow{PR}(5\,;\,-9\,;\,5)$. Puis $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}(6 + (-1)\,;\,-6 + (-3)\,;\,-4 + 9)$, soit $(5\,;\,-9\,;\,5)$: on retrouve bien $\overrightarrow{PR}$ (relation de Chasles).

(f) $2\overrightarrow{PQ}(12\,;\,-12\,;\,-8)$, donc $2\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR}(12 - (-1)\,;\,-12 - (-3)\,;\,-8 - 9)$, soit $(13\,;\,-9\,;\,-17)$.

Ex. 9 ★☆☆ **Colinéaires ou pas ?**

(a) Sur la 1re coordonnée : $k = \frac{-6}{3} = -2$. Vérification : $4 = -2 \times (-2)$ et $-10 = -2 \times 5$.
Donc $\vec{v} = -2\vec{u}$.

(b) Non. Les deux premières coordonnées donnent $k = \frac{3}{2}$, mais $\frac{3}{2} \times 2 = 3 \neq 4$. Le même k ne marche pas sur les trois coordonnées : $\vec{s}$ et $\vec{r}$ ne sont pas colinéaires.

(c) La 2e coordonnée de $\vec{a}$ est nulle, celle de $\vec{b}$ ne l'est pas. Si $\vec{b} = k\vec{a}$, alors $1 = k \times 0 = 0$: impossible. Si $\vec{a} = k\vec{b}$, alors $0 = k \times 1$ donne $k = 0$, puis $2 = 0$: impossible. Ils ne sont pas colinéaires, même si $\frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = -2$.

(d) La 1re coordonnée est nulle : on cherche k sur la 2e, $k = \frac{-15}{5} = -3$. Vérification : $0 = -3 \times 0$ et $3 = -3 \times (-1)$.
Donc $\vec{e} = -3\vec{c}$: ils sont colinéaires.

(e) Sur la 2e coordonnée : $k = \frac{6}{-2} = -3$. Vérification sur la 3e : $-9 = -3 \times 3$. Il faut donc $a = -3 \times (-4) = 12$.

(f) $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,-2\,;\,4)$ et $\overrightarrow{CD}\,(6\,;\,-4\,;\,8)$. $k = \frac{6}{3} = 2$.
Vérification : $-4 = 2 \times (-2)$ et $8 = 2 \times 4$.
Donc $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$: les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Ex. 10 ★★☆ **Une maquette cubique**

(a) $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$. Avec la formule du milieu : $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$, $J\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$.

(b) $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$. Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (face carrée $ABCD$) et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
Donc $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, ce qui correspond bien à $J\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

(c) $\overrightarrow{IK}\,\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IN}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$. La 1re coordonnée est nulle : on cherche k sur la 2e, $k = \frac{1}{1/2} = 2$.
Vérification : $-1 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ et $0 = 2 \times 0$.
Donc $\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{IK}$: les vecteurs sont colinéaires, donc I, K, N sont alignés.

(d) $\overrightarrow{IJ}\,\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IN}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$. Si $\overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{IJ}$, la 1re coordonnée donne $0 = \frac{k}{2}$, donc $k = 0$, puis $1 = 0$: impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc I, J, N ne sont pas alignés.

Ex. 11 ★★☆ **Ancrages alignés d'un câble**

(a) $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,2\,;\,-4)$ et $\overrightarrow{AC}\,(m-2\,;\,6\,;\,-12)$. Sur la 2e coordonnée : $k = \frac{6}{2} = 3$. Vérification sur la 3e : $-12 = 3 \times (-4)$. La 1re impose $m - 2 = 3 \times 3$, soit $m = 11$. Pour $m = 11$, $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ et les points A, B, C sont alignés.

Ex. 11 (suite)

(b) Noé a fait départ moins arrivée sur les deux premières coordonnées. En fait $\overrightarrow{BF}\,(-1-5\,;\,-3-1\,;\,7-(-1))$, soit $\overrightarrow{BF}\,(-6\,;\,-4\,;\,8)$. Sur la 1re coordonnée : $k = \frac{-6}{3} = -2$. Vérification : $-4 = -2 \times 2$ et $8 = -2 \times (-4)$.
Donc $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{AB}$. Ces vecteurs colinéaires ont le point B en commun, donc A, B, F sont alignés.

(c) $\overrightarrow{AD}\,(m-2\,;\,4\,;\,m-3)$. Il faudrait $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$. Sur la 2e coordonnée : $k = \frac{4}{2} = 2$. La 1re donne $m - 2 = 6$, soit $m = 8$, mais la 3e donne $m - 3 = -8$, soit $m = -5$. Les deux valeurs sont différentes : aucun réel m ne convient, D n'est jamais sur (AB).

Ex. 12 ★★★ **Le centre du cube et ses alignements**

(a) $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (face carrée $ABCD$).
Donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$, soit $\overrightarrow{EC}(1\,;\,1\,;\,-1)$. On peut vérifier avec $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et $C(1\,;\,1\,;\,0)$: $\overrightarrow{EC}(1-0\,;\,1-0\,;\,0-1)$.

(b) On a $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$ et $A(0\,;\,0\,;\,0)$. Avec la formule du milieu : $I\left(\frac{1+1}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{1+1}{2}\right) = \left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, puis $J\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$ et $K\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$. Ensuite $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ donne $x_P = 0 + \frac{1}{2}$, $y_P = 0 + \frac{1}{2}$, $z_P = 1 - \frac{1}{2}$, soit $P\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$: c'est le centre du cube.

(c) $\overrightarrow{IP}\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IK}(-1\,;\,0\,;\,-1)$. Sur x : $-1 = k \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ donne $k = 2$. On vérifie sur les deux autres : sur y, $0 = 2 \times 0$; sur z, $-1 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$.
Donc $\overrightarrow{IK} = 2\,\overrightarrow{IP}$: les vecteurs sont colinéaires, donc I, P, K sont alignés.

(d) $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$ et $\overrightarrow{IP}\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,-\frac{1}{2}\right)$. Sur x : $-\frac{1}{2} = k \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ donne $k = 1$. Mais sur y, $\frac{1}{2} \neq 1 \times 0$: $\overrightarrow{IP}$ a une coordonnée nulle, alors que la coordonnée de $\overrightarrow{IJ}$ correspondante ne l'est pas. Aucun k ne convient : les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc I, P, J ne sont pas alignés.

(e) $\overrightarrow{IK}(-1\,;\,0\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{DG}(1-0\,;\,1-1\,;\,1-0) = (1\,;\,0\,;\,1)$. Sur x : $-1 = k \times 1$ donne $k = -1$. On vérifie : sur y, $0 = -1 \times 0$; sur z, $-1 = -1 \times 1$.
Donc $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{DG}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les droites (IK) et (DG) sont parallèles.

Ex. 13 ★★★ **La trajectoire d'un drone de livraison**

(a) On calcule « arrivée moins départ » :
$\overrightarrow{AB}(1-(-3)\,;\,-4-2\,;\,1-(-1))$, soit $\overrightarrow{AB}(4\,;\,-6\,;\,2)$,
et $\overrightarrow{AC}(9-(-3)\,;\,-16-2\,;\,6-(-1))$, soit
$\overrightarrow{AC}(12\,;\,-18\,;\,7)$.

(b) Le raisonnement n'est pas correct : deux coordonnées ne suffisent pas. Sur x, on trouve $k=\frac{12}{4}=3$, et ce k convient sur y car $3\times(-6)=-18$. Mais sur z, $3\times 2=6\neq 7$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires : A, B, C ne sont pas alignés. Le drone n'est pas resté en ligne droite.

(c) $\overrightarrow{AD}(m+3\,;\,-3\,;\,m+2)$. On cherche k tel que $\overrightarrow{AD}=k\,\overrightarrow{AB}$. La coordonnée y ne contient pas m : $-3=k\times(-6)$ donne $k=\frac{1}{2}$. Sur x : $m+3=\frac{1}{2}\times 4=2$, donc $m=-1$. On vérifie sur z : $m+2=1$ et $\frac{1}{2}\times 2=1$. Conclusion : A, B, D sont alignés si et seulement si $m=-1$, c'est-à-dire pour $D(-1\,;\,-1\,;\,0)$.

(d) $\overrightarrow{AE}(m+3\,;\,3\,;\,2m+1)$. Si $\overrightarrow{AE}=k\,\overrightarrow{AB}$, alors sur y : $3=k\times(-6)$, donc $k=-\frac{1}{2}$. Sur x : $m+3=-\frac{1}{2}\times 4=-2$, donc $m=-5$. Sur z, on devrait alors avoir $2m+1=-\frac{1}{2}\times 2=-1$. Or $2\times(-5)+1=-9\neq -1$. Aucun réel m ne convient : les points A, B, E ne sont jamais alignés.

(e) L'affirmation n'est pas correcte : on ne divise jamais par une coordonnée nulle. On cherche k sur une coordonnée non nulle. Sur y : $-1=k\times 3$, donc $k=-\frac{1}{3}$. On vérifie sur les deux autres : sur z, $-\frac{1}{3}\times(-6)=2$; sur x, $-\frac{1}{3}\times 0=0$.
Donc $\vec{v}=-\frac{1}{3}\vec{u}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Ex. 14 ★★★ **Les points d'attache d'une verrière**

(a) $C(4\,;\,2\,;\,0)$, $F(4\,;\,0\,;\,3)$, $G(4\,;\,2\,;\,3)$. Avec la formule du milieu : $I\left(\frac{0+4}{2}\,;\,\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{3+3}{2}\right)=(2\,;\,0\,;\,3)$ et $M\left(\frac{0+4}{2}\,;\,\frac{2+2}{2}\,;\,0\right)=(2\,;\,2\,;\,0)$. Comme $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$ avec $\overrightarrow{CG}(0\,;\,0\,;\,3)$, on obtient $J(4\,;\,2\,;\,1)$. Comme $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$, on obtient $N(0\,;\,0\,;\,2)$.

(b) $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$. Or $\overrightarrow{IF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.
Donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$. Vérification avec $\overrightarrow{AB}(4\,;\,0\,;\,0)$, $\overrightarrow{AD}(0\,;\,2\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AE}(0\,;\,0\,;\,3)$: on obtient $(2\,;\,2\,;\,-2)$. C'est bien $\overrightarrow{IJ}(4-2\,;\,2-0\,;\,1-3)$.

Ex. 14 **(suite)**

(c) Le milieu de $[IM]$ est $\left(\frac{2+2}{2}\,;\,\frac{0+2}{2}\,;\,\frac{3+0}{2}\right)=\left(2\,;\,1\,;\,\frac{3}{2}\right)$. Le milieu de $[JN]$ est $\left(\frac{4+0}{2}\,;\,\frac{2+0}{2}\,;\,\frac{1+2}{2}\right)=\left(2\,;\,1\,;\,\frac{3}{2}\right)$. Les diagonales $[IM]$ et $[JN]$ ont le même milieu, donc $IJMN$ est un parallélogramme.

(d) Faux. On a $\overrightarrow{EC}(4-0\,;\,2-0\,;\,0-3)=(4\,;\,2\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{IJ}(2\,;\,2\,;\,-2)$. Sur x : $2=k\times 4$ donne $k=\frac{1}{2}$. Mais sur y, $\frac{1}{2}\times 2=1\neq 2$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (IJ) et (EC) ne sont pas parallèles.

(e) $R\in(IJ)$ si et seulement si $\overrightarrow{IR}\left(m-2\,;\,\frac{3}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IJ}(2\,;\,2\,;\,-2)$ sont colinéaires. Sur y : $\frac{3}{2}=k\times 2$, donc $k=\frac{3}{4}$. On vérifie sur z : $\frac{3}{4}\times(-2)=-\frac{3}{2}$. Sur x : $m-2=\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{2}$, donc $m=\frac{7}{2}$. Le spot est en $R\left(\frac{7}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$, bien à l'intérieur de la verrière.

