Troisième / Espace : boule, sections et sphère terrestre — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels de 4e : volumes des solides usuels*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : la bonne formule**

(a) Solide « pointu » : $\mathcal{B} = 6 \times 4{,}5 = 27$ cm², donc $V = \frac{27 \times 8}{3} = 72$ cm³.

(b) Le rayon est la moitié du diamètre : $r = 14 \div 2 = 7$ cm. Solide « droit » : $V = \pi \times 7^2 \times 3 = 147\pi$ cm³.

(c) Prisme droit (solide « droit ») : $V = 18 \times 10 = 180$ cm³. Pyramide (solide « pointu ») : $V = 18 \times 10 \div 3 = 60$ cm³.

(d) La base est un disque d'aire πr^2 et non $2\pi r$ (c'est le périmètre). $V = \pi \times 3^2 \times 7 \div 3 = \frac{63\pi}{3} = 21\pi$ cm³.

(e) $11^3 = 11 \times 11 \times 11 = 1\,331$, donc l'arête mesure 11 cm.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : volumes et contenances**

(a) 1 m³ = 1 000 L, donc 3,2 m³ = 3,2 × 1 000 = 3 200 L.

(b) 1 cL = 10 cm³, donc 450 cm³ = 450 ÷ 10 = 45 cL.

(c) 1 dm³ = 1 000 cm³, donc 12 500 cm³ = 12 500 ÷ 1 000 = 12,5 dm³.

(d) 60 dm³ = 60 000 cm³, et 60 000 ÷ 1 500 = 40. Il faut 40 carafes.

(e) Non. 1 m³ = 1 000 dm³ et 1 dm³ = 1 L, donc 1 m³ = 1 000 L. D'une unité de volume à la suivante, on multiplie par 1 000, pas par 100.

Ex. 3 ★★☆ **L'entonnoir et sa génératrice**

(a) La hauteur [SO] est perpendiculaire à la base, donc le triangle SOA est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore : $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$, donc $SO = 15$ cm.

(b) Le cône est un solide « pointu » : $V = \frac{\pi \times 8^2 \times 15}{3} = \frac{960\pi}{3} = 320\pi$ cm³.

(c) $V = 320\pi \approx 1\,005{,}3$ cm³.

(d) 1 L = 1 000 cm³ et $V \approx 1\,005{,}3$ cm³ > 1 000 cm³. Elle a raison : l'entonnoir contient un peu plus d'un litre.

Ex. 4 ★★☆ **Le silo à grain**

(a) Le rayon vaut $r = 3 \div 2 = 1{,}5$ m. Le cylindre est « droit » : $V_1 = \pi \times 1{,}5^2 \times 5 = 11{,}25\pi$ m³.

(b) Le cône est « pointu » : $V_2 = \frac{\pi \times 1{,}5^2 \times 1{,}2}{3} = 0{,}9\pi$ m³.

(c) $V = 11{,}25\pi + 0{,}9\pi = 12{,}15\pi$ m³, donc $V \approx 38{,}2$ m³.

(d) 1 m³ = 1 000 L, donc $V = 12\,150\pi$ L $\approx 38\,170{,}4$ L.

Ex. 5 ★★☆ **La tente pyramidale**

(a) On harmonise les unités : 240 cm = 2,4 m, donc $\mathcal{B} = 2{,}4^2 = 5{,}76$ m².

(b) Non : la pyramide est un solide « pointu », donc $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$, d'où $h = \frac{3 \times V}{\mathcal{B}} = \frac{3 \times 4{,}8}{5{,}76} = 2{,}5$ m. Hugo a calculé $4{,}8 \div 5{,}76 \approx 0{,}83$: il a oublié le ÷3, sa valeur correspond à un prisme droit.

(c) Le côté devient $3 \times 2{,}4 = 7{,}2$ m, donc $\mathcal{B} = 7{,}2^2 = 51{,}84$ m² et $V = \frac{51{,}84 \times 2{,}5}{3} = 43{,}2$ m³. Or $43{,}2 \div 4{,}8 = 9$: le volume est multiplié par 9, car l'aire de la base est multipliée par $3^2 = 9$. Lina a tort.

Ex. 6 ★★★ **La pyramide en verre du hall**

(a) Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64 + 64 = 128$. Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu, donc H est le milieu de [AC] et $AH = \frac{AC}{2}$: $AH^2 = \frac{AC^2}{4} = \frac{128}{4} = 32$.

(b) [SH] est la hauteur, donc le triangle SHA est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore : $SH^2 = SA^2 - AH^2 = 81 - 32 = 49$, donc $SH = 7$ m.

(c) $\mathcal{B} = 8 \times 8 = 64$ m², puis $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{64 \times 7}{3} = \frac{448}{3}$ m³ $\approx 149{,}3$ m³.

(d) Noé a pris l'arête latérale SA = 9 m comme hauteur : la hauteur est SH = 7 m, perpendiculaire à la base. Il a aussi oublié de diviser par 3 : une pyramide est un solide « pointu ». Le bon volume est $\frac{448}{3}$ m³ $\approx 149{,}3$ m³.

Ex. 7 ★★★ **La citerne d'eau de pluie**

(a) Le rayon vaut $1{,}2 \div 2 = 0{,}6$ m. $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 0{,}6^2 \times 2{,}5 = 0{,}9\pi$ m³.

(b) 1 m³ = 1 000 L, donc $V = 0{,}9\pi \times 1\,000 = 900\pi$ L $\approx 2\,827{,}4$ L.

Ex. 7 **(suite)**

(c) Inès a écrit $2 \times \pi \times r$ (le périmètre du cercle) au lieu de l'aire du disque $\pi \times r^2$. Elle a aussi divisé par 3 alors qu'un cylindre est un solide « droit » : $V = \mathcal{B} \times h$, sans $\div 3$.

