1. Rappels de 5e : perspective et patrons

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : compter et reconnaître les solides**

(a) La base a $n = 8$ côtés : $8 + 2 = 10$ faces (2 bases et 8 faces latérales).

(b) Un prisme droit a $3 \times n$ arêtes : $21 \div 3 = 7$, donc la base a 7 côtés. Il a $2 \times 7 = 14$ sommets.

(c) Le prisme a $3 \times 5 = 15$ arêtes en tout. Les arêtes cachées sont en pointillés : $15 - 12 = 3$ arêtes en pointillés. Il ne faut pas les oublier dans le décompte.

(d) Non. Un prisme droit a deux bases superposables reliées par des faces latérales rectangulaires. Ici, il y a une seule base et des faces latérales triangulaires qui se rejoignent en un sommet : c'est une pyramide à base hexagonale.

(e) Ses deux bases sont des disques de même rayon, dans des plans parallèles. Un cylindre n'a aucun sommet : 0 sommet.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : lire une perspective cavalière**

(a) La face avant KLPO et la face arrière NMQR, placées de face, sont en vraie grandeur.

(b) [LM] est une fuyante : $3{,}4 \times 0{,}5 = 1{,}7$ cm.

(c) KLMN est un rectangle, donc l'angle $\widehat{KLM}$ mesure en réalité 90°. Cette face n'est pas de face : elle est déformée et son angle droit paraît obtus.

(d) Les trois arêtes qui partent de N : [KN], [NM] et [NR].

(e) [KN], [PQ] et [OR] : des arêtes parallèles restent parallèles sur le dessin.

(f) Le seul sommet caché est N. Les faces qui contiennent N ont des arêtes en pointillés : KLMN (dessous), KNRO (gauche) et NMQR (arrière), soit 3 faces. Les 3 autres faces (KLPO, LMQP et OPQR) sont entièrement visibles.

Ex. 3 ★★☆ **Six carrés ne font pas toujours un cube**

(a) La bande de 4 carreaux s'enroule et forme les 4 faces latérales du cube : son côté gauche [AH] se colle sur son côté droit [BC].

Ex. 3 (suite)

(b) Non. Une fois la bande pliée, les deux carreaux du haut se rabattent tous les deux sur la face du dessus : ils se superposent, et il manque la face du dessous, qui est opposée à celle du dessus. Ce n'est donc pas un patron.

(c) On prend le carreau qui a pour sommets D et E. On l'accole sous la bande, contre le côté inférieur de n'importe lequel des 4 carreaux. On obtient alors une bande de 4 carreaux, avec un carreau au-dessus et un au-dessous : c'est un patron de cube.

(d) Faux : le cube a 11 patrons différents. Une figure de 6 carrés d'un seul morceau n'est pas forcément l'un d'eux.

Ex. 4 ★★☆ **La boîte de thé cylindrique**

(a) Les bases ne sont pas placées de face : elles sont vues de biais, donc ne sont pas en vraie grandeur. Un cercle vu de biais se dessine comme un ovale.

(b) Hugo a pris le diamètre ($2 \times 3{,}5 = 7$ cm). Or la longueur du rectangle est la longueur du cercle de base : $2 \times \pi \times 3{,}5 = 7\pi \approx 22{,}0$ cm.

(c) Rectangle : $7\pi \times 9 \approx 197{,}9$ cm². Deux disques : $2 \times \pi \times 3{,}5^2 \approx 77{,}0$ cm². Aire du patron $\approx 197{,}9 + 77{,}0$, soit environ 274,9 cm².

Ex. 5 ★★☆ **La boîte de chocolats en prisme**

(a) Le triangle ABC est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 2{,}5^2 = 36 + 6{,}25 = 42{,}25$, d'où $BC = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$ cm.

(b) Au pliage, deux côtés qui se rejoignent ont la même longueur. Or $BC = 6{,}5$ cm, et aucun côté du rectangle de 2,5 cm sur 8 cm ne mesure 6,5 cm. Le côté [BC] se colle contre la face rectangulaire de 6,5 cm sur 8 cm.

(c) Le prisme a $3 \times 3 = 9$ arêtes : les 3 côtés de chacune des 2 bases, dont le périmètre vaut $6 + 2{,}5 + 6{,}5 = 15$ cm, et 3 arêtes latérales [AD], [BE] et [CF] de 8 cm. Ruban : $2 \times 15 + 3 \times 8 = 30 + 24 = 54$ cm.

Ex. 6 ★★★ **La maquette de l'aquarium**

(a) [JK] est une fuyante : sa longueur sur le dessin est réduite, on ne peut donc pas la mesurer directement. Longueur réelle = fuyante dessinée ÷ coefficient, donc $JK = 1{,}8 \div 0{,}5 = 3{,}6$ cm.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Non. JKON est une face d'un pavé droit, donc c'est un rectangle : en vrai, $\widehat{NJK} = 90°$. Cette face n'est pas dessinée de face : elle est déformée, et son angle droit est dessiné aigu ($45°$). On ne mesure pas un angle sur une face qui n'est pas de face.

(c) Le seul sommet caché est L (en bas, à l'arrière, à gauche). Les trois arêtes qui en partent, [IL], [LK] et [LP], sont en pointillés. Il reste $12 - 3 = 9$ arêtes en trait plein. Dans le pavé, [LK] est parallèle à [IJ], [MN] et [PO]. En perspective cavalière, deux arêtes parallèles sont dessinées parallèles : ces trois arêtes sont donc tracées parallèles à [LK].

(d) [JK] est une fuyante : $3{,}6 \times 0{,}6 = 2{,}16$ cm. [KL] et [LP] sont sur la face arrière LKOP, qui est dessinée en vraie grandeur : $KL = IJ = 7$ cm et $LP = IM = 4{,}5$ cm. [JI] est horizontale et [JK] fait $30°$ avec l'horizontale, donc l'angle dessiné vaut $180° - 30° = 150°$.

Ex. 7 ★★★ **Le dé de Léna**

(a) Quand on les plie, les faces A, B, C et D, alignées, font le tour du cube. A et C sont séparées par B, donc elles sont opposées. De même, B et D sont opposées. E et F sont collées de part et d'autre de C : elles ferment les deux côtés du tour, donc elles sont opposées.

(b) C est opposée à A : $7 - 1 = 6$. D est opposée à B : $7 - 2 = 5$. F est opposée à E : $7 - 3 = 4$. Léna écrit donc 6 sur C, 5 sur D et 4 sur F.

(c) Les 6 carrés ont en tout $6 \times 4 = 24$ côtés. Chaque pli utilise 2 côtés, soit $5 \times 2 = 10$ côtés. Le contour a donc $24 - 10 = 14$ côtés. Collés deux par deux, ils forment $14 \div 2 = 7$ arêtes. Avec les 5 plis, on obtient $7 + 5 = 12$ arêtes : ce sont bien les 12 arêtes du cube.