3. *Vecteurs coplanaires, points coplanaires, bases et repères*

Ex. 15 ★☆☆ **Coplanaires ou base ?**

(a) L'ordonnée de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$, et $\vec{v}\neq\vec{0}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les ordonnées donnent $2a=4$, donc $a=2$. Les abscisses donnent $2+3b=-1$, donc $b=-1$. Test des cotes : $2\times(-1)+(-1)\times 2=-4$, c'est bien la cote de $\vec{w}$.
Donc $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires.

(b) L'abscisse de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Si $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$, les abscisses donnent $2a=4$, donc $a=2$, et les cotes donnent $b=2$. Test des ordonnées : $-1\times 2+3\times 2=4\neq 1$. C'est impossible : les vecteurs ne sont pas coplanaires. Ils forment donc une base.

(c) $-2\times 1=-2$, $-2\times(-2)=4$ et $-2\times 3=-6$, donc $\vec{v}=-2\vec{u}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Les trois vecteurs sont donc coplanaires (un plan contient la direction de $\vec{u}$ et celle de $\vec{w}$). Ils ne forment pas une base.

(d) L'ordonnée de $\vec{u}$ est nulle, pas celle de $\vec{v}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Si $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$, les ordonnées donnent $b=1$. Les abscisses donnent $2a+1=2$, donc $a=\frac{1}{2}$. Test des cotes : $\frac{1}{2}\times 4+1\times(-1)=1$, c'est bien la cote de $\vec{w}$.
Donc $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$: les vecteurs sont coplanaires. C'est faux, ils ne forment pas une base.

Ex. 16 ★☆☆ **La plaque de la maquette**

(a) $\overrightarrow{BD}(0-1\,;\,1-0\,;\,0-0)$, soit $\overrightarrow{BD}(-1\,;\,1\,;\,0)$.
$\overrightarrow{BE}(0-1\,;\,0-0\,;\,1-0)$, soit $\overrightarrow{BE}(-1\,;\,0\,;\,1)$.

(b) Si $\overrightarrow{BE}=k\,\overrightarrow{BD}$, les cotes donnent $1=k\times 0$: c'est impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc B, D, E ne sont pas alignés. Ils définissent bien un plan.

(c) $\overrightarrow{BK}(-1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2})$. On cherche a et b tels que $\overrightarrow{BK}=a\,\overrightarrow{BD}+b\,\overrightarrow{BE}$, c'est-à-dire $(-a-b\,;\,a\,;\,b)$. Les ordonnées donnent $a=1$ et les cotes $b=\frac{1}{2}$. Test des abscisses : $-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}\neq -1$. C'est impossible : K n'appartient pas au plan (BDE).

(d) $\overrightarrow{BM}(-1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2})$. Les ordonnées donnent $a=\frac{1}{2}$ et les cotes $b=\frac{1}{2}$. Test des abscisses : $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$, c'est bien l'abscisse de $\overrightarrow{BM}$.
Donc $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$: M appartient au plan (BDE).

Ex. 17 ★☆☆ **Une pièce dans un logiciel 3D**

(a) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$, avec $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$.
Donc $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, soit $\overrightarrow{AG}(1\,;\,1\,;\,1)$.

(b) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
Donc $\overrightarrow{EC}(1\,;\,1\,;\,-1)$.

(c) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$, donc $F(1\,;\,0\,;\,1)$. $G(1\,;\,1\,;\,1)$ d'après la première question. I est le milieu de $[FG]$:
$I\left(\frac{1+1}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{1+1}{2}\right)$, soit $I\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$.

(d) Non. Le repère n'est pas orthonormé : l'unité sur le troisième axe est $AE=DH=2$ cm. $DJ=0{,}5=\frac{1}{4}\times 2$, donc $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Comme $D(0\,;\,1\,;\,0)$, on a $J\left(0\,;\,1\,;\,\frac{1}{4}\right)$.

(e) $\overrightarrow{IJ}\left(0-1\,;\,1-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}-1\right)$, soit $\overrightarrow{IJ}\left(-1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{3}{4}\right)$.

Ex. 18 ★★☆ **Les câbles du pont**

(a) L'abscisse de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Si $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$, les abscisses donnent $a=2$ et les cotes $b=1$. Test des ordonnées :
$2\times(-1)+1\times 2=0$, c'est bien l'ordonnée de $\vec{w}$.
Donc $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires.
Théo a tort : être deux à deux non colinéaires ne suffit pas pour former une base.

(b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}_m$ sont coplanaires si et seulement s'il existe a et b tels que $\vec{w}_m=a\vec{u}+b\vec{v}$. Les abscisses donnent $a=2$ et les cotes $b=3$. Les ordonnées imposent alors
$m=-2+2\times 3=4$. Conclusion : les vecteurs sont coplanaires si et seulement si $m=4$.

Ex. 18 **(suite)**

(c) $\vec{t}=\vec{w}_0$ et $0\neq 4$. D'après la question précédente, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$ ne sont pas coplanaires : avec $a=2$ et $b=3$, l'ordonnée vaudrait 4 et non 0. Trois vecteurs non coplanaires forment une base : $(\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{t})$ est une base de l'espace.

(d) On cherche a, b, c tels que $\vec{s}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{t}$:
$\begin{cases} a+2c=3 \\ -a+2b=3 \\ b+3c=5 \end{cases}$. On en tire $a=3-2c$ et $b=5-3c$.
Dans la deuxième équation : $-(3-2c)+2(5-3c)=3$, soit $7-4c=3$, donc $c=1$. Puis $a=1$ et $b=2$.
Vérification : $-1+2\times 2=3$. Conclusion :
$\vec{s}=\vec{u}+2\vec{v}+\vec{t}$, et ses coordonnées dans cette base sont $(1\,;\,2\,;\,1)$.

Ex. 19 ★★★ **La vitre de la verrière**

(a) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$, donc $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$. $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, donc $J\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, donc $K\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

(b) $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$. Si $\overrightarrow{IK}=k\,\overrightarrow{IJ}$, les abscisses donnent $k=\frac{-1/2}{1/2}=-1$ et les ordonnées $k=\frac{1/2}{1}=\frac{1}{2}$: c'est impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc I, J, K ne sont pas alignés : ils définissent un plan.

(c) $G(1\,;\,1\,;\,1)$, donc $\overrightarrow{IG}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$. On cherche a et b tels que $\overrightarrow{IG}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IK}$. Abscisses : $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}$, soit $a-b=1$. Ordonnées : $a+\frac{1}{2}b=1$. Par soustraction, $\frac{3}{2}b=0$: $b=0$ et $a=1$. Test des cotes :
$-\frac{1}{2}\times 1-0=-\frac{1}{2}\neq 0$. Le système n'a pas de solution, donc $G\notin(IJK)$.
(Si l'on oublie la troisième équation, on conclut à tort que $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IJ}$.)

(d) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+m\,\overrightarrow{AB}$, donc $M(m\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{IM}\left(m-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,-1\right)$. Comme I, J, K ne sont pas alignés, $M\in(IJK)$ si et seulement s'il existe a et b tels que $\overrightarrow{IM}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IK}$. Ordonnées : $a+\frac{1}{2}b=1$. Cotes : $-\frac{1}{2}a-b=-1$. La première donne $a=1-\frac{1}{2}b$, puis $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}b-b=-1$, soit $-\frac{3}{4}b=-\frac{1}{2}$: $b=\frac{2}{3}$ et $a=\frac{2}{3}$.
Abscisses : $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=0$, donc il faut $m-\frac{1}{2}=0$, soit $m=\frac{1}{2}$. Réciproquement, pour $m=\frac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{IM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}+\frac{2}{3}\overrightarrow{IK}$. Conclusion : M est le milieu de $[DC]$.

Ex. 20 ★★★ **La charpente de Malik**

(a) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $G(1\,;\,1\,;\,1)$ et non $(4\,;\,2\,;\,3)$: les coordonnées ne sont pas des longueurs. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, donc $P\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $Q\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, donc $M\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

(b) $\overrightarrow{AP}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AQ}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et, comme $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $\overrightarrow{EM}\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{1}{2}\right)$. Ces vecteurs sont bien deux à deux non colinéaires : $\overrightarrow{AQ}$ est non nul et a une abscisse nulle, contrairement aux deux autres ; pour $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{EM}$, les abscisses imposent $k = 1$, mais $\frac{1}{2} \neq 0$ sur les ordonnées. Pourtant $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \left(1 - 0\,;\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2} - 1\right) = \left(1\,;\,0\,;\,-\frac{1}{2}\right) = \overrightarrow{EM}$. Les trois vecteurs sont coplanaires, donc ils ne forment pas une base : Léo a tort.

(c) $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ ne sont pas colinéaires (question précédente). Si $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AP} + b\overrightarrow{AQ}$, les abscisses donnent $a = 1$ et les cotes $\frac{1}{2} + b = 1$, soit $b = \frac{1}{2}$. Test des ordonnées : $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq 1$. C'est impossible, donc $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

(d) $C(1\,;\,1\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{AC}(1\,;\,1\,;\,0)$. On cherche a, b, c tels que $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AP} + b\overrightarrow{AQ} + c\overrightarrow{AG}$: $\begin{cases} a + c = 1 \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c = 1 \\ \frac{1}{2}a + b + c = 0 \end{cases}$. La première équation donne $c = 1 - a$. La deuxième devient $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + 1 - a = 1$, donc $b = a$. La troisième devient $\frac{1}{2}a + a + 1 - a = 0$, donc $a = -2$. D'où $b = -2$ et $c = 3$. Conclusion : $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AQ} + 3\overrightarrow{AG}$, et ses coordonnées dans cette base sont $(-2\,;\,-2\,;\,3)$.

Ex. 21 ★★★ **La toile de la tente**

(a) $\overrightarrow{AB}(2\,;\,-1\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;\,2\,;\,1)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, les abscisses donnent $k = -\frac{1}{2}$. Mais alors l'ordonnée vaudrait $-\frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} \neq 2$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B, C ne sont pas alignés : ils définissent un plan.

Ex. 21 **(suite)**

(b) $\overrightarrow{AD}(1\,;\,m-2\,;\,m)$. Comme A, B, C ne sont pas alignés, $D \in (ABC)$ si et seulement s'il existe a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Abscisses : $2a - b = 1$. Cotes : $2a + b = m$. En additionnant, $4a = m + 1$, donc $a = \frac{m+1}{4}$. En soustrayant, $2b = m - 1$, donc $b = \frac{m-1}{2}$. Ordonnées : $-a + 2b = m - 2$, soit $-\frac{m+1}{4} + m - 1 = m - 2$, donc $\frac{m+1}{4} = 1$ et $m = 3$. Réciproquement, pour $m = 3$ on a $a = 1$, $b = 1$, et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (1\,;\,1\,;\,3) = \overrightarrow{AD}$. Conclusion : $D \in (ABC)$ si et seulement si $m = 3$.

(c) Faux. $-2 \times 2 = -4$, $-2 \times (-1) = 2$ et $-2 \times 2 = -4$, donc $\vec{v} = -2\overrightarrow{AB}$. Alors $a\overrightarrow{AB} + b\vec{v} = (a - 2b)\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{AC}$ ne l'est pas (première question) : il ne s'écrit donc pas sous cette forme. Pourtant $\vec{v} = -2\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AC}$: les trois vecteurs sont coplanaires. La caractérisation $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ne vaut que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

(d) $\overrightarrow{AE}(3\,;\,0\,;\,4)$. Les calculs de Yanis sont justes : $2 \times 2 - 1 = 3$ et $-2 + 2 \times 1 = 0$. Mais il n'a pas vérifié la troisième équation. Test des cotes : $2 \times 2 + 1 = 5 \neq 4$. Le système n'a donc pas de solution : $\overrightarrow{AE}$ ne s'écrit pas $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, et $E \notin (ABC)$.