(d) 900π L $= 900\,000\pi$ cm³. Aire du fond : $150 \times 120 = 18\,000$ cm². Hauteur d'eau : $900\,000\pi \div 18\,000 = 50\pi$ cm $\approx 157{,}1$ cm.

(e) 1,5 m = 150 cm et 157,1 cm $>$ 150 cm : la hauteur d'eau dépasse celle de la cuve, donc l'eau déborde.

Ex. 8 ★★★ **Les bougies de Yanis**

(a) $V_1 = 5 \times 5 \times 8 = 200$ cm³.

(b) La pyramide est un solide « pointu » : $V_2 = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{5 \times 5 \times 6}{3} = 50$ cm³.

(c) Volume d'une bougie : $200 + 50 = 250$ cm³. 2,2 L = 2 200 cm³ et $2\,200 \div 250 = 8{,}8$. Yanis peut fabriquer 8 bougies entières.

(d) Le rayon vaut $10 \div 2 = 5$ cm. $\frac{\pi \times 5^2 \times h}{3} = 250$, donc $h = \frac{250 \times 3}{25\pi} = \frac{30}{\pi}$ cm $\approx 9{,}5$ cm.

2. *Sphère et boule : aire et volume*

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : aires et volumes directs**

(a) $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times R^2 = 4 \times \pi \times 4^2 = 64\pi$ cm² $\approx 201{,}1$ cm².

(b) $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 27 = 36\pi$ cm³ $\approx 113{,}1$ cm³.

(c) Le diamètre vaut 3 cm, donc $R = 3 \div 2 = 1{,}5$ cm. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 1{,}5^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3{,}375 = 4{,}5\pi$ cm³ $\approx 14{,}1$ cm³. (Si on arrondit 3,375 à 3,4 en cours de calcul, on trouve 14,2 cm³, ce qui est faux : on arrondit à la fin seulement.)

(d) $R = 7{,}6 \div 2 = 3{,}8$ cm. $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 3{,}8^2 = 4 \times \pi \times 14{,}44 = 57{,}76\pi$ cm² $\approx 181{,}5$ cm².

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes : sphère ou boule, et erreurs de formule**

(a) Le cuir est l'enveloppe du ballon : c'est une surface, la sphère. On calcule son aire, en cm².

(b) L'air remplit l'intérieur : c'est un solide, la boule. On calcule son volume, en cm³ (ou en L).

(c) Seul R est au cube, pas $\frac{4}{3} \times \pi$. $R^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, donc $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 8 = \frac{32}{3}\pi$ cm³.

(d) Tom a calculé $2 \times R$ au lieu de R^2. $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 3^2 = 4 \times \pi \times 9 = 36\pi$ cm².

Ex. 10 **(suite)**

(e) 1 L = 1 000 cm³, donc 3 500 cm³ $= 3\,500 \div 1\,000 = 3{,}5$ L.

Ex. 11 ★★☆ **Deux lampes boules : on double le rayon**

(a) Petite : $V_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = \frac{4\,000}{3}\pi$ cm³ $\approx 4\,188{,}8$ cm³. Grande : $V_2 = \frac{4}{3} \times \pi \times 20^3 = \frac{32\,000}{3}\pi$ cm³ $\approx 33\,510{,}3$ cm³.

(b) Non. $V_2 \div V_1 = 32\,000 \div 4\,000 = 8$: quand le rayon est multiplié par 2, le volume est multiplié par $2^3 = 8$, pas par 2.

(c) Petite : $4 \times \pi \times 10^2 = 400\pi$ cm² $\approx 1\,256{,}6$ cm². Grande : $4 \times \pi \times 20^2 = 1\,600\pi$ cm² $\approx 5\,026{,}5$ cm². $1\,600 \div 400 = 4 = 2^2$: l'aire est multipliée par 4.

(d) $V_2 = \frac{32\,000}{3}\pi$ cm³ $\approx 33\,510{,}3$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, $V_2 \approx 33{,}5$ L.

Ex. 12 ★★☆ **Le bol d'Emma**

(a) 16 cm est le diamètre, pas le rayon : il faut d'abord calculer $R = 16 \div 2 = 8$ cm. Avec 16^3, Emma trouve un volume $2^3 = 8$ fois trop grand.

(b) Une demi-boule a pour volume $\frac{2}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 8^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 512 = \frac{1\,024}{3}\pi$ cm³ $\approx 1\,072{,}3$ cm³ $\approx 1{,}1$ L.

(c) L'intérieur du bol est la moitié de la sphère (le dessus est ouvert, donc pas de disque) : $\mathcal{A} = \frac{4 \times \pi \times 8^2}{2} = 128\pi$ cm² $\approx 402{,}1$ cm².

Ex. 13 ★★☆ **La boule de Noé dans sa boîte (Archimède)**

(a) $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = 4\,500\pi$, donc $R^3 = 4\,500 \times 3 \div 4 = 3\,375$. Donc $R = \sqrt[3]{3\,375} = 15$ cm.

(b) Rayon 15 cm, hauteur $2 \times 15 = 30$ cm : $V = \pi \times 15^2 \times 30 = 6\,750\pi$ cm³ $\approx 21\,205{,}8$ cm³.

(c) $\frac{4\,500\pi}{6\,750\pi} = \frac{2}{3}$: la boule occupe les deux tiers de la boîte (résultat d'Archimède).

(d) $6\,750\pi - 4\,500\pi = 2\,250\pi$ cm³ $\approx 7\,068{,}6$ cm³ $\approx 7{,}1$ L.

Ex. 14 ★★★ **Le silo de la coopérative de Malik**

(a) Le rayon vaut $r = 9 \div 2 = 4{,}5$ m. $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 4{,}5^2 \times 11 = \pi \times 20{,}25 \times 11 = 222{,}75\pi$ m³ $\approx 699{,}8$ m³.