(d) Non. Une croix de 6 carrés n'est pas toujours un patron : il n'existe que 11 patrons du cube. Ici, A, B, C et D font le tour du cube. E est collée à gauche de A et F à gauche de C : au pliage, elles viennent toutes les deux sur le côté gauche et se superposent. Le côté droit reste ouvert, donc la figure 2 n'est pas un patron.

(e) Au pliage, A, B, C et D font le tour du cube ; E, à gauche de A, ferme le côté gauche et F, à droite de C, ferme le côté droit : 6 faces, sans trou ni superposition, donc c'est un patron du cube. Les faces opposées sont A et C, B et D, E et F, comme dans le patron 1. Sacha peut donc écrire 1, 2, 6, 5, 3 et 4 sur A, B, C, D, E et F, car $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$.

Ex. 8 ★★★ **La tente de Noah**

(a) La tente est un prisme droit à base triangulaire ($n = 3$) : $3 + 2 = 5$ faces, $3 \times 3 = 9$ arêtes et $2 \times 3 = 6$ sommets. Une pyramide à base carrée a $4 + 1 = 5$ faces, $2 \times 4 = 8$ arêtes et $4 + 1 = 5$ sommets. Les deux solides ont le même nombre de faces, mais pas le même nombre d'arêtes ni de sommets. Surtout, la tente a deux bases triangulaires superposables, reliées par des rectangles : c'est un prisme, pas une pyramide.

(b) Le triangle ABC est isocèle en C, donc la hauteur [CI] arrive au milieu de [AB] : $AI = 1{,}8 \div 2 = 0{,}9$ m. Le triangle AIC est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AI^2 + IC^2 = 0{,}9^2 + 1{,}2^2 = 0{,}81 + 1{,}44 = 2{,}25$.
Donc $AC = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ m.

(c) La longueur du rectangle est égale au périmètre de la base : $1{,}8 + 1{,}5 + 1{,}5 = 4{,}8$ m. Sa largeur est égale à la longueur du prisme, soit 2,4 m.

(d) Rectangle latéral : $4{,}8 \times 2{,}4 = 11{,}52$ m². Un triangle de base : $1{,}8 \times 1{,}2 \div 2 = 1{,}08$ m². Aire totale : $11{,}52 + 2 \times 1{,}08 = 13{,}68$ m², soit environ 13,7 m².

(e) La longueur du rectangle est le périmètre de la base : $1{,}8 + 2 \times AC = 5$, donc $AC = (5 - 1{,}8) \div 2 = 1{,}6$ m. On a toujours $AI = 0{,}9$ m. Le triangle AIC est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore : $CI^2 = AC^2 - AI^2 = 1{,}6^2 - 0{,}9^2 = 2{,}56 - 0{,}81 = 1{,}75$. Donc $CI = \sqrt{1{,}75} \approx 1{,}3$ m.

2. *Se repérer dans un pavé droit*

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes — Les sommets du pavé KLMNOPQR**

(a) M est sur la face du dessous, donc son altitude est 0. On avance de KL = 6 selon les abscisses et de LM = 2,5 selon les ordonnées : $M(6\,;\,2{,}5\,;\,0)$.

(b) Abscisse 0, ordonnée 0, puis on monte de 3,5 = KO : c'est le sommet O, situé au-dessus de K.

(c) La face OPQR est la face du dessus, donc ses sommets ont pour altitude KO = 3,5. Q est au-dessus de M, donc $Q(6\,;\,2{,}5\,;\,3{,}5)$.

(d) En perspective cavalière, les arêtes fuyantes sont raccourcies : on ne mesure pas sur le dessin. On a KN = LM = 2,5 cm, donc l'ordonnée de N est 2,5.

(e) Non. Le point $(0\,;\,2{,}5\,;\,0)$ a une altitude nulle : c'est le sommet N, sur la face du dessous. R est au-dessus de N, donc $R(0\,;\,2{,}5\,;\,3{,}5)$.

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes — Milieux et centres**

(a) $E(0\,;\,0\,;\,6)$ et $H(0\,;\,5\,;\,6)$ ne diffèrent que par l'ordonnée, qui passe de 0 à 5. On divise seulement celle-ci par 2 : $I(0\,;\,2{,}5\,;\,6)$.

(b) $C(8\,;\,5\,;\,0)$ et $G(8\,;\,5\,;\,6)$ ne diffèrent que par l'altitude, qui passe de 0 à 6. On a donc $6 \div 2 = 3$ et $J(8\,;\,5\,;\,3)$.

(c) $G(8\,;\,5\,;\,6)$ et $H(0\,;\,5\,;\,6)$: seule l'abscisse change, l'ordonnée reste 5. On divise seulement l'abscisse par 2 : $8 \div 2 = 4$. Le milieu de $[GH]$ est donc $(4\,;\,5\,;\,6)$. Le point de Tom, $(4\,;\,2{,}5\,;\,6)$, est le centre de la face du dessus.

(d) La face ABFE a une ordonnée nulle. Son centre est au milieu de $\text{AB} = 8$ et de $\text{AE} = 6$: $K(4\,;\,0\,;\,3)$.

(e) Le centre du pavé est au milieu des trois dimensions : $8 \div 2 = 4$, $5 \div 2 = 2{,}5$ et $6 \div 2 = 3$, donc $\Omega(4\,;\,2{,}5\,;\,3)$.

Ex. 11 ★☆☆ **Sur une arête, sur une face ou hors du pavé ?**

(a) L'ordonnée de U vaut $\text{AD} = 4$ (face arrière DCGH) et son altitude vaut $\text{AE} = 5$ (face du dessus EFGH). Deux coordonnées sont imposées : U est sur l'arête commune $[HG]$.

(b) L'abscisse de V vaut $\text{AB} = 9$ (face de droite BCGF) et son ordonnée vaut 0 (face avant ABFE) : V est sur l'arête $[BF]$. Comme $5 \div 2 = 2{,}5$, c'est le milieu de $[BF]$.

(c) L'ordonnée de W vaut 5, et $5 > \text{AD} = 4$: W est hors du pavé.

(d) L'altitude de X est négative, donc X est sous la face du dessous : X est hors du pavé.

(e) L'altitude de Y est nulle (face du dessous ABCD), et l'on a $0 < 4{,}5 < 9$ et $0 < 2 < 4$. Y est donc seulement sur la face ABCD. Comme $9 \div 2 = 4{,}5$ et $4 \div 2 = 2$, c'est le centre de cette face.

Ex. 12 ★★☆ **L'aquarium d'Inès**

(a) Inès n'a pas converti les dimensions en centimètres. On a 0,6 m = 60 cm, $\text{AD} = 35$ cm et 400 mm = 40 cm. G est au-dessus de C, donc $G(60\,;\,35\,;\,40)$.

(b) On a $D(0\,;\,35\,;\,0)$ et $H(0\,;\,35\,;\,40)$: seule l'altitude change, et $40 \div 2 = 20$. Le filtre est donc au point $(0\,;\,35\,;\,20)$. Lucas a inversé l'ordonnée et l'altitude, alors que l'ordre $(x\,;\,y\,;\,z)$ ne se change pas.