4. *Représentation paramétrique d'une droite*

Ex. 22 ★☆☆ **Lire et écrire une représentation paramétrique**

(a) Pour $t = 0$: le point $(0\,;\,-7\,;\,6)$. Les coefficients de t donnent le vecteur directeur $\vec{u}(2\,;\,0\,;\,-5)$. Le coefficient de t dans y est nul, donc tous les points ont pour ordonnée -7.

(b) Pour $t = 0$: le point $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,-4\right)$. Vecteur directeur : $\vec{u}(-1\,;\,3\,;\,0)$. La cote ne dépend pas de t, son coefficient est 0.

(c) Inès a inversé les deux. Les constantes donnent le point $(4\,;\,-3\,;\,1)$ et les coefficients de t le vecteur directeur $\vec{u}(-2\,;\,5\,;\,1)$.

(d) Non. Les coefficients de t forment le vecteur nul $(0\,;\,0\,;\,0)$, qui ne peut pas être un vecteur directeur. Quel que soit t, on obtient le seul point $(3\,;\,-1\,;\,2)$.

(e) $x = -2 - (-3) = 1$, $y = 2 \times (-3) = -6$, $z = -1 + 3 \times (-3) = -10$: c'est le point $(1\,;\,-6\,;\,-10)$.

Ex. 22 **(suite)**

(f) $\begin{cases} x = -3t \\ y = -2 \\ z = 7 + \frac{1}{2}t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Ex. 23 ★☆☆ **Le drone est-il passé par là ?**

(a) $1 - 2t = -3$ donne $t = 2$. Alors $y = 3 + 2 = 5$ et $z = -2 + 6 = 4$. Le même $t = 2$ vérifie les trois équations, donc $A \in (d)$.

(b) Non. $1 - 2t = 5$ donne $t = -2$, et alors $y = 1$ convient. Mais $z = -2 + 3 \times (-2) = -8 \neq -7$. Aucun t ne vérifie les trois équations, donc $B \notin (d)$.

(c) $1 - 2t = 6$ donne $t = -\frac{5}{2}$. Alors $y = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ et $z = -2 - \frac{15}{2} = -\frac{19}{2}$: c'est le point $\left(6\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{19}{2}\right)$.

(d) $-2 + 3t = 0$ donne $t = \frac{2}{3}$. Alors $x = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ et $y = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$: c'est le point $\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{11}{3}\,;\,0\right)$.

(e) $3 + t = 0$ donne $t = -3$. On vérifie : $z = -2 + 3 \times (-3) = -11$, ça convient. Il faut alors $m = 1 - 2 \times (-3) = 7$.

Ex. 24 ★★☆ **La diagonale d'une maquette cubique**

(a) $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et $C(1\,;\,1\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{EC}(1\,;\,1\,;\,-1)$. La droite (EC) passe par E et est dirigée par $\overrightarrow{EC}$: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) $G(1\,;\,1\,;\,1)$, donc $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$. $x = t$ donne $t = \frac{1}{2}$. Alors $y = \frac{1}{2}$ et $z = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Les trois équations sont vérifiées par le même t, donc $K \in (EC)$.

(c) $B(1\,;\,0\,;\,0)$ et $G(1\,;\,1\,;\,1)$, donc $M\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$. L'équation $x = t$ donne $t = 1$. Mais alors $y = 1 \neq \frac{1}{2}$. Aucune valeur de t ne vérifie les trois équations, donc $M \notin (EC)$.

(d) $t = 1$ donne $(1\,;\,1\,;\,0)$, c'est-à-dire C. Comme $t = 0$ donne E, et que le point de paramètre t vérifie $\overrightarrow{EP} = t\,\overrightarrow{EC}$, le segment $[EC]$ correspond à $t \in [0\,;\,1]$.

Ex. 25 ★★☆ **Trois saisies dans un logiciel 3D**

(a) (d_1) passe par $A(2\,;\,-1\,;\,4)$ et est dirigée par $\vec{u}(3\,;\,-1\,;\,2)$. (d_2) passe par $B(-1\,;\,0\,;\,2)$ et est dirigée par $\vec{v}(6\,;\,-2\,;\,4)$.

(b) $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{-2}{-1} = 2$ et $\frac{4}{2} = 2$, donc $\vec{v} = 2\vec{u}$: les vecteurs sont colinéaires. Testons B sur (d_1) : $2 + 3t = -1$ donne $t = -1$, puis $y = -1 + 1 = 0$ et $z = 4 - 2 = 2$. Donc $B \in (d_1)$. Conclusion : les deux droites ont la même direction et un point commun, c'est la même droite.

Ex. 25 **(suite)**

(c) Le vecteur directeur de (d_3) est $\vec{w}(-6\,;\,2\,;\,-4)$ et $\vec{w} = -2\vec{u}$ (même $k = -2$ sur les trois coordonnées). Testons $C(5\,;\,-2\,;\,7)$ sur (d_1) : $2 + 3t = 5$ donne $t = 1$, et $y = -2$ convient, mais $z = 6 \neq 7$. Donc $C \notin (d_1)$. Conclusion : les droites sont parallèles mais distinctes, ce n'est pas la même droite.

(d) Faux. $t = 3$ donne $M(11\,;\,-4\,;\,10)$ sur (d_1), alors que $s = 3$ donne $(17\,;\,-6\,;\,14)$ sur (d_2), qui est un autre point. Pourtant $M \in (d_2)$: $-1 + 6s = 11$ donne $s = 2$, puis $y = -4$ et $z = 2 + 8 = 10$. Le même point a pour paramètre 3 sur (d_1) et 2 sur (d_2). Une représentation paramétrique n'est pas unique, et le paramètre dépend de l'écriture choisie.

(e) $t = 2$ donne $D(8\,;\,-3\,;\,8)$. Le vecteur $-\vec{u}(-3\,;\,1\,;\,-2)$ dirige (d_1). D'où $\begin{cases} x = 8 - 3t \\ y = -3 + t \\ z = 8 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Ex. 26 ★★★ **Un câble de pont, plusieurs écritures**

(a) $\overrightarrow{AB}(-1 - 3\,;\,4 - (-2)\,;\,-3 - 5)$, soit $\overrightarrow{AB}(-4\,;\,6\,;\,-8)$, qui est non nul.
Donc (AB) : $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -2 + 6t \\ z = 5 - 8t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Abscisse nulle : $3 - 4t = 0$ donne $t = \frac{3}{4}$. Alors $y = -2 + 6 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$ et $z = 5 - 8 \times \frac{3}{4} = -1$.
Donc $C\left(0\,;\,\frac{5}{2}\,;\,-1\right)$.

(b) On cherche le point de cote nulle : $5 - 8t = 0$ donne $t = \frac{5}{8}$. Alors $x = 3 - 4 \times \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$ et $y = -2 + 6 \times \frac{5}{8} = \frac{7}{4}$, donc $T\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{4}\,;\,0\right)$. Avec le point A et le vecteur $\overrightarrow{AB}$, le segment $[AB]$ correspond à $t \in [0\,;\,1]$. Comme $\frac{5}{8} \in [0\,;\,1]$, T est bien situé entre A et B.

(c) Un vecteur directeur de (d') est $\vec{u}'(2\,;\,-3\,;\,4)$. Sur l'abscisse : $2 = k \times (-4)$ donne $k = -\frac{1}{2}$. Vérification : $-\frac{1}{2} \times 6 = -3$ et $-\frac{1}{2} \times (-8) = 4$.
Donc $\vec{u}' = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires. Le point $(1\,;\,1\,;\,1)$ de (d') (pour $s = 0$) est-il sur (AB) ? L'équation $1 = 3 - 4t$ donne $t = \frac{1}{2}$. Alors $y = -2 + 3 = 1$ et $z = 5 - 4 = 1$: les trois équations sont vérifiées. Les deux droites ont des vecteurs directeurs colinéaires et un point commun, donc elles sont confondues. Yanis a tort : il faut comparer les vecteurs et les points, pas les écritures.

Ex. 26 **(suite)**

(d) (d'') est dirigée par $(2\,;\,-3\,;\,4)$, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (question précédente) : (d'') et (AB) sont parallèles. Pour $s=0$, (d'') passe par $E(1\,;\,2\,;\,1)$. Sur (AB), $1=3-4t$ donne $t=\frac{1}{2}$, mais alors $y=-2+6\times\frac{1}{2}=1\neq 2$. Aucune valeur de t ne convient, donc $E\notin(AB)$. Conclusion : (d'') et (AB) sont strictement parallèles.

(e) On obtient $\begin{cases} x=3-4(2t-1)=7-8t \\ y=-2+6(2t-1)=-8+12t \\ z=5-8(2t-1)=13-16t \end{cases}$. Le vecteur $(-8\,;\,12\,;\,-16)$ est égal à $2\overrightarrow{AB}$: il est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et non nul. Le point $(7\,;\,-8\,;\,13)$ est sur (AB) : $7=3-4t$ donne $t=-1$, puis $y=-2-6=-8$ et $z=5+8=13$.
Donc le système représente bien (AB). Pour $t=\frac{1}{2}$, on obtient $(3\,;\,-2\,;\,5)$, c'est-à-dire A. Pour $t=1$, on obtient $(-1\,;\,4\,;\,-3)$, c'est-à-dire B.

Ex. 27 ★★★ **Une barre de verrière dans un cube**

(a) $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$ et $G(1\,;\,1\,;\,1)$. Par la formule du milieu, $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $J\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
Donc $\overrightarrow{IJ}\left(1-\frac{1}{2}\,;\,1-0\,;\,\frac{1}{2}-1\right)$, soit $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,-\frac{1}{2}\right)$.

(b) On a $2\times\frac{1}{2}=1$, $2\times 1=2$ et $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$, donc $\vec{w}=2\overrightarrow{IJ}$. Le vecteur $\vec{w}$ est non nul et colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$, donc il dirige (IJ). On en déduit (IJ) :
$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

(c) Pour tout réel m, $\vec{u}_m=(m-1)\vec{w}$: en effet $(m-1)\times 1=m-1$, $(m-1)\times 2=2m-2$ et $(m-1)\times(-1)=1-m$.
Donc $\vec{u}_m$ est toujours colinéaire à $\vec{w}$. Mais un vecteur directeur doit être non nul. Or, pour $m=1$, $\vec{u}_1(0\,;\,0\,;\,0)$ est le vecteur nul. Conclusion : $\vec{u}_m$ est un vecteur directeur de (IJ) si et seulement si $m\neq 1$.

(d) Le point M de paramètre t vérifie $\overrightarrow{IM}=t\vec{w}=2t\,\overrightarrow{IJ}$. Il est sur $[IJ]$ si et seulement si $2t\in[0\,;\,1]$, c'est-à-dire $t\in\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ et non $[0\,;\,1]$, car $\vec{w}=2\overrightarrow{IJ}$. Le milieu correspond à $2t=\frac{1}{2}$, soit $t=\frac{1}{4}$: on obtient $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,;\,\frac{2}{4}\,;\,1-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\right)$. Vérification : $\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)=\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\right)$.

Ex. 27 **(suite)**

(e) Le plan (ADE) est formé des points d'abscisse nulle, car A, D et E ont une abscisse nulle. On résout $\frac{1}{2}+t=0$, d'où $t=-\frac{1}{2}$. Alors $y=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ et $z=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, donc $L\left(0\,;\,-1\,;\,\frac{3}{2}\right)$. Les points de la face $ADHE$ ont une ordonnée et une cote comprises entre 0 et 1. Or l'ordonnée de L vaut -1.
Donc L est dans le plan (ADE), mais en dehors de la face $ADHE$.