(b) Le toit est une demi-boule. Son volume est la moitié de celui de la boule, soit $\frac{2}{3}\pi R^3$. Yanis a calculé la boule entière, donc un volume deux fois trop grand. $V = \frac{2}{3} \times \pi \times 4{,}5^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 91{,}125 = 60{,}75\pi$ m³ $\approx 190{,}9$ m³.

Ex. 14 (suite)

(c) $V_{\text{silo}} = 222{,}75\pi + 60{,}75\pi = 283{,}5\pi$ m³ $\approx 890{,}6$ m³ (on additionne les valeurs exactes, puis on arrondit). Comme 1 m³ = 1 000 L, 900 000 L = 900 m³. Or $890{,}6 < 900$. Non, le silo ne peut pas contenir 900 000 L de blé.

(d) Le toit est une demi-sphère : son aire est la moitié de celle de la sphère, soit $\frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 4{,}5^2 = 2 \times \pi \times 20{,}25 = 40{,}5\pi$ m² $\approx 127{,}2$ m². Il faut $40{,}5\pi \div 6 \approx 21{,}2$ L de peinture. Avec 4 pots, on n'a que 20 L : ce n'est pas assez. Avec 5 pots, on a 25 L. Il faut donc acheter 5 pots.

Ex. 15 ★★★ Le bac de glace de Léonie

(a) Le rayon vaut $R = 5 \div 2 = 2{,}5$ cm. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}5^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 15{,}625 = \frac{125}{6}\pi$ cm³ $\approx 65{,}4$ cm³.

(b) $V_{\text{bac}} = 24 \times 15 \times 10 = 3\,600$ cm³ $= 3{,}6$ L. En gardant la valeur exacte : $3\,600 \div \frac{125}{6}\pi \approx 55{,}0$. Léonie peut servir au plus 55 boules
(56 boules demanderaient environ 3 665 cm³, c'est trop).

(c) Pour $R = 2{,}8$ cm : $\frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}8^3 \approx 92{,}0$ cm³. Pour $R = 2{,}9$ cm : $\frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}9^3 \approx 102{,}2$ cm³. 100 est entre les deux. Il est plus proche de 102,2 (écart 2,2) que de 92,0 (écart 8). Le rayon qui convient le mieux est donc 2,9 cm.

(d) Le diamètre de la boule est égal à l'arête du cube, donc la boule tient exactement dans le gobelet. $V_{\text{cube}} = 5^3 = 125$ cm³ et $V_{\text{boule}} = \frac{125}{6}\pi \approx 65{,}4$ cm³. Or $\frac{125}{6}\pi \div 125 = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$, soit plus de la moitié. C'est vrai.

Ex. 16 ★★★ Le globe terrestre d'Amandine

(a) Le rayon vaut $R = 32 \div 2 = 16$ cm. Dans $4\pi R^2$, seul R est au carré : Zoé a mis au carré tout le produit $4 \times \pi \times 16$. L'aire correcte est $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times 16^2 = 4 \times \pi \times 256 = 1\,024\pi$ cm² $\approx 3\,217{,}0$ cm².

(b) La sphère est une surface. On calcule le volume de la boule qu'elle limite : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 16^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 4\,096 = \frac{16\,384}{3}\pi$ cm³ $\approx 17\,157{,}3$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, cela fait environ 17,2 L.

(c) L'hémisphère Nord est la moitié de la sphère terrestre. $A = \frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 6\,371^2 = 2 \times \pi \times 40\,589\,641 = 81\,179\,282\pi$ km² $\approx 255\,000\,000$ km², soit environ 255 millions de km².

Ex. 16 (suite)

(d) $4 \times \pi \times R^2 = 1\,764\pi$, donc $R^2 = 441$ et $R = \sqrt{441} = 21$ cm : le diamètre mesure 42 cm. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 21^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 9\,261 = 12\,348\pi$ cm³ $\approx 38\,792{,}4$ cm³. Le double du volume du globe d'Amandine vaut environ 34 314,6 cm³, et $38\,792{,}4 > 34\,314{,}6$. Oui, c'est plus du double : le rayon est multiplié par $k = 21 \div 16 = 1{,}3125$, donc le volume par $k^3 \approx 2{,}26$.

3. *Sections d'un pavé, d'un cylindre, d'une sphère*

Ex. 17 ★☆☆ Automatismes : nommer une section

(a) Le plan est parallèle à une face, donc la section a les mêmes dimensions que cette face : c'est un carré de 7 cm de côté.

(b) Le plan est perpendiculaire à l'axe, donc la section est un disque de même rayon que la base : un disque de rayon 4 cm.

(c) Le plan est parallèle à l'axe et le contient, donc la section est un rectangle de $2r$ sur h : $2 \times 4 = 8$, soit un rectangle de 8 cm sur 9 cm.

(d) Le plan passe par le centre ($d = 0$), donc la section est un grand cercle, de même rayon que la sphère : un cercle de rayon 4,5 cm
(un cercle, pas un disque, car c'est une sphère).

(e) À 3 cm du centre, $d = R$: le plan touche la boule en un seul point. À 3,5 cm, $d > R$: le plan ne coupe pas la boule, il n'y a pas de section.

Ex. 18 ★☆☆ Automatismes : rayon d'une section de sphère

(a) Le triangle OHM est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $HM^2 = OM^2 - OH^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, donc $r = 12$ cm.

(b) Le triangle OHM est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $r^2 = 6{,}1^2 - 1{,}1^2 = 37{,}21 - 1{,}21 = 36$, donc $r = 6$ cm.

(c) La distance au centre vaut $d = 41 - 1 = 40$ cm (et non 1 cm). Le triangle OHM est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $r^2 = 41^2 - 40^2 = 1\,681 - 1\,600 = 81$, donc $r = 9$ cm.