Ex. 12 (suite)

(c) Sur la face DCGH, l'ordonnée vaut $\text{AD} = 35$. Le centre de la face est au milieu de ses deux autres dimensions : $60 \div 2 = 30$ et $40 \div 2 = 20$. Le thermomètre est donc au point $(30\,;\,35\,;\,20)$.

Ex. 13 ★★☆ **La boîte de chocolats de Nora**

(a) G est au-dessus de C : pour l'atteindre, on avance de AB, puis de AD, puis on monte de AE.
Donc $\text{AB} = 24$ cm, $\text{AD} = 16$ cm et $\text{AE} = 4{,}5$ cm.

(b) F est au-dessus de B, donc $F(24\,;\,0\,;\,4{,}5)$. Le centre K de la face EFGH a pour altitude 4,5 et se trouve au milieu des deux autres dimensions : $24 \div 2 = 12$ et $16 \div 2 = 8$.
Donc $K(12\,;\,8\,;\,4{,}5)$.

(c) Depuis B, pour atteindre G, on n'avance pas selon $[BA]$, on avance de $\text{BC} = 16$ et on monte de $\text{BF} = 4{,}5$: $G(0\,;\,16\,;\,4{,}5)$. Pour atteindre E, on avance de $\text{BA} = 24$, on n'avance pas selon $[BC]$ et on monte de 4,5 : $E(24\,;\,0\,;\,4{,}5)$. Ce sont les mêmes points, mais leurs coordonnées changent avec l'origine.

Ex. 14 ★★★ **La salle de classe repérée**

(a) Le plafond EFGH est à l'altitude $\text{AE} = 3$. Son centre est au milieu des deux dimensions : abscisse $9{,}6 \div 2 = 4{,}8$ et ordonnée $7{,}2 \div 2 = 3{,}6$.
Donc $L(4{,}8\,;\,3{,}6\,;\,3)$.

(b) $E(0\,;\,0\,;\,3)$ et F, au-dessus de B, a pour coordonnées $F(9{,}6\,;\,0\,;\,3)$. Le long de $[EF]$, seule l'abscisse change : on la divise par 2, $9{,}6 \div 2 = 4{,}8$.
Donc $K(4{,}8\,;\,0\,;\,3)$.

(c) D est un sommet du sol ABCD, donc son altitude est 0. Première erreur : Malik a écrit $3 = \text{AE}$, comme si D était en haut. Deuxième erreur : il a mis 7,2 en dernier, à la place de l'altitude, alors que $\text{AD} = 7{,}2$ m se compte selon l'axe des ordonnées. L'ordre est (abscisse ; ordonnée ; altitude).
Donc $D(0\,;\,7{,}2\,;\,0)$.

(d) Le sol ABCD est un rectangle, donc le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9{,}6^2 + 7{,}2^2 = 92{,}16 + 51{,}84 = 144$, donc $AC = \sqrt{144} = 12$ m.

Ex. 15 ★★★ **Le carton de déménagement de Yanis**

(a) On convertit d'abord en centimètres : $\text{KL} = 0{,}4$ m $= 40$ cm, $\text{LM} = 500$ mm $= 50$ cm et $\text{KO} = 35$ cm. Q est au-dessus de M, avec $M(40\,;\,50\,;\,0)$.
Donc $Q(40\,;\,50\,;\,35)$.

Ex. 15 **(suite)**

(b) Non. $N(0\,;\,50\,;\,0)$ a pour ordonnée KN = LM = 50, et $L(40\,;\,0\,;\,0)$ a pour abscisse 40. Or $50 > 40$. En perspective cavalière, les fuyantes comme $[LM]$ sont dessinées raccourcies : on ne mesure pas l'ordonnée sur la figure.

(c) La face LMQP est la face de droite : son abscisse vaut KL = 40. Son centre est au milieu des deux autres dimensions : ordonnée $50 \div 2 = 25$ et altitude $35 \div 2 = 17{,}5$.
Donc $E(40\,;\,25\,;\,17{,}5)$.

(d) R est au-dessus de N. Depuis L, on avance de LK = 40 le long de $[LK]$, de KN = 50 parallèlement à $[LM]$, puis on monte de 35 : $R(40\,;\,50\,;\,35)$. E est sur la face LMQP, qui contient la nouvelle origine L : nouvelle abscisse 0. Ordonnée et altitude ne changent pas : $E(0\,;\,25\,;\,17{,}5)$. C'est le même point, mais avec d'autres coordonnées.

Ex. 16 ★★★ **Le pavé mystère de Léna**

(a) Le centre du pavé est au milieu des trois dimensions : chaque coordonnée de Ω est la moitié d'une dimension. Donc $AB = 2 \times 3{,}5 = 7$ cm, $AD = 2 \times 2{,}5 = 5$ cm et $AE = 2 \times 4 = 8$ cm. G est le sommet opposé à A : $G(7\,;\,5\,;\,8)$.

(b) P : abscisse 7 = AB (face de droite BCGF) et ordonnée 0 (face avant ABFE). Deux coordonnées sont imposées, donc P est sur l'arête commune $[BF]$, à 2,4 cm au-dessus de B. Q : son ordonnée 5,5 dépasse AD = 5, donc Q est hors du pavé.

(c) Non. Un sommet a chaque coordonnée égale à 0 ou à une dimension. Or 2,5 n'est ni 0 ni AD = 5. $F(7\,;\,0\,;\,8)$ et $G(7\,;\,5\,;\,8)$ ne diffèrent que par l'ordonnée, et $5 \div 2 = 2{,}5$: S est le milieu de l'arête $[FG]$.

(d) P est sur $[BF]$ avec BP = 2,4 cm. La face ABFE est un rectangle, donc le triangle ABP est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : $AP^2 = AB^2 + BP^2 = 7^2 + 2{,}4^2 = 49 + 5{,}76 = 54{,}76$, donc $AP = \sqrt{54{,}76} = 7{,}4$ cm.

3. *La pyramide : description et perspective*

Ex. 17 ★☆☆ **Compter sans se tromper**

(a) La base a $n = 5$ côtés : 5 faces latérales plus la base, donc $5 + 1 = 6$ faces.

(b) La base a $n = 6$ côtés : 6 arêtes sur la base et 6 arêtes latérales, donc $2 \times 6 = 12$ arêtes.

(c) Les sommets sont ceux de la base plus le sommet de la pyramide : $n + 1 = 9$, donc $n = 9 - 1 = 8$. La base a 8 côtés
(octogone).

(d) Une pyramide a $2 \times n$ arêtes : $2 \times n = 14$, donc $n = 14 \div 2 = 7$. Elle a $7 + 1 = 8$ faces.

(e) Non. La base a $n = 9$ côtés : la pyramide a $9 + 1 = 10$ faces (9 faces latérales et la base). Le nombre $2 \times 9 = 18$ est son nombre d'arêtes, pas son nombre de faces.

Ex. 18 ★☆☆ **Le vocabulaire de la pyramide**

(a) La base est le rectangle KLMN, et le sommet de la pyramide est T. T n'est pas un sommet de la base.