Ex. 28 ★★★ **La charpente pyramidale**

(a) $\overrightarrow{SA}(2-0\,;\,-2-0\,;\,0-4)$, soit $\overrightarrow{SA}(2\,;\,-2\,;\,-4)$. Noé a inversé les deux rôles. Il a mis les coordonnées du vecteur à la place des constantes, et celles du point S à la place des coefficients de t. Son système représente donc la droite passant par $(2\,;\,-2\,;\,-4)$ (pour $t=0$) et dirigée par $(0\,;\,0\,;\,4)$, un vecteur non nul. Cette droite passe par A : pour $t=1$, on obtient $(2\,;\,-2\,;\,0)$. Mais elle ne passe pas par S, car tous ses points ont pour abscisse $2\neq 0$. C'est la droite qui passe par A et qui est dirigée par $\vec{k}$: la verticale de A, et non (SA).

(b) On prend le point S et le vecteur $\overrightarrow{SA}$: (SA) :
$\begin{cases} x=2t \\ y=-2t \\ z=4-4t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. Cote 1 : $4-4t=1$ donne $t=\frac{3}{4}$, qui appartient à $[0\,;\,1]$, donc le point est bien sur $[SA]$.
Alors $x=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ et $y=-\frac{3}{2}$.
Donc $P\left(\frac{3}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\,;\,1\right)$.

(c) $\overrightarrow{AB}(0\,;\,4\,;\,0)$, donc $\vec{\jmath}(0\,;\,1\,;\,0)$, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et non nul, dirige (δ). On obtient (δ) : $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{3}{2}+t \\ z=1 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
Les coefficients de t sont nuls pour x et pour z : tous les points de (δ) ont pour abscisse $\frac{3}{2}$ et pour cote 1. C'est bien une droite, car le vecteur $(0\,;\,1\,;\,0)$ n'est pas nul.

(d) Erreur de Zoé : les deux droites sont différentes, donc il faut deux paramètres différents. On note s celui de (SB) : $x=2s$, $y=2s$, $z=4-4s$. On résout
$\begin{cases} 2s=\frac{3}{2} \\ 2s=-\frac{3}{2}+t \\ 4-4s=1 \end{cases}$. La première équation donne $s=\frac{3}{4}$. La troisième est vérifiée : $4-3=1$. La deuxième donne $t=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$. Le système a une solution, donc (δ) coupe (SB) au point $Q\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,1\right)$. De plus, $s=\frac{3}{4}\in[0\,;\,1]$, donc Q est sur l'arête $[SB]$: la poutre touche bien cette arête.

5. Représentation paramétrique d'un plan

Ex. 29 ★☆☆ **Écrire la représentation paramétrique d'un plan**

(a) Si $\vec{v} = k\vec{u}$, les abscisses donnent $0 = k \times 1$, donc $k = 0$; les ordonnées donnent alors $1 = k \times 0 = 0$: c'est impossible. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Représentation : $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \mu \\ z = 3 + 2\lambda - \mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Les abscisses donnent $2 = k \times (-1)$, donc $k = -2$. Ordonnées : $-2 \times 3 = -6$, c'est vérifié. Cotes : $-2 \times (-2) = 4$, c'est vérifié.

Donc $\vec{u} = -2\vec{v}$: les deux vecteurs sont colinéaires et ne dirigent pas un plan. Non, ils ne définissent aucun plan.

(c) $\overrightarrow{EF}(2\,;\,-1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{EG}(-2\,;\,3\,;\,2)$. Les abscisses donneraient $k = -1$, mais pour les ordonnées $-1 \times (-1) = 1 \neq 3$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc E, F, G ne sont pas alignés. (EFG) :

$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - 2\mu \\ y = 2 - \lambda + 3\mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(d) $\overrightarrow{KL}(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{KM}(3\,;\,6\,;\,-3)$. Les abscisses donnent $k = 3$. Ordonnées : $3 \times 2 = 6$, c'est vérifié. Cotes : $3 \times (-1) = -3$, c'est vérifié.

Donc $\overrightarrow{KM} = 3\overrightarrow{KL}$: K, L, M sont alignés. Ils ne définissent pas un plan, il n'y a pas de représentation à écrire.

(e) $\vec{u}(1\,;\,-2\,;\,0)$ et $\vec{v}(3\,;\,0\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires : la cote de $\vec{u}$ est nulle, pas celle de $\vec{v}$. Représentation :

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda + 3\mu \\ y = -2\lambda \\ z = -1 + \mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Ex. 30 ★☆☆ **Un drone de tournage dans un plan**

(a) $y : 3 - \lambda = 4$, donc $\lambda = -1$. $x : -1 - 2 + \mu = 0$, donc $\mu = 3$. On teste $z : 2 - 1 - 2 \times 3 = -5 \neq 5$.

Donc $P_1 \notin \mathcal{P}$.

(b) $y : 3 - \lambda = \frac{5}{2}$, donc $\lambda = \frac{1}{2}$. $x : -1 + 1 + \mu = \frac{1}{2}$, donc $\mu = \frac{1}{2}$. On teste $z : 2 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}$, c'est vérifié.

Donc $P_2 \in \mathcal{P}$.

(c) Non. Deux équations donnent un couple $(\lambda\,;\,\mu)$, mais c'est la troisième qui décide. Ici $z = 2 + 2 - 2 \times 1 = 2 \neq -1$.

Donc $P_3 \notin \mathcal{P}$.

Ex. 30 (suite)

(d) $x = -1 + 4 - 1 = 2$, $y = 3 - 2 = 1$, $z = 2 + 2 + 2 = 6$. Le point est $(2\,;\,1\,;\,6)$.

(e) $y : 3 - \lambda = 4$, donc $\lambda = -1$. $x : -1 - 2 + \mu = -2$, donc $\mu = 1$. Alors $c = 2 - 1 - 2 \times 1 = -1$. $Q \in \mathcal{P}$ si et seulement si $c = -1$.

Ex. 31 ★★☆ **Une pièce cubique dans un logiciel 3D**

(a) $A(0\,;\,0\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,1)$ donnent $I\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
$B(1\,;\,0\,;\,0)$ et $C(1\,;\,1\,;\,0)$ donnent $J\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.
$G(1\,;\,1\,;\,1)$ et $H(0\,;\,1\,;\,1)$ donnent $K\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$.

(b) $\overrightarrow{IJ}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$. Les abscisses donneraient $k = \frac{1}{2}$, mais pour les ordonnées $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 1$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
Donc I, J, K ne sont pas alignés, et (IJK) passe par I et est dirigé par $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$:

$\begin{cases} x = \lambda + \frac{1}{2}\mu \\ y = \frac{1}{2}\lambda + \mu \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Avec x et y : $2\lambda + \mu = 1$ et $\lambda + 2\mu = 1$. Par différence, $\lambda = \mu$, puis $3\lambda = 1$, donc $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$. On teste z : $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, c'est vérifié. Un même couple vérifie les trois équations, donc $\Omega \in (IJK)$.

(d) Avec x et y : $2\lambda + \mu = 2$ et $\lambda + 2\mu = 2$, donc $\lambda = \mu$, puis $3\lambda = 2$ et $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$. La cote donne alors $m = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.
Donc $M\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$: c'est le milieu de $[CG]$.

Ex. 32 ★★☆ **La maquette d'une tente**

(a) $\overrightarrow{AB}(4\,;\,0\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AS}(2\,;\,2\,;\,4)$ ne sont pas colinéaires : l'ordonnée de $\overrightarrow{AB}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{AS}$.
Donc A, B, S ne sont pas alignés, et (SAB) passe par A et est dirigé par $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS})$: $\begin{cases} x = 4\lambda + 2\mu \\ y = 2\mu \\ z = 4\mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

.

(b) Le système décrit le plan passant par $B(4\,;\,0\,;\,0)$ et dirigé par \vec{u}\,'(1\,;\,0\,;\,0) et \vec{v}\,'(-1\,;\,1\,;\,2). On a $B \in (SAB)$, avec $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ dans la question a). Ensuite, \vec{u}\,' = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} et \vec{v}\,' = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} sont dans la direction de (SAB), et ils ne sont pas colinéaires (ordonnées 0 et 1). Ce plan a donc la même direction que (SAB) et un point commun avec lui : les deux plans sont confondus.
Vrai : deux représentations différentes peuvent décrire le même plan.

Ex. 32 **(suite)**

(c) Le vecteur directeur $\vec{w}(2\,;\,1\,;\,2)$ s'écrit $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AS}$: y donne $2b=1$, donc $b=\frac{1}{2}$, et z vérifie : $4\times\frac{1}{2}=2$. Enfin x donne $4a+1=2$, donc $a=\frac{1}{4}$. Le point $R(1\,;\,3\,;\,5)$ de (d) : y donne $\mu=\frac{3}{2}$, x donne $4\lambda+3=1$, donc $\lambda=-\frac{1}{2}$, mais z vaut $4\times\frac{3}{2}=6\neq 5$: $R\notin(SAB)$. Faux : (d) a la bonne direction mais n'a aucun point dans le plan, elle est strictement parallèle à (SAB).

(d) $\mathcal{P}$ a la même direction que (SAB) et passe par C : $\begin{cases}x=4+4\lambda+2\mu\\y=4+2\mu\\z=4\mu\end{cases}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Pour T : y donne $\mu=1$ et x donne $4+4\lambda+2=0$, donc $\lambda=-\frac{3}{2}$. On teste z : $4\times 1=4$, c'est vérifié. Vrai : $T\in\mathcal{P}$.

(e) $\overrightarrow{DC}(4\,;\,0\,;\,0)$ et $\overrightarrow{DS}(2\,;\,-2\,;\,4)$ ne sont pas colinéaires (l'ordonnée de $\overrightarrow{DC}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{DS}$) : ils dirigent (SCD). Si $\overrightarrow{DS}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AS}$, les ordonnées donnent $2b=-2$, soit $b=-1$, et les cotes $4b=4$, soit $b=1$: c'est impossible. $\overrightarrow{DS}$ n'est pas dans la direction de (SAB), donc les deux plans n'ont pas la même direction. Faux : (SCD) et (SAB) ne sont pas parallèles
(ils ont d'ailleurs le point commun S).

Ex. 33 ★★★ **Deux représentations pour une verrière**

(a) $A(1\,;\,2\,;\,0)$, $\vec{u}(1\,;\,-1\,;\,1)$ (coefficients de λ) et $\vec{v}(2\,;\,0\,;\,1)$ (coefficients de μ). L'ordonnée de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$: ils ne sont pas colinéaires. Deux vecteurs non colinéaires dirigent un plan : $\mathcal{P}_1$ est bien un plan.

(b) Inès a pris le même paramètre pour λ et μ ($\lambda=\mu=t$) : $x=1+t+2t=1+3t$, $y=2-t$, $z=t+t=2t$. Elle n'obtient que les points pour lesquels $\lambda=\mu$. Son système est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}+\vec{v}\,(3\,;\,-1\,;\,2)$. Cette droite a un point de $\mathcal{P}_1$ et un vecteur directeur dans la direction de $\mathcal{P}_1$: elle est incluse dans $\mathcal{P}_1$, mais ce n'est pas le plan. Un plan demande deux paramètres distincts λ et μ.

(c) On cherche $(\lambda\,;\,\mu)$ avec $\begin{cases}1+\lambda+2\mu=4\\2-\lambda=1\\\lambda+\mu=2\end{cases}$. L'ordonnée donne $\lambda=1$, puis l'abscisse donne $1+1+2\mu=4$, soit $\mu=1$. Cote : $1+1=2$, vérifiée.
Donc $B\in\mathcal{P}_1$.