(d) $[OM]$ est l'hypoténuse du triangle OHM rectangle en H : il faut soustraire, pas additionner. $r^2 = 37^2 - 12^2 = 1\,369 - 144 = 1\,225$, donc $r = 35$ cm.

Ex. 19 ★★☆ **Deux coupes dans un pavé droit**

(a) Le plan est parallèle à la face $BCGF$, donc la section est un rectangle de mêmes dimensions que cette face : $IJKM$ est un rectangle de 5 cm sur 7 cm.

(b) Le plan est parallèle à l'arête $[AD]$, donc la section est un rectangle dont un côté est $AD = 7$ cm. Le triangle ABF est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore : $AF^2 = AB^2 + BF^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$, donc $AF = 13$ cm.

(c) $AFGD$ est un rectangle de 13 cm sur 7 cm : $\mathcal{A} = 13 \times 7 = 91$ cm².

Ex. 20 ★★☆ **La bûche sciée**

(a) Le plan est perpendiculaire à l'axe, donc la section est un disque de même rayon que la base : $r = 17 \div 2 = 8{,}5$ cm. $\mathcal{A} = \pi \times 8{,}5^2 = 72{,}25\pi$ cm² ≈ 227 cm².

(b) Non. Le plan ne contient pas l'axe, donc un côté du rectangle est une corde plus courte que le diamètre. Le triangle OHM est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $HM^2 = 8{,}5^2 - 4^2 = 72{,}25 - 16 = 56{,}25$, donc $HM = 7{,}5$ cm et $MN = 2 \times 7{,}5 = 15$ cm. La section est un rectangle de 15 cm sur 40 cm.

(c) $\mathcal{A} = 15 \times 40 = 600$ cm².

Ex. 21 ★★☆ **Le fromage en boule**

(a) Non. La section d'une boule par un plan est toujours un disque ; en perspective, un disque est dessiné comme un ovale (une ellipse), mais c'est bien un disque.

(b) Le triangle OHM est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $r^2 = R^2 - d^2 = 7{,}5^2 - 4{,}5^2 = 56{,}25 - 20{,}25 = 36$, donc $r = 6$ cm.

(c) La section est un disque : $\mathcal{A} = \pi \times 6^2 = 36\pi$ cm² $\approx 113{,}1$ cm².

(d) $\pi r^2 = 20{,}25\pi$ donne $r^2 = 20{,}25$, donc $r = 4{,}5$ cm. Dans le triangle OHM rectangle en H : $d^2 = R^2 - r^2 = 56{,}25 - 20{,}25 = 36$, donc le plan est à $d = 6$ cm de O.

Ex. 22 ★★★ **Le bloc de mousse du tapissier**

(a) Le plan est parallèle à la face $ADHE$, donc la section est un rectangle de mêmes dimensions que cette face : $AD = BC = 15$ cm et $AE = 7$ cm. La section est un rectangle de 15 cm sur 7 cm.

Ex. 22 (suite)

(b) Le plan contient les arêtes parallèles [AE] et [CG], donc la section est le rectangle $ACGE$, de côtés $AE = 7$ cm et AC. Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$, donc $AC = 25$ cm. La section est un rectangle de 25 cm sur 7 cm : Yanis a tort, il a pris AB à la place de la diagonale AC.

(c) Le plan est parallèle à l'arête [AE], donc la section est un rectangle dont un côté mesure $IN = AE = 7$ cm. $BI = AB - AI = 20 - 12 = 8$ cm. Le triangle IBJ est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore : $IJ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, donc $IJ = 10$ cm. $IJPN$ est un rectangle de 10 cm sur 7 cm ; aire : $10 \times 7 = 70$ cm².

(d) Il faudrait $IK = 140 \div 7 = 20$ cm. Le triangle IBK est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore : $BK^2 = IK^2 - BI^2 = 20^2 - 8^2 = 400 - 64 = 336$. Or $BC^2 = 15^2 = 225$ et $336 > 225$, donc $BK > BC$: le point K ne serait pas sur [BC]. Ce n'est pas possible.

Ex. 23 ★★★ **La citerne couchée**

(a) Le plan est perpendiculaire à l'axe, donc la section est un disque de même rayon que la base : $r = 2{,}6 \div 2 = 1{,}3$ m. Aire : $\pi \times 1{,}3^2 = 1{,}69\pi$ m² $\approx 5{,}31$ m².

(b) Le plan horizontal est parallèle à l'axe de la citerne, donc la section est un rectangle (et non un disque), dont un côté est la longueur de la citerne, 4 m.

(c) $OF = 1{,}3$ m (le rayon), donc $OH = OF - HF = 1{,}3 - 0{,}8 = 0{,}5$ m. Le triangle OHM est rectangle en H avec $OM = 1{,}3$ m, donc d'après le théorème de Pythagore : $HM^2 = OM^2 - OH^2 = 1{,}69 - 0{,}25 = 1{,}44$, donc $HM = 1{,}2$ m. Par symétrie, H est le milieu de [NM], donc $NM = 2 \times 1{,}2 = 2{,}4$ m.

(d) La surface est un rectangle de 2,4 m sur 4 m : aire $= 2{,}4 \times 4 = 9{,}6$ m².

(e) À moitié pleine, la surface du liquide passe par l'axe : le plan contient l'axe, donc la section est un rectangle de $2r$ sur la longueur, soit 2,6 m sur 4 m. Inès a tort : elle a pris le rayon au lieu du diamètre. Aire : $2{,}6 \times 4 = 10{,}4$ m².