(b) Les arêtes latérales relient T aux sommets de la base : $[TK]$, $[TL]$, $[TM]$ et $[TN]$.

(c) $[TH]$ est la hauteur de la pyramide : elle part de T et elle est perpendiculaire à la base. Ce n'est pas une arête, car H n'est pas un sommet de la base. $[TH]$ est à l'intérieur du solide : ce n'est pas non plus la hauteur d'une face.

(d) Les faces latérales sont les triangles TKL, TLM, TMN et TNK. Avec la base KLMN, la pyramide a $4 + 1 = 5$ faces.

(e) Non. Une pyramide régulière doit avoir pour base un polygone régulier. Ici, la base KLMN est un rectangle qui n'est pas un carré (4,5 cm ≠ 3 cm), même si T est à la verticale du centre H.

Ex. 19 ★★☆ **Le toit de la tour**

(a) Le triangle RST est rectangle en S, donc d'après le théorème de Pythagore : $RT^2 = RS^2 + ST^2 = 64 + 36 = 100$, d'où $RT = \sqrt{100} = 10$ m. Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu H, donc $HR = 10 \div 2 = 5$ m.

(b) Le triangle PHR est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $PR^2 = PH^2 + HR^2 = 16 + 25 = 41$, d'où $PR = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ m.

Ex. 19 **(suite)**

(c) Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et se coupent en leur milieu H, donc $HR = HS = HT = HU = 5$ m. Les triangles PHR, PHS, PHT et PHU sont rectangles en H et ont les mêmes côtés de l'angle droit (4 m et 5 m). Ils ont donc la même hypoténuse : $PR = PS = PT = PU = \sqrt{41}$ m.

(d) D'après les questions 2 et 3, $PR = PS = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ m, et $RS = 8$ m. Le triangle PRS a deux côtés égaux : il est isocèle en P. Il n'est pas équilatéral, car $RS = 8$ m $\neq 6{,}4$ m.

Ex. 20 ★★☆ **Dessiner la pyramide en perspective**

(a) $[EF]$ est sur la face avant : il est tracé en vraie grandeur, 5 cm. $[FG]$ est une fuyante : $5 \times 0{,}5 = 2{,}5$ cm, tracé à 45°. La base est dessinée comme un parallélogramme : ses angles droits ne sont pas dessinés droits.

(b) H est le point d'intersection des diagonales du parallélogramme EFGI dessiné. T est placé à la verticale au-dessus de H, avec $TH = 6{,}5$ cm : ce segment vertical est dans un plan de face, donc il est tracé en vraie grandeur.

(c) Le sommet I, à l'arrière et à gauche, est caché par les faces TEF et TFG. Les arêtes cachées sont $[EI]$, $[IG]$ et $[TI]$: elles sont tracées en pointillés.

(d) La base EFGI est un carré, donc un polygone régulier, et T est à la verticale du centre H de la base : la pyramide est régulière. Ses quatre faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

Ex. 21 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux. La base d'une pyramide est un polygone et ses faces latérales sont des triangles. La base d'un cône est un disque et il n'a pas de face triangulaire : ce n'est pas une pyramide.

(b) Faux. Ce solide a deux bases triangulaires ABC et DEF, superposables et parallèles, et ses faces latérales sont des rectangles : c'est un prisme droit, pas une pyramide.

(c) Vrai. Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire : ses 4 faces sont des triangles. Si on choisit l'une d'elles comme base, le sommet opposé est le sommet de la pyramide.

(d) Faux. La base ABC a 3 sommets : A, B et C. Le quatrième sommet, S, est le sommet de la pyramide : $3 + 1 = 4$. S n'est pas sur la base.

Ex. 22 ★★★ **Le jeu des solides mystères**

(a) Oui. Si la base a n côtés, la pyramide a n faces latérales et la base, soit $n + 1$ faces. Elle a les n sommets de la base et le sommet de la pyramide, soit $n + 1$ sommets. Par exemple, à base carrée : $4 + 1 = 5$ faces et 5 sommets.

(b) Non. Si c'était une pyramide, elle aurait $n + 1 = 7$ sommets, donc $n = 7 - 1 = 6$ côtés à sa base. Elle aurait alors $2 \times 6 = 12$ arêtes, pas 10. Ce solide n'est pas une pyramide.

(c) Pyramide à base carrée ($n = 4$) : $4 + 1 = 5$ faces, $2 \times 4 = 8$ arêtes, 5 sommets. Prisme droit à base triangulaire : 2 bases et 3 faces rectangulaires, donc $3 + 2 = 5$ faces ; 3 arêtes sur chaque base et 3 arêtes latérales, donc $3 \times 3 = 9$ arêtes ; 6 sommets. Les deux ont 5 faces, mais seul le prisme a 9 arêtes : c'est le prisme ABCDEF.

(d) Non. Une pyramide a $2 \times n$ arêtes, donc toujours un nombre pair d'arêtes. Or 15 est impair : aucune pyramide n'a 15 arêtes.

(e) Une pyramide a autant de faces que de sommets ($n + 1$ chacun), donc $2 \times (n + 1) = 24$: $n + 1 = 24 \div 2 = 12$ et $n = 12 - 1 = 11$. La base a 11 côtés, et la pyramide a $2 \times 11 = 22$ arêtes.

Ex. 23 ★★★ **La toile de la tente**

(a) Non. Pour qu'une pyramide soit régulière, sa base doit être un polygone régulier ET son sommet doit être à la verticale du centre. Ici S est bien au-dessus du centre H, mais la base est un rectangle qui n'est pas un carré ($1{,}8 \neq 1$) : ce n'est pas un polygone régulier. La pyramide n'est pas régulière.

(b) H est le centre du rectangle et I est le milieu de $[MN]$, donc HI vaut la moitié de NP : $HI = 1 \div 2 = 0{,}5$ m. De même, HJ vaut la moitié de MN : $HJ = 1{,}8 \div 2 = 0{,}9$ m.

(c) Le triangle SHI est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $SI^2 = SH^2 + HI^2 = 1{,}2^2 + 0{,}5^2 = 1{,}44 + 0{,}25 = 1{,}69$, donc $SI = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$ m. Attention : la hauteur de la face (1,3 m) n'est pas la hauteur de la pyramide (1,2 m).

Ex. 23 **(suite)**

(d) Le triangle SHJ est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $SJ^2 = SH^2 + HJ^2 = 1{,}2^2 + 0{,}9^2 = 1{,}44 + 0{,}81 = 2{,}25$, donc $SJ = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ m. Non : SMN a une base de 1,8 m et une hauteur de 1,3 m, SNP a une base de 1 m et une hauteur de 1,5 m. Les faces latérales ont donc deux formes différentes.

(e) Il y a deux faces comme SMN et deux faces comme SNP. Aire de SMN : $1{,}8 \times 1{,}3 \div 2 = 1{,}17$ m² ; aire de SNP : $1 \times 1{,}5 \div 2 = 0{,}75$ m². Aire de toile : $2 \times 1{,}17 + 2 \times 0{,}75 = 2{,}34 + 1{,}5 = 3{,}84$ m².