Ex. 33 **(suite)**

(d) \vec{u}\,'(3\,;\,-1\,;\,2) et \vec{v}\,'(-1\,;\,-1\,;\,0). La cote de \vec{v}\,' est nulle, pas celle de \vec{u}\,' : ils ne sont pas colinéaires. \vec{u}\,' = a\vec{u} + b\vec{v} : les ordonnées donnent $-a=-1$, soit $a=1$; les abscisses donnent $1+2b=3$, soit $b=1$; cotes : $1+1=2$, vérifiée.
Donc \vec{u}\,' = \vec{u} + \vec{v}. \vec{v}\,' = a\vec{u} + b\vec{v} : les ordonnées donnent $a=1$; les abscisses $1+2b=-1$, soit $b=-1$; cotes : $1-1=0$, vérifiée.
Donc \vec{v}\,' = \vec{u} - \vec{v}. Deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}_1$ engendrent cette direction : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont la même direction, ils sont parallèles. Ils ont le point commun B, donc ils sont confondus. Deux représentations différentes peuvent décrire le même plan.

(e) $(\delta)\parallel\mathcal{P}_1$ si et seulement si $\vec{w}$ s'écrit $a\vec{u}+b\vec{v}$. Les ordonnées donnent $-a=2$, soit $a=-2$; les cotes donnent $a+b=1$, soit $b=3$; les abscisses imposent $m=a+2b=-2+6=4$. Pour $m=4$, $\vec{w}=-2\vec{u}+3\vec{v}$ est dans la direction de $\mathcal{P}_1$. De plus $B\in\mathcal{P}_1$ (question c)). La droite (δ) a un point de $\mathcal{P}_1$ et un vecteur directeur dans la direction de $\mathcal{P}_1$: elle est incluse dans $\mathcal{P}_1$.

Ex. 34 ★★★ **La charpente d'un abri cubique**

(a) $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$. $\overrightarrow{BD}(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1\,;\,0\,;\,1)$: la cote de $\overrightarrow{BD}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{BE}$, donc ils ne sont pas colinéaires et B, D, E ne sont pas alignés. Le plan (BDE) passe par B et il est dirigé par $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE})$: $\begin{cases}x=1-\lambda-\mu\\y=\lambda\\z=\mu\end{cases}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

(b) $\overrightarrow{CF}(1-1\,;\,0-1\,;\,1-0)$, soit $\overrightarrow{CF}(0\,;\,-1\,;\,1)$. On cherche $\overrightarrow{CF}=a\overrightarrow{BD}+b\overrightarrow{BE}$: les ordonnées donnent $a=-1$, les cotes $b=1$; abscisses : $-a-b=1-1=0$, vérifiée.
Donc $\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BE}$: $\overrightarrow{CF}$ appartient à la direction de (BDE).

(c) $I\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$. L'ordonnée donne $\lambda=\frac{1}{2}$, la cote $\mu=\frac{1}{2}$; abscisse : $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$, vérifiée.
Donc $I\in(BDE)$. La droite (d) a un point du plan (BDE) et un vecteur directeur $\overrightarrow{CF}$ dans la direction de (BDE) (question précédente). Elle est donc incluse dans (BDE).

Ex. 34 **(suite)**

(d) Tom n'a pas raison : il faut aussi un point du plan. On teste $C(1\,;\,1\,;\,0)$: l'ordonnée donne $\lambda = 1$, la cote $\mu = 0$; l'abscisse vaut alors $1 - 1 - 0 = 0 \neq 1$.
Donc $C \notin (BDE)$. La droite (CF) a un vecteur directeur dans la direction de (BDE) mais aucun point commun avec ce plan : elle est strictement parallèle à (BDE).

(e) $\mathcal{Q}$ a la même direction que (BDE) : $\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. $F(1\,;\,0\,;\,1)$: l'ordonnée donne $\lambda = -1$, la cote $\mu = 1$; abscisse : $1 + 1 - 1 = 1$, vérifiée, donc $F \in \mathcal{Q}$. $H(0\,;\,1\,;\,1)$: $\lambda = 0$, $\mu = 1$; abscisse : $1 - 0 - 1 = 0$, vérifiée, donc $H \in \mathcal{Q}$.
$\overrightarrow{CF}(0\,;\,-1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{CH}(-1\,;\,0\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires (l'abscisse de $\overrightarrow{CF}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{CH}$), donc C, F, H ne sont pas alignés et $\mathcal{Q} = (CFH)$. Ainsi (CFH) et (BDE) ont la même direction : ils sont parallèles.
Comme $C \notin (BDE)$, ils sont strictement parallèles.

Ex. 35 ★★★ **La nappe de câbles d'un pont**

(a) $\overrightarrow{AB}(2\,;\,1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;\,2\,;\,2)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, les abscisses donnent $k = -\frac{1}{2}$ et les ordonnées $k = 2$: c'est impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B, C ne sont pas alignés. (ABC) passe par A et il est dirigé par $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 1 - \lambda + 2\mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\overrightarrow{AD}(m - 2\,;\,5\,;\,1)$. On cherche $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.
Ordonnées et cotes : $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ -a + 2b = 1 \end{cases}$. On additionne : $4b = 6$, soit $b = \frac{3}{2}$, puis $a = 5 - 3 = 2$. Les abscisses imposent $m - 2 = 2 \times 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, soit $m = \frac{9}{2}$. Pour $m = \frac{9}{2}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$: les points A, B, C, D sont coplanaires et $D \in (ABC)$.

(c) Abscisses et ordonnées : $\begin{cases} 2a - b = 1 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$. La première donne $b = 2a - 1$, puis $a + 4a - 2 = 1$, donc $a = \frac{3}{5}$ et $b = \frac{1}{5}$. Cotes : $-a + 2b = -\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = -\frac{1}{5} \neq 1$.
Donc $\vec{w}$ n'est pas dans la direction de (ABC). Une droite est parallèle à un plan si et seulement si son vecteur directeur est dans la direction du plan. Ici ce n'est pas le cas : (Δ) est sécante à (ABC).

Ex. 35 **(suite)**

(d) $(\Delta) : x = t$, $y = 1 + t$, $z = -1 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Le paramètre t est distinct de λ et de μ. On résout $\begin{cases} t = 2 + 2\lambda - \mu \\ 1 + t = \lambda + 2\mu \\ -1 + t = 1 - \lambda + 2\mu \end{cases}$. On remplace t dans les deux dernières équations : $3 + 2\lambda - \mu = \lambda + 2\mu$, soit $\lambda - 3\mu = -3$; et $1 + 2\lambda - \mu = 1 - \lambda + 2\mu$, soit $\lambda = \mu$.
Donc $-2\mu = -3$, $\mu = \frac{3}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$, puis $t = 2 + 3 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.
On obtient $K\left(\frac{7}{2}\,;\,\frac{9}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$. Vérification dans (ABC) : $y = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$ et $z = 1 - \frac{3}{2} + 3 = \frac{5}{2}$.

(e) Les deux premières équations $\begin{cases} 2 + 2\lambda - \mu = 3 \\ \lambda + 2\mu = 3 \end{cases}$ donnent bien $\lambda = 1$ et $\mu = 1$. Mais la troisième décide : $z = 1 - 1 + 2 \times 1 = 2 \neq 3$.
Donc $G \notin (ABC)$. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}(1\,;\,3\,;\,1)$ est dans la direction de (ABC) et la droite passe par $G \notin (ABC)$: elle est strictement parallèle à (ABC).

6. *Positions relatives de droites et de plans*

Ex. 36 ★☆☆ **Câbles d'un pont : parallèles ou non ?**

(a) $C(4\,;\,2\,;\,0)$ et $G(4\,;\,2\,;\,2)$. M est le milieu de $[AB]$: $M(2\,;\,0\,;\,0)$. N est le milieu de la diagonale $[BG]$: $N\left(\frac{4+4}{2}\,;\,\frac{0+2}{2}\,;\,\frac{0+2}{2}\right)$, soit $N(4\,;\,1\,;\,1)$.

(b) $\overrightarrow{AG}(4\,;\,2\,;\,2)$ et $\overrightarrow{EC}(4\,;\,2\,;\,-2)$. Sur les abscisses, $k = \frac{4}{4} = 1$. Ordonnées : $2 \times 1 = 2$, ça marche. Cotes : $2 \times 1 = 2 \neq -2$. Il n'y a pas de k commun aux trois coordonnées : les vecteurs ne sont pas colinéaires (deux coordonnées ne suffisent pas).

(c) $\overrightarrow{MN}(2\,;\,1\,;\,1)$. Sur les abscisses, $k = \frac{4}{2} = 2$, puis $1 \times 2 = 2$ et $1 \times 2 = 2$.
Donc $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{MN}$ et $(MN) \parallel (AG)$. On teste M : $\overrightarrow{AM}(2\,;\,0\,;\,0)$. Sur les abscisses, $k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, mais $2 \times \frac{1}{2} = 1 \neq 0$.
Donc $M \notin (AG)$: les droites sont strictement parallèles.

(d) Sur les abscisses, $k = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$. Ordonnées et cotes : $2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -3$.
Donc $\vec{v} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et $(d) \parallel (AG)$. On teste P : $\overrightarrow{AP}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, avec $k = \frac{1}{4}$, puis $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ pour les ordonnées et pour les cotes.
Donc $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$ et $P \in (AG)$: les droites sont confondues.

Ex. 36 **(suite)**

(e) Non. $\overrightarrow{BD}(-4\,;\,2\,;\,0)$. Sur les abscisses, $k = \frac{-4}{4} = -1$, mais $2 \times (-1) = -2 \neq 2$: (AG) et (BD) ne sont pas parallèles. On prend $(AG) : x = 4t$, $y = 2t$, $z = 2t$ et $(BD) : x = 4 - 4s$, $y = 2s$, $z = 0$. Les cotes donnent $t = 0$, les abscisses $s = 1$, et les ordonnées $0 \neq 2$. Il n'y a pas de point commun : les droites sont non coplanaires. Dans l'espace, deux droites non parallèles ne sont pas forcément sécantes.

Ex. 37 ★☆☆ **Une face de pièce dans un logiciel 3D**

(a) Abscisses : $a = 2$. Ordonnées : $b = 3$. Cotes : $2 \times 2 + 3 \times (-1) = 1$, ça marche.
Donc $\vec{w_1} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$: $\vec{w_1}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$.

(b) Abscisses : $a = 1$. Ordonnées : $b = 2$. Cotes : $2 \times 1 + 2 \times (-1) = 0 \neq 3$.
Donc $\vec{w_2}$ ne s'écrit pas $a\vec{u} + b\vec{v}$.

(c) $\vec{w_1}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$, donc $(d_1) \parallel \mathcal{P}$. On teste B : $2 + \lambda = 3$ donne $\lambda = 1$, et $\mu = 3$. Alors $z = -1 + 2 \times 1 - 3 = -2 \neq 0$, donc $B \notin \mathcal{P}$. (d_1) est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

(d) $(d_2) \parallel \mathcal{P}$, car $\vec{w_1}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$. On teste E : $\lambda = 1$ et $\mu = -2$. Alors $z = -1 + 2 \times 1 - (-2) = 3$, ça marche.
Donc $E \in \mathcal{P}$: (d_2) est incluse dans $\mathcal{P}$.

(e) $(d_3) : x = 3 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = -3 + 3t$. Comme $\vec{w_2}$ n'est pas dans la direction de $\mathcal{P}$, (d_3) coupe $\mathcal{P}$ en un point. On résout : $3 + t = 2 + \lambda$ donne $\lambda = 1 + t$, et $1 + 2t = \mu$. Les cotes donnent $-3 + 3t = -1 + 2(1 + t) - (1 + 2t) = 0$, donc $t = 1$. Point : $(4\,;\,3\,;\,0)$.
Contrôle dans $\mathcal{P}$ avec $\lambda = 2$, $\mu = 3$: $(2 + 2\,;\,3\,;\,-1 + 4 - 3) = (4\,;\,3\,;\,0)$.