Ex. 24 ★★★ **La boule posée sur le vase**

(a) La section d'une boule par un plan est un disque (l'ovale vient seulement de la perspective). Son bord est l'ouverture, donc son rayon est $20 \div 2 = 10$ cm. Aire : $\pi \times 10^2 = 100\pi$ cm² $\approx 314{,}2$ cm².

Ex. 24 **(suite)**

(b) Le triangle OHM est rectangle en H, avec $OM = 14{,}5$ cm et $HM = 10$ cm. D'après le théorème de Pythagore : $OH^2 = OM^2 - HM^2 = 210{,}25 - 100 = 110{,}25$, donc $OH = 10{,}5$ cm.

(c) Le point le plus bas de la boule est à 14,5 cm sous O, et le plan de l'ouverture est à 10,5 cm sous O. La boule descend de $14{,}5 - 10{,}5 = 4$ cm sous l'ouverture.

(d) Il faut mesurer la distance depuis le centre O, et non depuis l'ouverture : $d = 25 - 10{,}5 = 14{,}5$ cm. On a $d = R$, donc le plan de l'étagère coupe la sphère en un seul point : l'étagère touche la boule en un seul point, son sommet.

(e) Le rayon de l'ouverture serait $32 \div 2 = 16$ cm. Le rayon r d'une section de la sphère vérifie $r^2 = R^2 - d^2 \leqslant R^2$, donc $r \leqslant 14{,}5$ cm (le grand cercle, quand $d = 0$, est la plus grande section). Aucun cercle de la sphère n'a un rayon de 16 cm : la boule passe à travers l'ouverture et tombe dans le vase. Sami a tort.

4. *Section d'une pyramide ou d'un cône parallèle à la base*

Ex. 25 ★☆☆ **Le rapport k et la nature de la section**

(a) $k = \dfrac{\text{petite hauteur}}{\text{grande hauteur}} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

(b) La distance est donnée depuis la base : la petite hauteur est $SP = 25 - 10 = 15$ cm.
Donc $k = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

(c) Tom a divisé la grande hauteur par la petite : il trouve $k > 1$, ce qui est impossible pour une réduction. On a $k = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

(d) Le plan est parallèle à la base, donc la section est une réduction de la base : c'est un carré, de côté $9 \times \frac{2}{3} = 6$ cm.

(e) Le plan est parallèle à la base, donc la section est une réduction de la base : c'est un disque (pas seulement un cercle), de rayon $4{,}5 \times 0{,}4 = 1{,}8$ cm.

Ex. 26 ★☆☆ **Aires, volumes et rapport retrouvé**

(a) Les aires sont multipliées par k^2 : $50 \times 0{,}3^2 = 50 \times 0{,}09 = 4{,}5$ cm².

(b) À mi-hauteur, $k = \frac{1}{2}$ et les volumes sont multipliés par k^3 : $640 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{640}{8} = 80$ cm³. Nina a tort.

Ex. 26 **(suite)**

(c) Petite pyramide : $540 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{540}{27} = 20$ cm³. Le tronc n'est pas une réduction, on fait la différence : $540 - 20 = 520$ cm³.

(d) Les aires sont multipliées par k^2 : $k^2 = \frac{12}{75} = 0{,}16$. Comme $0{,}4^2 = 0{,}16$, on a $k = 0{,}4$.

(e) Les volumes sont multipliés par k^3 : $k^3 = \frac{2}{128} = \frac{1}{64}$. Comme $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$, on a $k = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ex. 27 ★★☆ **Le pied de lampe de Malik**

(a) La distance est donnée depuis la base : $SP = 24 - 8 = 16$ cm.
Donc $k = \frac{SP}{SO} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

(b) Le plan est parallèle à la base, donc la section est une réduction de la base, de rapport $k = \frac{2}{3}$: c'est un carré, de côté $18 \times \frac{2}{3} = 12$ cm. Son aire vaut $12^2 = 144$ cm² (vérification : $324 \times \frac{4}{9} = 144$).

(c) $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{18^2 \times 24}{3} = 2\,592$ cm³. Les volumes sont multipliés par k^3 : $2\,592 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2\,592 \times \frac{8}{27} = 768$ cm³.

(d) Le tronc se calcule par différence : $2\,592 - 768 = 1\,824$ cm³, soit 1,824 L.

Ex. 28 ★★☆ **Le verre à pied de Lucas**

(a) La surface du jus est parallèle à la base, donc c'est une réduction de la base : un disque. Le jus forme un petit cône de sommet S et de hauteur SP : $k = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

(b) Les longueurs sont multipliées par k : $PQ = 5 \times 0{,}8 = 4$ cm.

(c) $V = \frac{\pi \times 5^2 \times 15}{3} = 125\pi$ cm³ $\approx 392{,}7$ cm³. Volume de jus : $125\pi \times 0{,}8^3 = 125\pi \times 0{,}512 = 64\pi$ cm³ $\approx 201{,}1$ cm³, soit environ 20,1 cL.

(d) Non. Les volumes sont multipliés par k^3 et pas par k : $\frac{64\pi}{125\pi} = 0{,}512$. Le verre est donc rempli à 51,2 % (un peu plus de la moitié), et non à 80 %.

Ex. 29 ★★☆ **Le plot de sport d'Amina**

(a) La section est une réduction de la base, donc $k = \frac{PQ}{OB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Les longueurs sont multipliées par k : $SP = 27 \times \frac{1}{3} = 9$ cm et $OP = 27 - 9 = 18$ cm.

(b) Grand cône : $V = \frac{\pi \times 9^2 \times 27}{3} = 729\pi$ cm³. Les volumes sont multipliés par k^3 : petit cône : $729\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 27\pi$ cm³.

(c) Le tronc de cône se calcule par différence : $729\pi - 27\pi = 702\pi$ cm³ $\approx 2\,205{,}4$ cm³, soit environ 2,2 L.