Ex. 24 ★★★ **La maquette du Louvre**

(a) En perspective cavalière, seule la face de face est en vraie grandeur. La base carrée ABCD, à plat, se dessine comme un parallélogramme : le côté $[AD]$ est une fuyante, donc l'angle droit $\widehat{DAB}$ n'est pas dessiné droit. La base reste bien un carré.

(b) Les arêtes qui partent de D sont cachées : $[DA]$, $[DC]$ et $[SD]$ en pointillés. La hauteur $[SH]$ est à l'intérieur du solide (ce n'est ni une arête ni une face) : elle se trace aussi en pointillés.

(c) H est le centre du carré et I le milieu de $[BC]$, donc $HI = 30 \div 2 = 15$ cm. $[SH]$ est perpendiculaire à la base : le triangle SHI est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $SI^2 = SH^2 + HI^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$, donc $SI = \sqrt{625} = 25$ cm. La hauteur de la face mesure 25 cm, pas 20 cm : $[SH]$ est à l'intérieur de la pyramide, $[SI]$ est sur la face.

(d) $IB = 30 \div 2 = 15$ cm. Le triangle SIB est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore : $SB^2 = SI^2 + IB^2 = 25^2 + 15^2 = 625 + 225 = 850$, donc $SB = \sqrt{850} \approx 29{,}2$ cm.

(e) Base : $30 \times 30 = 900$ cm². Chaque face latérale est un triangle de base 30 cm et de hauteur $SI = 25$ cm : $30 \times 25 \div 2 = 375$ cm². La pyramide est régulière, donc ses 4 faces latérales sont superposables : $4 \times 375 = 1\,500$ cm². Aire du patron : $900 + 1\,500 = 2\,400$ cm².

4. *Patron d'une pyramide*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur les patrons**

(a) Faux. La base carrée a 4 côtés, donc la pyramide a 4 faces latérales. Le patron contient la base ET les faces : $1 + 4 = 5$ polygones, un carré et 4 triangles.

Ex. 25 **(suite)**

(b) Faux. Un patron est d'un seul tenant : chaque face est accolée à une autre par un côté, sinon on ne peut pas le plier pour fermer le solide.

(c) Faux. Une même pyramide a plusieurs patrons : par exemple le patron « en croix », avec un triangle sur chaque côté du carré, ou le patron « en éventail », où les 4 triangles sont accolés autour du sommet et le carré est accolé à l'un d'eux.

(d) Faux. Le pied H de la hauteur est le centre de la base et M est le milieu d'un côté de la base. Le triangle SHM est rectangle en H et [SM] est son hypoténuse, donc SM > SH : la hauteur de la face est plus longue que la hauteur de la pyramide.

Ex. 26 ★★☆ **Automatismes : hauteur d'une face latérale**

(a) M est le milieu de [AB], donc $AM = 14 \div 2 = 7$ cm. Le triangle SMA est rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SM^2 + AM^2$, soit $25^2 = SM^2 + 7^2$.
Donc $SM^2 = 625 - 49 = 576$ et $SM = \sqrt{576} = 24$ cm.

(b) Léo a utilisé la base entière AB au lieu de sa moitié. Dans le demi-triangle SMA : $AM = 16 \div 2 = 8$ cm. Le triangle SMA est rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SA^2 - AM^2 = 289 - 64 = 225$, donc $SM = \sqrt{225} = 15$ cm.

(c) $AM = 2{,}4 \div 2 = 1{,}2$ cm. Le triangle SMA est rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SM^2 + AM^2 = 3{,}5^2 + 1{,}2^2 = 12{,}25 + 1{,}44 = 13{,}69$, donc $SA = \sqrt{13{,}69} = 3{,}7$ cm.

(d) $AM = 7 \div 2 = 3{,}5$ cm. Le triangle SMA est rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SA^2 - AM^2 = 36 - 12{,}25 = 23{,}75$, donc $SM = \sqrt{23{,}75} \approx 4{,}9$ cm.

Ex. 27 ★★☆ **La maquette de Lina**

(a) KLMN est un rectangle, donc le triangle KLM est rectangle en L. D'après le théorème de Pythagore : $KM^2 = KL^2 + LM^2 = 51{,}84 + 29{,}16 = 81$, donc $KM = \sqrt{81} = 9$ cm. Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, donc $HK = 9 \div 2 = 4{,}5$ cm.

(b) Le triangle SHK est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $SK^2 = SH^2 + HK^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25$, donc $SK = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ cm.

Ex. 27 **(suite)**

(c) Non. SH = 6 cm est la hauteur de la pyramide : ce segment est à l'intérieur du solide et n'apparaît pas sur le patron. Les côtés des faces latérales sont les arêtes latérales, donc le rayon du compas doit être 7,5 cm.

(d) Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et se coupent en leur milieu, donc HK = HL = HM = HN = 4,5 cm, et les quatre arêtes latérales mesurent 7,5 cm. 1. Je trace le rectangle KLMN : KL = 7,2 cm et LM = 5,4 cm. 2. Je trace au compas deux arcs de 7,5 cm de rayon, centrés en K et en L, à l'extérieur du rectangle ; ils se coupent en S1, et je trace le triangle KLS1. 3. Je fais de même sur [LM], [MN] et [NK], toujours avec un rayon de 7,5 cm
(sommets S2, S3, S4).

Ex. 28 ★★☆ **Le carton d'une boîte de chocolats**

(a) Aire de la base : $10 \times 10 = 100$ cm². Aire d'une face : $10 \times 12 \div 2 = 60$ cm². Aire du patron = base + 4 faces = $100 + 4 \times 60 = 340$ cm².

(b) AM = $10 \div 2 = 5$ cm. Le triangle AMS1 est rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore : $AS1^2 = AM^2 + MS1^2 = 25 + 144 = 169$, donc $AS1 = \sqrt{169} = 13$ cm.

(c) Les côtés du carré sont à l'intérieur du patron : chacun est collé à un triangle, donc ils ne font pas partie du contour. Le contour est formé des 8 côtés latéraux des triangles : $8 \times 13 = 104$ cm.

Ex. 29 ★★☆ **Patron correct ou faux ?**

(a) Non. Au pliage, les côtés [BS1] et [BS2] se rejoignent pour former la même arête latérale, issue de B. Ils devraient donc avoir la même longueur, or BS1 = 5 cm et BS2 = 4 cm.

(b) Non. Il y a bien 5 faces, mais le triangle accolé à [CS2] vient se poser, au pliage, sur la face construite sur [CD], déjà occupée par le triangle CDS3 : ces deux faces se superposent. Et il n'y a aucune face sur le côté [DA].

(c) Oui. La figure est d'un seul tenant et contient la base et $1 + 4 = 5$ faces. Au pliage, [SZ] rejoint [SA], qui a la même longueur car les triangles sont isocèles en S et superposables. [BX], [XY] et [YZ] (4 cm) viennent sur [BC], [CD] et [DA]. C'est un patron « en éventail », différent du patron « en croix » : une même pyramide a plusieurs patrons.