Ex. 38 ★★☆ **Trajectoires de drones**

(a) $\vec{u}(2\,;\,-1\,;\,1)$ dirige (d_1) et $\vec{v}(1\,;\,1\,;\,-1)$ dirige (d_2). Sur les abscisses, $k = \frac{1}{2}$, mais $\frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2} \neq 1$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.

(b) Léo utilise le même paramètre t pour les deux droites. Il cherche donc un point atteint pour la même valeur du paramètre. Or un point commun peut correspondre à des valeurs différentes. Il faut nommer les paramètres t et s : ses calculs ($3 - 5 = -2$ et $2 + 5 = 7$) ne prouvent rien.

Ex. 38 **(suite)**

(c) On résout $-1 + 2t = 4 + s$ et $3 - t = 2 + s$. La deuxième équation donne $s = 1 - t$. La première devient $-1 + 2t = 5 - t$, donc $3t = 6$: $t = 2$ et $s = -1$. Test des cotes : $z = t = 2$ et $1 - s = 1 - (-1) = 2$, ça marche. Les droites sont sécantes en $I(3\,;\,1\,;\,2)$.
Contrôle : $(-1 + 4\,;\,3 - 2\,;\,2)$ pour $t = 2$ et $(4 - 1\,;\,2 - 1\,;\,1 + 1)$ pour $s = -1$ donnent bien I.

(d) $\vec{w}(1\,;\,0\,;\,2)$ dirige (d_3). Son ordonnée est nulle mais pas son abscisse, alors que $\vec{v}$ a une ordonnée non nulle : $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. On résout : les ordonnées donnent $2 + s = 1$, soit $s = -1$; les abscisses donnent $r = 4 + (-1) = 3$. Test des cotes : $1 - (-1) = 2$ et $5 + 2 \times 3 = 11$, donc $2 \neq 11$. Pas de solution : les droites ne sont ni parallèles ni sécantes. Elles sont non coplanaires.

Ex. 39 ★★☆ **Plans dans une verrière cubique**

(a) $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $H(0\,;\,1\,;\,1)$. $\overrightarrow{BD}(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1\,;\,0\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires : ils dirigent (BDE). $\overrightarrow{FH}(-1\,;\,1\,;\,0) = \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FC}(0\,;\,1\,;\,-1) = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE}$. Les droites (FH) et (FC) sont sécantes en F et parallèles à (BDE), donc $(CFH) \parallel (BDE)$. Ensuite, on cherche $\overrightarrow{BC}(0\,;\,1\,;\,0) = a\overrightarrow{BD} + b\overrightarrow{BE}$: les ordonnées donnent $a = 1$, les cotes $b = 0$, et les abscisses $-1 \neq 0$.
Donc $C \notin (BDE)$: les plans sont strictement parallèles.

(b) $a\overrightarrow{BD} + b\overrightarrow{BE} = (-a - b\,;\,a\,;\,b)$. Pour obtenir $(1\,;\,0\,;\,0)$, il faut $a = 0$ et $b = 0$, puis $0 \neq 1$ sur les abscisses.
Donc $\overrightarrow{AB}$ n'est pas dans la direction de (BDE). Il est pourtant dans la direction de (ABG) : les deux plans n'ont pas la même direction. Ils sont sécants.

(c) $K(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2})$. On a $\overrightarrow{BK}(-1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$, donc $K \in (BDE)$. Avec $\overrightarrow{AG}(1\,;\,1\,;\,1)$, on cherche $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AG}$: les ordonnées donnent $b = \frac{1}{2}$ (les cotes le confirment), et les abscisses $a + \frac{1}{2} = 0$, soit $a = -\frac{1}{2}$.
Donc $K \in (ABG)$. B est aussi commun aux deux plans et $B \neq K$: leur droite d'intersection est (BK).

Ex. 39 **(suite)**

(d) Le milieu de $[BG]$ est $M(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2})$, et c'est aussi le milieu de $[CF]$.
Donc $M \in (BG) \subset (BDG)$ et $M \in (CF) \subset (CFH)$.
Avec $\overrightarrow{BG}(0\,;\,1\,;\,1)$, on cherche $\overrightarrow{BC}(0\,;\,1\,;\,0) = a\overrightarrow{BD} + b\overrightarrow{BG}$: les abscisses donnent $a = 0$, les cotes $b = 0$, et les ordonnées $0 \neq 1$.
Donc $C \notin (BDG)$: les plans sont distincts. Deux plans distincts qui ont le point commun M sont sécants.

(e) $(BD) \subset (BDG)$, $(FH) \subset (CFH)$ et $(BD) \parallel (FH)$, car $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$. Les plans sont sécants (question précédente). D'après le théorème du toit, Δ est parallèle à (BD). Δ est donc la parallèle à (BD) passant par M. Elle passe aussi par $M + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = (\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,\frac{1}{2})$, le centre de la face $DCGH$.

Ex. 40 ★★★ **Module de charpente : théorème du toit et section**

(a) $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$, $J\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, $H(0\,;\,1\,;\,1)$. On a $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{BD}(-1\,;\,1\,;\,0)$. Abscisses : $-1 = k \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ donne $k = 2$. Ordonnées : $2 \times \frac{1}{2} = 1$, vérifiée. Cotes : $2 \times 0 = 0$, vérifiée.
Donc $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$: les vecteurs sont colinéaires, donc $(IJ) \parallel (BD)$.

(b) $\overrightarrow{HB}(1\,;\,-1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{HD}(0\,;\,0\,;\,-1)$ ne sont pas colinéaires, et $\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2}\,;\,-1\,;\,-1\right)$. Si $\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{HB} + b\overrightarrow{HD}$, les abscisses donnent $a = \frac{1}{2}$ et les ordonnées $-a = -1$, soit $a = 1$: c'est une contradiction.
Donc $I \notin (BDH)$. Ensuite, $\overrightarrow{HJ}\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$: si $\overrightarrow{HJ} = k\overrightarrow{HI}$, les abscisses donnent $k = 0$, mais les cotes donnent $-1 \neq 0$. Les points H, I, J ne sont donc pas alignés et définissent un plan. Les plans (HIJ) et (BDH) sont distincts (I est dans l'un mais pas dans l'autre) et ont le point commun H : ils sont sécants selon une droite qui passe par H.

(c) On a $(IJ) \subset (HIJ)$, $(BD) \subset (BDH)$ et $(IJ) \parallel (BD)$, et les deux plans sont sécants selon Δ. D'après le théorème du toit, Δ est parallèle à (BD) et passe par H. Or $\overrightarrow{HF}(1\,;\,-1\,;\,0) = -\overrightarrow{BD}$, donc F est sur la parallèle à (BD) qui passe par H. Conclusion : $\Delta = (HF)$.

Ex. 40 **(suite)**

(d) Cherchons a et b tels que $\overrightarrow{HF} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$.
Abscisses : $1 = \frac{a}{2}$, donc $a = 2$. Cotes : $0 = -a - b$, donc $b = -2$. Test des ordonnées : $-2 - \frac{1}{2} \times (-2) = -1$, vérifiée.
Donc $\overrightarrow{HF} = 2\overrightarrow{HI} - 2\overrightarrow{HJ}$ et $F \in (HIJ)$, ce qui confirme $\Delta = (HF)$. Le plan coupe la face du bas selon $[IJ]$, la face $ABFE$ selon $[IF]$, la face du haut selon $[FH]$ et la face $ADHE$ selon $[HJ]$. La section est donc le quadrilatère $IFHJ$. Comme $\overrightarrow{HF} = -2\overrightarrow{IJ}$, on a $(IJ) \parallel (HF)$ et $HF = 2IJ$: la section est un trapèze, et ce n'est pas un parallélogramme.

Ex. 40 **(suite)**

(e) $C(1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{CE}(-1\,;\,-1\,;\,1)$. Si $\overrightarrow{CE} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$, les abscisses donnent $\frac{a}{2} = -1$, soit $a = -2$. Les cotes donnent $-a - b = 1$, soit $b = 1$. Test des ordonnées : $-a - \frac{b}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq -1$.
Donc $\overrightarrow{CE}$ n'est pas dans la direction du plan, et (CE) coupe (HIJ) en un point. On écrit (CE) : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ et (HIJ) : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 - \lambda - \frac{1}{2}\mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$. Les abscisses donnent $\lambda = 2 - 2t$. Les ordonnées donnent $-1 + 2t - \frac{\mu}{2} = 1 - t$, soit $\mu = -4 + 6t$. Les cotes donnent $1 - (2 - 2t) - (-4 + 6t) = t$, soit $3 - 4t = t$, d'où $t = \frac{3}{5}$. Alors $\lambda = \frac{4}{5}$ et $\mu = -\frac{2}{5}$. Le point d'intersection est $\left(\frac{2}{5}\,;\,\frac{2}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right)$. Vérification dans le plan : $x = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$; $y = 1 - \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$; $z = 1 - \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Ex. 41 ★★★ **Tente pyramidale : plans, mât et intersection**

(a) Pour $\lambda = \mu = 0$, le plan de Nina passe par $(1\,;\,-1\,;\,-2)$ et non par S : elle a inversé les constantes (les coordonnées de S) et les coefficients de λ. Une représentation correcte : $\overrightarrow{SB}(2\,;\,-2\,;\,-4)$ et $\overrightarrow{SC}(2\,;\,2\,;\,-4)$ ne sont pas colinéaires, et on prend $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$, soit $\vec{u}(1\,;\,-1\,;\,-2)$, et $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$, soit $\vec{v}(1\,;\,1\,;\,-2)$. Alors (SBC) : $\begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = 4 - 2\lambda - 2\mu \end{cases}$. Le point $(1\,;\,-1\,;\,-2)$ est-il dans (SBC) ? Abscisses : $\lambda + \mu = -1$. Ordonnées : $\mu - \lambda = -3$. On obtient $\mu = -2$ et $\lambda = 1$. Test des cotes : $4 - 2 + 4 = 6 \neq -2$. Ce point n'est pas dans (SBC), donc Nina a tort.

Ex. 41 (suite)

(b) $M(1\,;\,1\,;\,2)$ et $Q(1\,;\,3\,;\,2)$, donc $\overrightarrow{MQ}(0\,;\,2\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BC}(0\,;\,4\,;\,0) = 2\overrightarrow{MQ}$. Ainsi $(MQ) \parallel (BC)$ avec $(BC) \subset (SBC)$. Une droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan, donc $(MQ) \parallel (SBC)$. Le point M est-il dans le plan ? Abscisses : $\lambda + \mu = -1$. Ordonnées : $\mu - \lambda = -1$. On obtient $\mu = -1$ et $\lambda = 0$. Test des cotes : $4 - 0 + 2 = 6 \neq 2$.
Donc $M \notin (SBC)$, et l'affirmation est VRAIE : (MQ) est strictement parallèle à (SBC).

(c) Si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$: les abscisses donnent $a + b = 1$ et les ordonnées $-a + b = 0$, d'où $a = b = \frac{1}{2}$. Test des cotes : $-2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = -2 \neq 1$.
Donc $\vec{w}$ n'est pas dans la direction de (SBC), et le mât coupe le plan en un point. Avec $K(0\,;\,2\,;\,0)$, le mât est porté par $\begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$. Système : $t = 2 + \lambda + \mu$, $2 = 2 - \lambda + \mu$, $t = 4 - 2\lambda - 2\mu$. La deuxième équation donne $\mu = \lambda$. Alors $2 + 2\lambda = 4 - 4\lambda$, d'où $\lambda = \frac{1}{3}$, puis $t = \frac{8}{3}$. Le point d'intersection est $\left(\frac{8}{3}\,;\,2\,;\,\frac{8}{3}\right)$.
Vérification dans le plan : $x = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; $y = 2$; $z = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

Ex. 41 (suite)

(d) $N(3\,;\,1\,;\,2)$ est sur $[SB]$, donc N appartient aux deux plans. Si les plans étaient parallèles, ce point commun les rendrait confondus. Or $M \in (MNQ)$ et $M \notin (SBC)$ (démontré dans le vrai ou faux). Les plans ne sont donc pas parallèles : ils sont sécants selon une droite Δ qui passe par N. On a $(MQ) \subset (MNQ)$, $(BC) \subset (SBC)$ et $(MQ) \parallel (BC)$. D'après le théorème du toit, Δ est la parallèle à (BC) qui passe par N. Soit $P(3\,;\,3\,;\,2)$ le milieu de $[SC]$: on a $\overrightarrow{NP}(0\,;\,2\,;\,0) = \overrightarrow{MQ}$, donc $\Delta = (NP)$, de représentation $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + r \\ z = 2 \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}$.