Ex. 29 **(suite)**

(d) $\frac{702\pi}{729\pi} = \frac{26}{27}$: le plot représente les $\frac{26}{27}$ du volume du cône.

Ex. 30 ★★★ **Les affirmations de Malo sur le presse-papier**

(a) Faux. La distance de 4 cm est mesurée depuis la base : la petite hauteur est SP $= 16 - 4 = 12$ cm.
Donc $k = \frac{SP}{SO} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

(b) Faux. Le plan est parallèle à la base, donc la section est une réduction de la base de rapport $k = \frac{3}{4}$: c'est un carré de côté $12 \times \frac{3}{4} = 9$ cm, d'aire $9^2 = 81$ cm² (soit bien $144 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$). Malo a multiplié l'aire 144 cm² par k au lieu de k^2.

(c) Faux. Volume de la pyramide : $\frac{12^2 \times 16}{3} = 768$ cm³. Les volumes sont multipliés par k^3 : petite pyramide $768 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 768 \times \frac{27}{64} = 324$ cm³ (vérification : $\frac{81 \times 12}{3} = 324$). Malo a calculé $768 \times \frac{3}{4} = 576$: il a multiplié par k au lieu de k^3.

(d) Vrai. Tronc de pyramide = grand volume − petit volume $= 768 - 324 = 444$ cm³. La moitié du volume entier vaut $768 \div 2 = 384$ cm³ et $444 > 384$. (Le calcul $768 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 192$ cm³ serait faux : le tronc n'est pas une réduction.)

Ex. 31 ★★★ **Le silo à grain de Nathan**

(a) Cylindre : $\pi \times 3^2 \times 7 = 63\pi$ m³. Cône : $\frac{\pi \times 3^2 \times 6}{3} = 18\pi$ m³. Silo : $63\pi + 18\pi = 81\pi$ m³ $\approx 254{,}5$ m³.

(b) Le grain forme un petit cône, réduction du cône de rapport $k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (la hauteur de grain est la petite hauteur). Les volumes sont multipliés par k^3 : $18\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2{,}25\pi$ m³ $\approx 7{,}1$ m³. Volume à ajouter : $18\pi - 2{,}25\pi = 15{,}75\pi$ m³ $\approx 49{,}5$ m³.

(c) Le grain forme un petit cône, réduction de rapport k du cône, donc $k^3 = \frac{8}{27}$. Comme $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, on a $k = \frac{2}{3}$. Hauteur de grain : $6 \times \frac{2}{3} = 4$ m.

(d) Le plan de la surface est parallèle à la base, donc la section est une réduction du disque de base : c'est un disque (et non un cercle) de rayon $3 \times \frac{2}{3} = 2$ m. Aire : $\pi \times 2^2 = 4\pi$ m² $\approx 12{,}6$ m².

Ex. 32 ★★★ **La bougie pyramidale de Sofia**

(a) Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, d'où AC $= 10$ cm. H est le centre du rectangle, donc le milieu de [AC] : AH $= 5$ cm. Le triangle SHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $SH^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, d'où SH $= 12$ cm.

Ex. 32 **(suite)**

(b) $k = \frac{SH'}{SH} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
(petite hauteur ÷ grande hauteur, toutes deux mesurées depuis le sommet).

(c) Le plan est parallèle à la base, donc la section est une réduction du rectangle ABCD de rapport $k = 0{,}25$: c'est un rectangle de $8 \times 0{,}25 = 2$ cm sur $6 \times 0{,}25 = 1{,}5$ cm, d'aire $2 \times 1{,}5 = 3$ cm²
(soit bien $48 \times 0{,}25^2$).

(d) Volume de SABCD : $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{8 \times 6 \times 12}{3} = 192$ cm³.
Les volumes sont multipliés par k^3 : petite pyramide $192 \times 0{,}25^3 = 192 \times \frac{1}{64} = 3$ cm³
(vérification : $\frac{3 \times 3}{3} = 3$).

(e) Volume du tronc de pyramide = grand volume − petit volume $= 192 - 3 = 189$ cm³. Or 1 L = 1 000 cm³, donc 189 cm³ = 0,189 L. Comme $0{,}189 < 0{,}2$, la cire de Sofia suffit.

5. *Latitude et longitude*

Ex. 33 ★☆☆ **Lire et écrire des coordonnées**

(a) La latitude se mesure depuis l'équateur, donc c'est l'angle $\widehat{EOM} = 35°$ et non $\widehat{NOM} = 55°$ (mesuré depuis le pôle). M est dans l'hémisphère Nord : latitude 35° N.

(b) Inès a inversé l'ordre : on écrit la latitude en premier, puis la longitude.
Donc M (35° N ; 140° E).

(c) Sur un même parallèle, la latitude est la même (35° N). Sur le méridien de Greenwich, la longitude vaut 0°.
Donc B (35° N ; 0°).

(d) Sur un même méridien, la longitude est la même (140° E). Sur l'équateur, la latitude vaut 0°.
Donc C (0° ; 140° E).

(e) Une latitude va de 0° (équateur) à 90° (pôle) : elle ne peut pas valoir 97°. Ce point n'existe pas.

Ex. 34 ★☆☆ **Écarts angulaires et antipode**

(a) Les latitudes sont de part et d'autre de l'équateur : on les ajoute. $18 + 27 = 45$, l'écart vaut 45°.

(b) Les deux longitudes sont du même côté de Greenwich (Ouest) : on les soustrait. $74 - 12 = 62$, l'écart vaut 62°.

(c) De 34° O, on parcourt 34° vers l'est pour atteindre Greenwich, puis encore $86 - 34 = 52°$. Longitude de F : 52° E.

Ex. 34 **(suite)**

(d) La latitude change d'hémisphère : 24° S. La longitude passe de l'autre côté de Greenwich : $180 - 110 = 70$, soit 70° O.
Donc P' (24° S ; 70° O).