Ex. 30 ★★★ **Le toit de la tour**

(a) H est le centre du carré et I le milieu de [KL], donc $HI = 4{,}8 \div 2 = 2{,}4$ m. Le triangle SHI est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $SI^2 = SH^2 + HI^2 = 3{,}2^2 + 2{,}4^2 = 10{,}24 + 5{,}76 = 16$, d'où $SI = \sqrt{16} = 4$ m. [SH] est la hauteur de la pyramide : elle est à l'intérieur du solide. [SI] est la hauteur d'une face et c'est l'hypoténuse du triangle SHI, donc elle est plus longue que SH.

(b) La face SKL est isocèle en S, donc sa hauteur [SI] coupe [KL] en son milieu : $KI = 4{,}8 \div 2 = 2{,}4$ m (la moitié de la base, pas la base entière). Le triangle SIK est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore : $SK^2 = SI^2 + KI^2 = 16 + 5{,}76 = 21{,}76$, d'où $SK = \sqrt{21{,}76} \approx 4{,}7$ m.

(c) Le toit ne comprend que les 4 faces latérales (la base n'est pas couverte). Aire d'une face : $4{,}8 \times 4 \div 2 = 9{,}6$ m². Aire à couvrir : $4 \times 9{,}6 = 38{,}4$ m².

(d) Le patron complet comprend la base et les 4 faces latérales. Aire de la base : $4{,}8 \times 4{,}8 = 23{,}04$ m². Aire du patron : $23{,}04 + 38{,}4 = 61{,}44$ m². Elle est plus grande que l'aire à couvrir, car le patron contient la base carrée et le toit ne la contient pas.

Ex. 31 ★★★ **Le patron inachevé de la pyramide TEFGH**

(a) La base a $n = 4$ côtés. Le patron contient la base et 4 faces latérales, d'un seul tenant, soit $4 + 1 = 5$ polygones. La figure en compte 4 : il manque la face THE, qui s'appuie sur [HE].

(b) Sur le quadrillage, $EI = 2$ cm et $IT_1 = 3$ cm. Le triangle EIT_1 est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore : $ET_1^2 = EI^2 + IT_1^2 = 4 + 9 = 13$, d'où $ET_1 = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ cm.

(c) 1. Je prends au compas un écartement égal à ET_1 (l'arête latérale, environ 3,6 cm). 2. Je trace un arc de centre E, à gauche de [HE]. 3. Je trace un arc de même rayon et de centre H. 4. Les deux arcs se coupent en T4, que je relie à E et à H. T4 est à 3 carreaux à gauche du milieu de [HE]. Vérification : $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, c'est bien la longueur de l'arête latérale.

(d) Les quatre points T1, T2, T3 et T4 se rejoignent pour former le sommet T. L'arête [TH] est formée par les côtés [HT3] et [HT4], qui ont bien la même longueur, $\sqrt{13}$ cm.

Ex. 31 **(suite)**

(e) Non. Le côté [FT2] forme l'arête [TF] avec [FT1], et les deux faces qui entourent cette arête (TEF et TFG) sont déjà tracées. Au pliage, la nouvelle face se superposerait à la face TEF, et la face THE manquerait toujours. Autres emplacements corrects : contre [ET1] (l'arête [TE] est commune aux faces TEF et THE) ou contre [HT3] (l'arête [TH] est commune aux faces TGH et THE). Une même pyramide a donc plusieurs patrons.

Ex. 32 ★★★ **Le berlingot de Lou**

(a) La base a $n = 3$ côtés. Faces : $3 + 1 = 4$. Arêtes : $2 \times 3 = 6$. Sommets : $3 + 1 = 4$. Le patron contient la base et les 3 faces latérales, soit 4 triangles.

(b) La face SAB est isocèle en S, donc sa hauteur [SM] coupe [AB] en son milieu. Le demi-triangle SMA a pour côté $AM = 5 \div 2 = 2{,}5$ cm, et non 5 cm : Yanis a pris la base entière (son calcul donne environ 4,2 cm, ce qui est faux). Le triangle SMA est rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore : $SA^2 = SM^2 + AM^2$, d'où $SM^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2 = 42{,}25 - 6{,}25 = 36$ et $SM = 6$ cm.

(c) Au pliage, l'arête [SB] est formée par $[BS_1]$, qui mesure 6,5 cm, et par $[BS_2]$, qui mesure 5 cm. Deux côtés qui forment la même arête doivent avoir la même longueur : le pliage échouera. Programme : 1. Je trace le triangle équilatéral ABC de côté 5 cm. 2. Sur chaque côté, je trace deux arcs de rayon 6,5 cm, centrés aux extrémités du côté, à l'extérieur du triangle. 3. Les deux arcs se coupent en S1, S2 ou S3, que je relie aux extrémités du côté.

(d) ABC est équilatéral, donc la hauteur issue de C coupe [AB] en son milieu M. Le triangle AMC est rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore : $CM^2 = AC^2 - AM^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75$, d'où $CM \approx 4{,}3$ cm. Aire de la base : $5 \times 4{,}33 \div 2 \approx 10{,}8$ cm². Aire des faces : $3 \times (5 \times 6 \div 2) = 45$ cm². Aire du patron (base + faces) : $10{,}8 + 45 \approx 55{,}8$ cm².

(e) Les côtés de la base sont à l'intérieur du patron. Le contour est formé des 6 côtés latéraux des triangles : $6 \times 6{,}5 = 39$ cm de ruban.

5. *Le cône de révolution : génératrice*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : le vocabulaire du cône**

(a) Un cône de révolution a une seule face plane : sa base, qui est un disque.

(b) [OM] est un rayon de la base, [SO] est la hauteur, [SM] est une génératrice.

(c) C'est le triangle SOM, rectangle en O. Il tourne autour de [SO], un côté de l'angle droit.

(d) Le triangle tournerait autour de [OM], qui deviendrait la hauteur. Le rayon serait donc [OS].

(e) Non. Un cône n'a qu'une face plane et un sommet. Un solide qui a deux disques comme faces planes est un cylindre.

(f) La base se dessine par un ovale. Sa moitié arrière, cachée, est en pointillés.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : calculer la génératrice**

(a) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $g^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$, donc $g = \sqrt{169} = 13$ cm.

(b) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 2{,}8^2 + 2{,}1^2 = 7{,}84 + 4{,}41 = 12{,}25$, donc $SM = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5$ cm.

(c) Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 12 \div 2 = 6$ cm. Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $g^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, donc $g = 10$ cm.

(d) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $g^2 = 11^2 + 2^2 = 121 + 4 = 125$, donc $g = \sqrt{125}$ cm $\approx 11{,}2$ cm.

(e) Il faut la même unité : 40 mm = 4 cm. Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $g^2 = 9^2 + 4^2 = 81 + 16 = 97$, donc $g = \sqrt{97}$ cm $\approx 9{,}8$ cm.