Ex. 42 ★★★ Faisceaux laser et paramètre m

(a) On a $\vec{u}(1\,;\,-1\,;\,2)$, vecteur directeur de (d_1), et $\vec{w}(-2\,;\,2\,;\,-4)$, vecteur directeur de (d_2). Abscisses : $k = \frac{-2}{1} = -2$. Ordonnées : $\frac{2}{-1} = -2$. Cotes : $\frac{-4}{2} = -2$. Donc $\vec{w} = -2\vec{u}$: les droites sont parallèles. On teste le point $(3\,;\,0\,;\,7)$ de (d_2) dans (d_1). Abscisses : $1 + t = 3$, donc $t = 2$. Ordonnées : $2 - 2 = 0$, vérifiée. Cotes : $3 + 4 = 7$, vérifiée. Les droites (d_1) et (d_2) sont confondues.

Ex. 42 (suite)

(b) Le vecteur $\vec{v}(2\,;\,1\,;\,1)$ dirige (Δ_m) quel que soit m, et $\frac{2}{1} = 2 \neq \frac{1}{-1} = -1$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires, et les droites ne sont jamais parallèles.
Système : $1 + t = m + 2s$, $2 - t = 1 + s$, $3 + 2t = -1 + s$. Les deux dernières équations ne dépendent pas de m. La deuxième donne $s = 1 - t$, puis la troisième $3 + 2t = -t$: $t = -1$ et $s = 2$. La première équation devient $0 = m + 4$. Les droites sont donc sécantes si et seulement si $m = -4$. Le point commun est $(0\,;\,3\,;\,1)$. Vérification dans (Δ_{-4}) : $-4 + 4 = 0$; $1 + 2 = 3$; $-1 + 2 = 1$. Vérification dans (d_1) : $1 - 1 = 0$; $2 + 1 = 3$; $3 - 2 = 1$.

(c) Non. D'après la question précédente, (d_1) et (Δ_m) ne sont jamais parallèles et ne sont sécantes que pour $m = -4$. Pour $m = 0$, elles ne sont ni parallèles ni sécantes : elles sont non coplanaires. Dans l'espace, deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles.

(d) Le plan $\mathcal{P}$ est dirigé par $\vec{p}(1\,;\,1\,;\,0)$ et $\vec{q}(1\,;\,0\,;\,-1)$, qui ne sont pas colinéaires. Si $\vec{u} = a\vec{p} + b\vec{q}$, les ordonnées donnent $a = -1$ et les cotes $-b = 2$, soit $b = -2$. Test des abscisses : $a + b = -3 \neq 1$.
Donc $\vec{u}$ n'est pas dans la direction de $\mathcal{P}$, et (d_1) coupe $\mathcal{P}$ en un point. Système : $1 + t = 2 + \lambda + \mu$, $2 - t = \lambda$, $3 + 2t = 1 - \mu$. On obtient $\lambda = 2 - t$ et $\mu = -2 - 2t$. Alors $1 + t = 2 - 3t$, d'où $t = \frac{1}{4}$. On en déduit $\lambda = \frac{7}{4}$ et $\mu = -\frac{5}{2}$. Le point d'intersection est $\left(\frac{5}{4}\,;\,\frac{7}{4}\,;\,\frac{7}{2}\right)$.
Vérification dans $\mathcal{P}$: $x = 2 + \frac{7}{4} - \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$; $y = \frac{7}{4}$; $z = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

7. Sujets type bac

Ex. 43 ★☆☆ Lire un cube de bac : sommets, milieux et quarts

(a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $C(1\,;\,1\,;\,0)$.
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $G(1\,;\,1\,;\,1)$.

(b) $B(1\,;\,0\,;\,0)$ et $F(1\,;\,0\,;\,1)$, donc $I\left(1\,;\,0\,;\,\frac{0+1}{2}\right)$, soit $I\left(1\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

(c) $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{EH}(0\,;\,1\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{EJ}\left(0\,;\,\frac{1}{4}\,;\,0\right)$ et $J\left(0\,;\,\frac{1}{4}\,;\,1\right)$.

(d) K est le milieu de $[AC]$: $K\left(\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\,;\,0\right)$, soit $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

(e) $\overrightarrow{IJ}\left(0-1\,;\,\frac{1}{4}-0\,;\,1-\frac{1}{2}\right)$, soit $\overrightarrow{IJ}\left(-1\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

(f) $M\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\,;\,\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\,;\,\frac{1+0}{2}\right)$, soit $M\left(\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Ex. 44 ★☆☆ **Une droite dans un pavé : sur la droite ou sur le segment ?**

(a) $G(2\,;\,4\,;\,2)$, car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. $I\left(\frac{0+2}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$, soit $I(1\,;\,0\,;\,0)$.

(b) $\overrightarrow{IG}(2-1\,;\,4-0\,;\,2-0)$, soit $\overrightarrow{IG}(1\,;\,4\,;\,2)$.

(c) $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(d) $\frac{3}{2} = 1+t$ donne $t = \frac{1}{2}$. Alors $y = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ et $z = 2 \times \frac{1}{2} = 1$: les deux autres coordonnées conviennent. Donc $M \in (IG)$.

(e) Non. Avec x : $\frac{5}{2} = 1+t$ donne $t = \frac{3}{2}$. Avec y : $6 = 4t$ donne aussi $t = \frac{3}{2}$. Mais avec z : $2 = 2t$ donne $t = 1 \neq \frac{3}{2}$. Aucune valeur de t ne vérifie les trois équations, donc $N \notin (IG)$. Il faut toujours tester la troisième coordonnée.

(f) $3 = 1+t$ donne $t = 2$. Alors $y = 4 \times 2 = 8$ et $z = 2 \times 2 = 4$: $P \in (IG)$. Mais le segment $[IG]$ correspond à $t \in [0\,;\,1]$. Comme $t = 2$, P n'est pas sur le segment $[IG]$.

(g) $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $y = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$, $z = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$: on obtient le point $\left(\frac{1}{2}\,;\,-2\,;\,-1\right)$.

Ex. 45 ★★☆ **Section d'un cube par le plan (IJK), arête par arête**

(a) $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$, $J\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$. Donc $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{IK}(0\,;\,1\,;\,1)$. Si $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IJ}$, les abscisses donnent $0 = \frac{k}{2}$, donc $k = 0$. Les ordonnées donnent alors $1 = 0$: c'est impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

(b) Deux vecteurs non colinéaires dirigent un plan. Le plan (IJK) passe par I et est dirigé par $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2}\lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(c) On résout $\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ 1 = \frac{1}{2}\lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases}$. On trouve $\lambda = 1$, puis $\mu = \frac{1}{2}$, puis $t = \frac{1}{2}$.
Donc $L\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$. Comme $t \in [0\,;\,1]$, L est sur l'arête $[CG]$: c'est son milieu.

(d) On résout $\begin{cases} 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ 1 = \frac{1}{2}\lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases}$. On trouve $\lambda = -1$, puis $\mu = \frac{3}{2}$, puis $t = \frac{3}{2}$. Le plan coupe la droite (DH) au point $\left(0\,;\,1\,;\,\frac{3}{2}\right)$. Mais $t \notin [0\,;\,1]$: ce point est hors du cube. Le plan (IJK) ne coupe donc pas l'arête $[DH]$.

Ex. 45 **(suite)**

(e) $M\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, donc $\overrightarrow{KM}\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,0\right) = -\overrightarrow{IJ}$. Les vecteurs sont colinéaires, donc $(IJ) \parallel (KM)$. C'est cohérent : un plan coupe les faces opposées $ABCD$ et $EFGH$ selon des droites parallèles. Le plan coupe les six faces, selon $[IJ]$, $[JL]$, $[LK]$, $[KM]$, $[MN]$ et $[NI]$. Conclusion : la section est l'hexagone $IJLKMN$, dont les côtés $[IJ]$ et $[KM]$ sont parallèles.

Ex. 46 ★★☆ **Maquette d'une tour : alignement, droites, plan et coplanarité**

(a) $G(2\,;\,2\,;\,4)$ et $I\left(\frac{0+2}{2}\,;\,0\,;\,4\right)$, soit $I(1\,;\,0\,;\,4)$. On a $C(2\,;\,2\,;\,0)$ et $\overrightarrow{CG}(0\,;\,0\,;\,4)$, donc $\overrightarrow{CJ}(0\,;\,0\,;\,1)$ et $J(2\,;\,2\,;\,1)$. Enfin, $D(0\,;\,2\,;\,0)$ et $H(0\,;\,2\,;\,4)$, donc $K(0\,;\,2\,;\,2)$.

(b) $\overrightarrow{AI}(1\,;\,0\,;\,4)$ et $\overrightarrow{AG}(2\,;\,2\,;\,4)$. Si $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$, les abscisses donnent $k = 2$. Les ordonnées donnent alors $2 = 2 \times 0 = 0$: c'est faux. Les vecteurs ne sont pas colinéaires. Conclusion : A, I et G ne sont pas alignés.

(c) $\overrightarrow{IJ}(1\,;\,2\,;\,-3)$, donc (IJ) : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 4-3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. De même, (AG) : $\begin{cases} x = 2s \\ y = 2s \\ z = 4s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires : $k = 2$ avec les abscisses, mais $2 \neq 2 \times 2$ avec les ordonnées. On résout le système. Les ordonnées donnent $2t = 2s$, soit $s = t$. Les abscisses donnent $1 + t = 2t$, soit $t = 1$ et $s = 1$. Test des cotes : $4 - 3 \times 1 = 1$ mais $4 \times 1 = 4$, et $1 \neq 4$. Le système n'a pas de solution. Conclusion : les droites (IJ) et (AG) sont non coplanaires.

(d) (ABC) : $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\mu \\ z = 0 \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ a une cote nulle. Or la cote de $\overrightarrow{IJ}$ vaut -3.
Donc $\overrightarrow{IJ}$ n'est pas une combinaison de ces vecteurs, et (IJ) coupe le plan. On résout $\begin{cases} 1+t = 2\lambda \\ 2t = 2\mu \\ 4-3t = 0 \end{cases}$. On trouve $t = \frac{4}{3}$, puis $\lambda = \frac{7}{6}$ et $\mu = \frac{4}{3}$. Conclusion : $R\left(\frac{7}{3}\,;\,\frac{8}{3}\,;\,0\right)$.

Ex. 46 **(suite)**

(e) $\overrightarrow{IJ}(1\,;\,2\,;\,-3)$, $\overrightarrow{IK}(-1\,;\,2\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{IL}\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{1}{2}\right)$. On cherche a et b tels que $\overrightarrow{IL} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK}$. Les abscisses donnent $a - b = 1$ et les ordonnées $2a + 2b = 0$.
Donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$. On teste les cotes : $-3 \times \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. C'est vérifié.
Donc $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IK}$. Conclusion : les points I, J, K et L sont coplanaires.