Ex. 35 ★★☆ **Du Caire à Durban le long d'un méridien**

(a) Les deux villes sont de part et d'autre de l'équateur : on ajoute les latitudes. $30 + 30 = 60$, l'écart vaut 60° (et non 0°).

(b) Un méridien est une moitié de grand cercle, de rayon 6 371 km. Arc $= \frac{60}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 = \frac{6\,371\pi}{3}$ km $\approx$ 6 672 km.

(c) L'arc est proportionnel à l'angle : angle $= \frac{2\,000 \times 360}{2 \times \pi \times 6\,371} \approx 17{,}99°$. Latitude $\approx 30 + 17{,}99 \approx 48{,}0°$ N.

Ex. 36 ★★☆ **D'Amsterdam à Saskatoon le long du parallèle**

(a) Les droites (HM) et (OE) sont perpendiculaires à (ON), donc parallèles. Les angles alternes-internes $\widehat{OMH}$ et $\widehat{MOE}$ sont égaux : $\widehat{OMH} = 52°$. Le triangle OHM est rectangle en H, donc $\cos\widehat{OMH} = \frac{HM}{OM}$ et $HM = 6\,371 \times \cos 52° \approx 3\,922$ km
(avec cos, pas sin).

(b) Les deux longitudes sont de part et d'autre de Greenwich : on les ajoute. $107 + 5 = 112$, l'écart vaut 112°.

(c) Sur un parallèle, on prend le cercle de rayon HM, et non celui de rayon 6 371 km : arc $= \frac{112}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 \times \cos 52° \approx 7\,667$ km.

Ex. 37 ★★☆ **Vrai ou faux sur les distances terrestres**

(a) Faux. Les deux longitudes sont du même côté de Greenwich : écart $= 85 - 15 = 70°$ (et non 100°). Arc $= \frac{70}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 \approx 7\,784$ km.

(b) Faux. L'écart vaut bien $40 - 10 = 30°$, mais l'arc est sur le parallèle, de rayon $HM = 6\,371 \times \cos 63°$ (triangle OHM rectangle en H), et non sur un grand cercle. Arc $= \frac{30}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 \times \cos 63° \approx 1\,514$ km.

(c) Vrai. Même longitude, donc même méridien. Latitudes de part et d'autre de l'équateur : écart $= 12 + 12 = 24°$. Arc $= \frac{24}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 \approx 2\,669$ km.

Ex. 38 ★★★ **La copie de Malo sur l'équateur**

(a) Malo a inversé les deux coordonnées. 9° E est la **longitude** de Libreville : c'est l'angle compté depuis le méridien de Greenwich, vers l'Est. Sa **latitude** est 0°, car Libreville est sur l'équateur. Phrase corrigée : « Libreville est à 0° de latitude et à 9° de longitude Est », soit L (0° ; 9° E), avec la latitude écrite en premier.

(b) Non. Quito est à l'Ouest de Greenwich et Libreville à l'Est : les longitudes sont de part et d'autre du méridien de Greenwich, donc on ajoute les angles.
$\widehat{QOL} = 78° + 9° = 87°$.

(c) L'équateur est un grand cercle, de longueur $2 \times \pi \times 6\,371 = 12\,742\pi$ km. La longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle : $\frac{87}{360} \times 12\,742\pi \approx 9\,674$ km.

(d) Je cherche l'angle a tel que $\frac{a}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 = 3\,000$, donc $a = \frac{3\,000 \times 360}{2 \times \pi \times 6\,371} \approx 26{,}98°$. Vers l'ouest, le navire parcourt d'abord 9° pour atteindre le méridien de Greenwich, puis $26{,}98° - 9° = 17{,}98°$ au-delà, donc vers l'Ouest. J'arrondis à la fin : le point d'arrivée est (0° ; 18° O).

Ex. 39 ★★★ **De Lisbonne à Athènes le long du parallèle 38° N**

(a) Les droites (HM) et (OE) sont parallèles, car toutes deux sont perpendiculaires à l'axe des pôles. Les angles alternes-internes $\widehat{OMH}$ et $\widehat{EOM}$ sont donc égaux : $\widehat{OMH} = 38°$. Le triangle OHM est rectangle en H, et $[HM]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{OMH}$.
Donc $\cos\widehat{OMH} = \frac{HM}{OM}$, d'où $HM = 6\,371 \times \cos 38° \approx 5\,020$ km. Avec le sinus, Sofiane a calculé le côté opposé OH : c'est la distance du centre au plan du parallèle, pas son rayon.

(b) Je garde la valeur exacte de HM et j'arrondis à la fin : $2 \times \pi \times 6\,371 \times \cos 38° \approx 31\,544$ km.

(c) Les longitudes 9° O et 24° E sont de part et d'autre du méridien de Greenwich, donc on ajoute :
$9° + 24° = 33°$. Sur le parallèle, la longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle : $\frac{33}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 \times \cos 38° \approx 2\,892$ km.

(d) Jade a calculé l'arc sur un grand cercle : $\frac{33}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 \approx 3\,669$ km. Or le parallèle 38° N n'est pas un grand cercle. Son rayon $HM = 6\,371 \times \cos 38° \approx 5\,020$ km est plus petit que 6 371 km, donc l'arc est plus court. La bonne distance est d'environ 2 892 km.

Ex. 40 ★★★ **Un vol plein sud depuis Tromsø**

(a) L'affirmation est fausse : 19° E est la longitude, pas la latitude. T et C sont sur le même méridien, et les points d'un même méridien ont la même longitude. C'est donc la longitude qui reste égale à 19° E. La latitude, elle, varie : elle diminue de 70° N jusqu'à 0° à l'équateur, puis augmente jusqu'à 34° S.