Ex. 35 ★☆☆ **Retrouver la hauteur ou le rayon**

(a) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2$, soit $17^2 = h^2 + 8^2$.
Donc $h^2 = 289 - 64 = 225$ et $h = 15$ cm.

(b) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $6{,}5^2 = h^2 + 2{,}5^2$, donc $h^2 = 42{,}25 - 6{,}25 = 36$ et $h = 6$ m.

Ex. 35 **(suite)**

(c) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $10^2 = 7^2 + r^2$, donc $r^2 = 100 - 49 = 51$ et $r = \sqrt{51}$ cm $\approx 7{,}1$ cm.

(d) Rayon : $r = 4 \div 2 = 2$ m. Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $3{,}5^2 = h^2 + 2^2$, donc $h^2 = 12{,}25 - 4 = 8{,}25$ et $h = \sqrt{8{,}25}$ m $\approx 2{,}9$ m.

Ex. 36 ★★☆ **Deux élèves se trompent**

(a) Dans le triangle SOM rectangle en O, la génératrice SM est l'hypoténuse, c'est le plus grand côté. La hauteur SO doit donc être plus petite que 15 cm, or Inès trouve 17,5 cm.

(b) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2$, soit $15^2 = SO^2 + 9^2$.
Donc $SO^2 = 225 - 81 = 144$ et $SO = 12$ cm.

(c) Tom a mélangé les unités (m et cm). On convertit : 0,24 m = 24 cm. Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $g^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$, donc $g = 25$ cm. Son résultat, plus petit que la hauteur, était impossible.

Ex. 37 ★★☆ **Le chapeau de fête**

(a) Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 16 \div 2 = 8$ cm.

(b) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$, donc $SM = 17$ cm.

(c) Tour de l'ouverture : $2 \times \pi \times 8 = 16\pi$ cm $\approx 50{,}3$ cm.
Total : $17 + 16\pi \approx 67{,}3$ cm.

(d) 0,7 m = 70 cm et $70 > 67{,}3$. Elle a assez de ruban : il lui en reste environ 2,7 cm.

Ex. 38 ★★★ **Le cornet de glace**

(a) Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 7 \div 2 = 3{,}5$ cm. On convertit la hauteur : 120 mm = 12 cm, donc $h = 12$ cm.

(b) Soit M un point du cercle de base. Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 12^2 + 3{,}5^2 = 144 + 12{,}25 = 156{,}25$, donc $g = \sqrt{156{,}25} = 12{,}5$ cm. C'est cohérent : 12,5 cm est plus grand que la hauteur (12 cm) et que le rayon (3,5 cm), puisque la génératrice est l'hypoténuse.

(c) Une fois enroulé, l'arc fait le tour du cercle de base : $2 \times \pi \times 3{,}5 = 7\pi$ cm, soit environ 22,0 cm.

Ex. 38 **(suite)**

(d) Le rayon du secteur est la génératrice $g = 12{,}5$ cm (pas la hauteur). L'angle est proportionnel à la longueur de l'arc : angle $= 360 \times r \div g = 360 \times 3{,}5 \div 12{,}5 = 100{,}8^\circ$. On a bien moins de 360°.

Ex. 39 ★★★ **Vrai ou faux sur le cône de révolution**

(a) Faux. Un cône de révolution s'obtient en faisant tourner le triangle rectangle autour d'un côté de l'angle droit, ici [SO]. [SO] devient la hauteur, [OM] le rayon et [SM] une génératrice.

(b) Faux. Le cône a bien un sommet et une base (un disque), mais aucune arête : sa surface latérale est courbe. Ses génératrices ne sont pas des arêtes, contrairement aux arêtes latérales d'une pyramide.

(c) Faux. La génératrice est l'hypoténuse du triangle SOM rectangle en O, c'est donc la plus grande longueur : elle doit être plus longue que la hauteur. 8 cm $<$ 9 cm, c'est impossible.

(d) Faux. Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2$, soit $6{,}1^2 = h^2 + 1{,}1^2$.
Donc $h^2 = 37{,}21 - 1{,}21 = 36$ et $h = 6$ cm. La valeur 6,2 cm vient du calcul faux $h^2 = 6{,}1^2 + 1{,}1^2$: une hauteur plus longue que la génératrice est impossible.

(e) Vrai. Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $g^2 = 4{,}5^2 + 2{,}8^2 = 20{,}25 + 7{,}84 = 28{,}09$, et $g = \sqrt{28{,}09} = 5{,}3$ cm, car $5{,}3^2 = 28{,}09$.

Ex. 40 ★★★ **Le toit de la tour**

(a) Yanis a pris le diamètre (6 m) à la place du rayon. Le rayon vaut $OM = 6 \div 2 = 3$ m.

(b) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2$, donc $SO^2 = SM^2 - OM^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$. Ainsi $SO = \sqrt{40}$ m $\approx 6{,}3$ m. Contrôle : 6,3 m $<$ 7 m, la génératrice est bien la plus longue.

(c) Hauteur totale : $14{,}5 + \sqrt{40} \approx 20{,}8$ m.

(d) Le rayon du secteur est la génératrice : 7 m (et non la hauteur). L'angle est proportionnel à la longueur de l'arc : angle $= 360 \times r \div g = 360 \times 3 \div 7 \approx 154{,}3^\circ$, ce qui est bien inférieur à 360°.

6. *Patron d'un cône*

Ex. 41 ★☆☆ Automatismes : le secteur du patron

(a) Quand on enroule le secteur, chacun de ses rayons devient une génératrice du cône. Le rayon du secteur est donc la génératrice : $g = 9$ cm (ce n'est ni r ni la hauteur).

(b) Quand on enroule le secteur, l'arc fait exactement le tour du cercle de base. Sa longueur est donc celle du cercle de base, $2 \times \pi \times r$, et pas $2 \times \pi \times g$: $2 \times \pi \times 4 = 8\pi$ cm, soit environ 25,1 cm.

(c) Angle $= 360 \times r \div g = 360 \times 4 \div 9 = 160°$.

(d) Elle a inversé r et g : la bonne formule est $360 \times r \div g$, pas $360 \times g \div r$. Comme $r < g$, l'angle est toujours inférieur à $360°$, donc $810°$ est impossible. Le bon résultat est $160°$.

Ex. 42 ★☆☆ Automatismes : proportionnalité et rebours

(a) La longueur d'un arc est proportionnelle à son angle. Produit en croix : angle $= 360 \times (2 \times \pi \times 6) \div (2 \times \pi \times 16) = 360 \times 6 \div 16 = 135°$.

(b) Le rayon du secteur est la génératrice : $g = 12$ cm. On a $360 \times r \div 12 = 120$, donc $r = 120 \times 12 \div 360 = 4$ cm.

(c) Non. Dans un patron, toutes les pièces doivent tenir ensemble : le disque de base doit toucher l'arc du secteur en un point. Ici, les deux pièces sont séparées, donc ce n'est pas un patron.