Ex. 47 ★★★ **Une plaque dans un abri cubique : section construite pas à pas**

(a) $D(0\,;\,1\,;\,0)$. I est le milieu de $[EF]$, avec $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et $F(1\,;\,0\,;\,1)$: $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$. J est le milieu de $[FG]$, avec $G(1\,;\,1\,;\,1)$: $J\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$. On a $\overrightarrow{DI}\left(\frac{1}{2}\,;\,-1\,;\,1\right)$ et $\overrightarrow{DJ}\left(1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,1\right)$. Si $\overrightarrow{DJ} = k\overrightarrow{DI}$, les cotes donnent $k = 1$, mais les abscisses donnent $1 = \frac{1}{2}k$, soit $k = 2$: c'est impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc D, I, J ne sont pas alignés : ils définissent un plan.

(b) Pour $\lambda = \mu = 0$, on obtient $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$: c'est le point I. On a $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, donc $\vec{u}(1\,;\,1\,;\,0) = 2\overrightarrow{IJ}$. On a $\overrightarrow{ID}\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,-1\right)$, donc $\vec{v}(-1\,;\,2\,;\,-2) = 2\overrightarrow{ID}$. Si $\vec{v} = k\vec{u}$, les cotes donnent $-2 = 0$: c'est impossible. Les vecteurs ne sont donc pas colinéaires, et deux vecteurs non colinéaires dirigent un plan. Le système décrit le plan passant par I et dirigé par $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{ID}$: c'est une représentation paramétrique de (DIJ).

(c) $(AE) : x = 0, y = 0, z = t, t \in \mathbb{R}$. Système : $\frac{1}{2} + \lambda - \mu = 0$, $\lambda + 2\mu = 0$, $1 - 2\mu = t$. La deuxième équation donne $\lambda = -2\mu$, et la première devient $\frac{1}{2} - 3\mu = 0$.
Donc $\mu = \frac{1}{6}$, $\lambda = -\frac{1}{3}$ et $t = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. On obtient $M\left(0\,;\,0\,;\,\frac{2}{3}\right)$, et $t \in [0\,;\,1]$, donc $M \in [AE]$. $(CG) : x = 1, y = 1, z = t', t' \in \mathbb{R}$. Les équations $\lambda - \mu = \frac{1}{2}$ et $\lambda + 2\mu = 1$ donnent $3\mu = \frac{1}{2}$, donc $\mu = \frac{1}{6}$, $\lambda = \frac{2}{3}$ et $t' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. On obtient $N\left(1\,;\,1\,;\,\frac{2}{3}\right)$, et $t' \in [0\,;\,1]$, donc $N \in [CG]$.

(d) $(BF) : x = 1, y = 0, z = t, t \in \mathbb{R}$. Les équations $\frac{1}{2} + \lambda - \mu = 1$ et $\lambda + 2\mu = 0$ donnent $\lambda = -2\mu$, puis $-3\mu = \frac{1}{2}$.
Donc $\mu = -\frac{1}{6}$, $\lambda = \frac{1}{3}$ et $t = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. La droite (BF) coupe bien le plan, au point $\left(1\,;\,0\,;\,\frac{4}{3}\right)$. Mais $t = \frac{4}{3} \notin [0\,;\,1]$: ce point est au-dessus de F, en dehors de l'arête. Lina a tort : la plaque ne traverse pas l'arête $[BF]$.

Ex. 47 **(suite)**

(e) Le plan coupe la face $EFGH$ selon $[IJ]$, la face $BCGF$ selon $[JN]$, la face $CDHG$ selon $[ND]$, la face $ADHE$ selon $[DM]$ et la face $ABFE$ selon $[MI]$. Il ne touche la face $ABCD$ qu'en D. La section est donc le pentagone $DMIJN$. Les faces $ABFE$ et $DCGH$ sont parallèles : le plan (DIJ) les coupe selon deux droites parallèles, donc $(MI) \parallel (DN)$. Vérification : $\overrightarrow{MI}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{DN}\left(1\,;\,0\,;\,\frac{2}{3}\right) = 2\overrightarrow{MI}$. De même, les faces $ADHE$ et $BCGF$ sont parallèles, donc $(MD) \parallel (JN)$.
Vérification : $\overrightarrow{MD}\left(0\,;\,1\,;\,-\frac{2}{3}\right) = 2\overrightarrow{JN}$, avec $\overrightarrow{JN}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$. Conclusion : la section est un pentagone qui a deux paires de côtés parallèles.

Ex. 48 ★★★ **Trois drones dans un hangar : croisement ou pas ?**

(a) $F(4\,;\,0\,;\,2)$, $G(4\,;\,2\,;\,2)$ et $H(0\,;\,2\,;\,2)$. K est le milieu de $[FG]$: $K(4\,;\,1\,;\,2)$. On a $\overrightarrow{EH}(0\,;\,2\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{EN}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,2\right)$. On a $\overrightarrow{AB}(4\,;\,0\,;\,0)$, donc $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donne $P(3\,;\,0\,;\,0)$.

(b) $\overrightarrow{AK}(4\,;\,1\,;\,2)$: $(AK) : \begin{cases} x = 4t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. $\overrightarrow{PH}(-3\,;\,2\,;\,2)$: $(PH) : \begin{cases} x = 3 - 3s \\ y = 2s \\ z = 2s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$.

(c) Si $\overrightarrow{PH} = k\overrightarrow{AK}$, les abscisses donnent $k = -\frac{3}{4}$ et les ordonnées $k = 2$: les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles. Système : $4t = 3 - 3s$, $t = 2s$, $2t = 2s$. Les deux dernières équations donnent $t = 2s$ et $t = s$, donc $s = 0$ et $t = 0$. Test des abscisses : $4 \times 0 = 0$ et $3 - 3 \times 0 = 3$, or $0 \neq 3$: c'est impossible. Les droites ne sont ni parallèles ni sécantes : (AK) et (PH) sont non coplanaires. Les trajectoires des drones 1 et 2 ne se coupent pas.

(d) Hugo a tort. Deux droites différentes n'atteignent pas leur point commun, en général, pour la même valeur du paramètre : il faut deux paramètres. On écrit (d) : $x = 2s$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 2 - s$, $s \in \mathbb{R}$. Les vecteurs $\vec{w}(2\,;\,0\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AK}(4\,;\,1\,;\,2)$ ne sont pas colinéaires : les abscisses donnent $k = \frac{1}{2}$, mais $0 \neq \frac{1}{2} \times 1$ pour les ordonnées. Système : $4t = 2s$, $t = \frac{1}{2}$, $2t = 2 - s$. Les ordonnées donnent $t = \frac{1}{2}$, puis les abscisses $2 = 2s$, soit $s = 1$. Test des cotes : $2 \times \frac{1}{2} = 1$ et $2 - 1 = 1$, l'équation est vérifiée. Les trajectoires 1 et 3 sont sécantes au point $\left(2\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$.

Ex. 48 **(suite)**

(e) On a $\overrightarrow{BC}(0\,;\,2\,;\,0)$ et $\overrightarrow{BH}(-4\,;\,2\,;\,2)$. Ils ne sont pas colinéaires (abscisse nulle pour l'un, non nulle pour l'autre) : ils dirigent le plan (BCH). On cherche a et b tels que $\overrightarrow{BN}\left(-4\,;\,\frac{1}{2}\,;\,2\right) = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BH}$. Abscisses : $-4b = -4$, donc $b = 1$. Ordonnées : $2a + 2 = \frac{1}{2}$, donc $a = -\frac{3}{4}$. Cotes : $2b = 2$, vérifiée. Les points B, C, H, N sont donc coplanaires : $N \in (BCH)$. On cherche ensuite $\vec{w} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BH}$. Abscisses : $-4b = 2$, donc $b = -\frac{1}{2}$. Ordonnées : $2a + 2b = 0$, donc $a = \frac{1}{2}$. Cotes : $2b = -1$, vérifiée. Ainsi $\vec{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$, donc $(d) \parallel (BCH)$. Une droite parallèle à un plan et qui a un point dans ce plan y est incluse : $(d) \subset (BCH)$.

Ex. 49 ★★★ **Une bâche dans une tente pyramidale : intersection et théorème du toit**

(a) I est le milieu de $[SA]$: $I(1\,;\,1\,;\,2)$. J est le milieu de $[SB]$: $J(3\,;\,1\,;\,2)$. On a $\overrightarrow{SC}(2\,;\,2\,;\,-4)$, donc $\overrightarrow{SK}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$ et $K\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,3\right)$. On a $\overrightarrow{IJ}(2\,;\,0\,;\,0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, avec $\overrightarrow{AB}(4\,;\,0\,;\,0)$: les vecteurs sont colinéaires, donc $(IJ) \parallel (AB)$. On a $\overrightarrow{IK}\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,1\right)$. Si $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IJ}$, les ordonnées donnent $\frac{3}{2} = 0$: c'est impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc I, J, K ne sont pas alignés : ils définissent un plan.

(b) $\overrightarrow{IJ}(2\,;\,0\,;\,0)$ et $2\overrightarrow{IK}(3\,;\,3\,;\,2)$ ne sont pas colinéaires : ils dirigent (IJK). $(IJK) : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 + 3\mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. $\overrightarrow{SD}(-2\,;\,2\,;\,-4)$: $(SD) : \begin{cases} x = 2 - 2s \\ y = 2 + 2s \\ z = 4 - 4s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.

(c) Système : $1 + 2\lambda + 3\mu = 2 - 2s$, $1 + 3\mu = 2 + 2s$, $2 + 2\mu = 4 - 4s$. La troisième équation donne $\mu = 1 - 2s$. La deuxième devient $4 - 6s = 2 + 2s$, donc $s = \frac{1}{4}$ et $\mu = \frac{1}{2}$. La première donne alors $1 + 2\lambda + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, donc $\lambda = -\frac{1}{2}$. Le système a une unique solution : la droite (SD) coupe le plan (IJK) en $L\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,3\right)$. Comme $s = \frac{1}{4} \in [0\,;\,1]$, le point L appartient au segment $[SD]$.

Ex. 49 **(suite)**

(d) Le point K appartient à $[SC]$, donc au plan (SCD). Le point L appartient à $[SD]$, donc lui aussi au plan (SCD). Les points K et L sont aussi dans (IJK), et $K \neq L$. La droite (SA) coupe le plan (SCD) seulement en S, car $A \notin (SCD)$. Comme $I \neq S$, on a $I \notin (SCD)$. Les plans (IJK) et (SCD) sont donc distincts et sécants selon la droite (KL). Par ailleurs, $(IJ) \subset (IJK)$ et $(CD) \subset (SCD)$. Enfin, $(IJ) \parallel (AB)$ et $(AB) \parallel (CD)$ (car $ABCD$ est un carré), donc $(IJ) \parallel (CD)$. D'après le théorème du toit, $(KL) \parallel (CD)$.

Ex. 49 **(suite)**

(e) Le plan coupe les faces SAB, SBC, SCD et SDA selon $[IJ]$, $[JK]$, $[KL]$ et $[LI]$. Il ne coupe pas la base : pour $z = 0$, on trouve $2 + 2\mu = 0$, donc $\mu = -1$ et $y = 1 + 3 \times (-1) = -2$. Le plan (IJK) coupe donc le plan de la base selon une droite où $y = -2$, qui ne rencontre pas le carré $ABCD$ (on y a $0 \leqslant y \leqslant 4$). On a $(KL) \parallel (CD)$ et $(CD) \parallel (IJ)$, donc $(KL) \parallel (IJ)$. Calcul : $\overrightarrow{LK}(1\,;\,0\,;\,0)$ et $\overrightarrow{IJ}(2\,;\,0\,;\,0) = 2\overrightarrow{LK}$. Les côtés $[IJ]$ et $[LK]$ sont parallèles mais de longueurs différentes, car $\overrightarrow{IJ} \neq \overrightarrow{LK}$. Conclusion : la section $IJKL$ est un trapèze de bases $[IJ]$ et $[LK]$, et ce n'est pas un parallélogramme.