Ex. 43 ★★☆ Le cornet de glace

(a) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 10^2 + 3^2 = 100 + 9 = 109$.
Donc $g = \sqrt{109}$ cm, soit environ 10,4 cm.

(b) Angle $= 360 \times r \div g = 360 \times 3 \div \sqrt{109} \approx 103{,}4°$.

(c) Il a pris la hauteur (10 cm) à la place de la génératrice. Le rayon du secteur est la génératrice $g = \sqrt{109}$ cm, qu'il fallait calculer d'abord avec le théorème de Pythagore.

(d) Elle a arrondi g trop tôt, à 10,4 cm : $360 \times 3 \div 10{,}4 \approx 103{,}8°$. On n'arrondit qu'à la fin : avec $g = \sqrt{109}$ cm, on obtient environ $103{,}4°$.

Ex. 44 ★★☆ Le chapeau de fête

(a) Quand on enroule le secteur, chacun de ses rayons devient une génératrice.
Donc $g = 25$ cm.

(b) Angle $= 360 \times r \div g$, donc $360 \times r \div 25 = 144$ et $r = 144 \times 25 \div 360 = 10$ cm.

(c) Soit M un point du cercle de base. Le triangle SKM est rectangle en K, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SK^2 + KM^2$, d'où $SK^2 = 25^2 - 10^2 = 625 - 100 = 525$.
Donc $SK = \sqrt{525} \approx 22{,}9$ cm.

(d) Non. Le bord du chapeau est le cercle de base, de rayon $r = 10$ cm : il mesure $2 \times \pi \times 10 = 20\pi \approx 62{,}8$ cm. Le nombre $2 \times \pi \times 25$ est la longueur du cercle entier de rayon g, pas celle de l'arc.

Ex. 45 ★★☆ La maquette du toit de tour

(a) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 12{,}96 + 23{,}04 = 36$.
Donc $g = \sqrt{36} = 6$ cm.

(b) Angle $= 360 \times 4{,}8 \div 6 = 288°$, ce qui est bien inférieur à $360°$. Comme $288 = 180 + 108$, je trace un angle plat ($180°$), puis j'ajoute $108°$ au rapporteur.

(c) 1. Je trace un segment [SA] de 6 cm. 2. Je trace la demi-droite opposée à [SA), puis, au rapporteur, un angle de $108°$ à partir d'elle, et je place B à 6 cm de S : l'angle ASB mesure $288°$. 3. Je trace l'arc de centre S et de rayon 6 cm qui va de A à B en limitant le grand secteur. 4. Je trace un disque de rayon 4,8 cm qui touche l'arc en un point : son centre est sur une demi-droite issue de S qui coupe l'arc, à $6 + 4{,}8 = 10{,}8$ cm de S.

Ex. 46 ★★★ Le cône de signalisation : trois erreurs à corriger

(a) Le rayon du secteur est la génératrice SM, et pas la hauteur SO. En s'enroulant, le secteur forme la surface latérale : son rayon va du sommet S jusqu'au cercle de base. Yanis a utilisé la hauteur (36 cm) : son secteur ne s'enroulerait pas exactement autour de la base.

(b) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 36^2 + 15^2 = 1296 + 225 = 1521$, donc $SM = \sqrt{1521} = 39$ cm.

(c) $360 \times 39 \div 15 = 936°$. C'est impossible : le secteur n'est qu'une partie du disque de rayon g, donc son angle est inférieur à $360°$. Nora a inversé r et g : comme $r < g$, il faut calculer $360 \times r \div g$.

Ex. 46 **(suite)**

(d) Angle $= 360 \times r \div g = 360 \times 15 \div 39 \approx 138{,}5°$. Contrôle : il est bien inférieur à $360°$.

(e) Non. En s'enroulant, l'arc fait exactement le tour du cercle de base, de rayon $r = 15$ cm : arc $= 2 \times \pi \times 15 = 30\pi \approx 94{,}2$ cm. La longueur $2 \times \pi \times g$ est celle du cercle entier de rayon g.

Ex. 47 ★★★ **La bâche du tas de sel**

(a) Le triangle SOM est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$, donc $SM = \sqrt{41}$ m $\approx 6{,}4$ m.

(b) Le rayon du secteur est la génératrice $g = \sqrt{41}$ m. Angle $= 360 \times r \div g = 360 \times 5 \div \sqrt{41} \approx 281{,}1°$ (on garde $\sqrt{41}$ dans la calculatrice jusqu'au bout). Contrôle : il est bien inférieur à $360°$.

(c) Un demi-disque correspond à un secteur de $180°$. Or il faut un secteur d'environ $281{,}1°$, et $180° < 281{,}1°$. Son bord courbe mesurerait la moitié de $2 \times \pi \times \sqrt{41}$, soit $\pi \times \sqrt{41} \approx 20{,}1$ m : il ne ferait pas le tour du tas.

(d) $281{,}1° = 180° + 101{,}1°$: je trace un premier angle de $180°$ (une demi-droite et son prolongement), puis j'ajoute $101{,}1°$ à partir de cette demi-droite. On peut aussi tracer l'angle de $360° - 281{,}1° = 78{,}9°$ et garder le grand secteur.

(e) Le bord courbe est l'arc du secteur : il a la longueur du cercle de base, de rayon $r = 5$ m. Arc $= 2 \times \pi \times 5 = 10\pi \approx 31{,}4$ m.

Ex. 48 ★★★ **La décoration qui ne se referme pas**

(a) La longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle. Coefficient : $96 \div 360$. Arc $= 2 \times \pi \times 7{,}5 \times 96 \div 360 = 4\pi \approx 12{,}6$ cm.

(b) Cercle du disque : $2 \times \pi \times 2{,}5 = 5\pi \approx 15{,}7$ cm. En s'enroulant, l'arc doit faire exactement le tour du cercle de base, donc ces deux longueurs doivent être égales. Or $15{,}7 \neq 12{,}6$: le disque est trop grand et le patron ne se referme pas.

(c) L'arc mesure $2 \times \pi \times r$ et l'angle vaut $360 \times r \div g$, donc $360 \times r \div 7{,}5 = 96$, d'où $r = 96 \times 7{,}5 \div 360 = 2$ cm. Vérification : $2 \times \pi \times 2 = 4\pi$, c'est bien la longueur de l'arc.

Ex. 48 **(suite)**

(d) Le triangle SKM est rectangle en K, donc d'après le théorème de Pythagore : $SM^2 = SK^2 + KM^2$. La génératrice est l'hypoténuse, donc on soustrait : $SK^2 = SM^2 - KM^2 = 7{,}5^2 - 2^2 = 56{,}25 - 4 = 52{,}25$, d'où $SK = \sqrt{52{,}25} \approx 7{,}2$ cm.

(e) Le disque doit toucher l'arc du secteur en un point, et non le côté [SA] : c'est l'arc qui s'enroule autour de la base. Le centre du disque est sur une droite passant par S et par le point de contact, de l'autre côté de l'arc : distance $= g + r = 7{,}5 + 2 = 9{,}5$ cm.