(b) T et C sont de part et d'autre de l'équateur, donc on ajoute les latitudes : $\widehat{TOC} = 70° + 34° = 104°$. Le méridien est la moitié d'un grand cercle de rayon 6 371 km. La longueur du trajet vaut $\frac{104}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 \approx 11\,564$ km.

(c) Je cherche l'angle a parcouru : $a = \frac{9\,000 \times 360}{2 \times \pi \times 6\,371} \approx 80{,}94°$. L'avion part de 70° N vers le sud : il atteint l'équateur après 70°, puis parcourt encore $80{,}94 - 70 = 10{,}94°$ dans l'hémisphère Sud (et non $70 - 80{,}94$, qui est négatif). J'arrondis à la fin : sa latitude est 11° S et ses coordonnées sont (11° S; 19° E).

(d) L'antipode a la même latitude, mais dans l'autre hémisphère. Sa longitude vaut $180° - 19° = 161°$, de l'autre côté de Greenwich.
Donc C' (34° N; 161° O). De C au pôle Sud, l'angle vaut $90° - 34° = 56°$. Du pôle Sud à C', l'avion traverse l'équateur : $90° + 34° = 124°$. Au total, $56° + 124° = 180°$, soit la moitié d'un grand cercle : $\frac{180}{360} \times 2 \times \pi \times 6\,371 = 6\,371\pi \approx 20\,015$ km.

6. *Exercices type brevet*

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : le rapport de réduction**

(a) Le plan est à 3,5 cm du sommet, donc la petite hauteur vaut 3,5 cm. $k = \frac{3{,}5}{14} = 0{,}25$.

(b) Attention : 4 cm sont mesurés depuis la base. La petite hauteur vaut $20 - 4 = 16$ cm, donc $k = \frac{16}{20} = 0{,}8$.

(c) La section est une réduction de la base. Les aires sont multipliées par k^2 : $72 \times 0{,}5^2 = 72 \times 0{,}25 = 18$ cm². La section a une aire de 18 cm².

(d) Non. Pour un volume, on multiplie par k^3, pas par k : $405 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{405}{27} = 15$ cm³. La petite pyramide a un volume de 15 cm³.

(e) Les volumes sont multipliés par k^3, donc $k^3 = \frac{54}{2\,000} = 0{,}027$. Or $0{,}3^3 = 0{,}027$, donc $k = 0{,}3$.

Ex. 42 ★★☆ **Automatismes : boule, sphère et section**

(a) Le rayon vaut la moitié du diamètre : $R = 10 \div 2 = 5$ cm. $V = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500\pi}{3}$ cm³ $\approx 523{,}6$ cm³.

(b) $\mathcal{A} = 4\pi \times 3{,}5^2 = 4\pi \times 12{,}25 = 49\pi$ cm² $\approx 153{,}9$ cm².

(c) $V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 12^3 = \frac{2}{3}\pi \times 1\,728 = 1\,152\pi$ cm³ $\approx 3\,619{,}1$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, le bol contient environ 3,6 L.

(d) $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2\,048\pi}{3}$, donc $4R^3 = 2\,048$, d'où $R^3 = 512$ et $R = \sqrt[3]{512} = 8$ cm. La boule a un rayon de 8 cm.

(e) Le triangle OHM est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $HM^2 = OM^2 - OH^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$, d'où $HM = \sqrt{576} = 24$ cm. La section est un cercle de rayon 24 cm.

Ex. 43 ★★☆ **Le cornet de glace**

(a) $OB = 5 \div 2 = 2{,}5$ cm. Le triangle SOB est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SO^2 = SB^2 - OB^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2 = 42{,}25 - 6{,}25 = 36$, d'où $SO = 6$ cm.

(b) Cône : $\frac{\pi \times 2{,}5^2 \times 6}{3} = 12{,}5\pi$ cm³. Demi-boule : $\frac{2}{3}\pi \times 2{,}5^3 = \frac{125\pi}{12}$ cm³. Total : $\frac{150\pi}{12} + \frac{125\pi}{12} = \frac{275\pi}{12}$ cm³ $\approx 72{,}0$ cm³.

(c) $V = 25 \times 18 \times 10 = 4\,500$ cm³ $= 4{,}5$ L. $4\,500 \div \frac{275\pi}{12} \approx 62{,}5$: le bac permet de servir 62 cornets complets.

(d) Glace restante : $4\,500 - 40 \times \frac{275\pi}{12} \approx 4\,500 - 2\,879{,}8 = 1\,620{,}2$ cm³. La base du bac mesure $25 \times 18 = 450$ cm², donc la hauteur vaut $1\,620{,}2 \div 450 \approx 3{,}6$ cm. La glace arrive encore à environ 3,6 cm de hauteur.

Ex. 44 ★★☆ **La lampe en verre**

(a) La distance de 6 cm est mesurée depuis la base : $SP = 24 - 6 = 18$ cm. Le plan est parallèle à la base, donc la section est une réduction de la base de rapport $k = \frac{SP}{SO} = \frac{18}{24} = 0{,}75$.

(b) $OJ = 16 \div 2 = 8$ cm. Dans le triangle SOJ, P est sur [SO] et Q est sur [SJ]. Les droites (PQ) et (OJ) sont perpendiculaires à (SO), donc parallèles. D'après le théorème de Thalès, $\frac{PQ}{OJ} = \frac{SP}{SO}$, donc $PQ = 8 \times 0{,}75 = 6$ cm. Le côté de la section mesure $2 \times 6 = 12$ cm et son aire vaut $12^2 = 144$ cm²
(on retrouve $256 \times 0{,}75^2$).

(c) Pyramide entière : $V = \frac{16^2 \times 24}{3} = 2\,048$ cm³. Petite pyramide : les volumes sont multipliés par k^3, donc $2\,048 \times 0{,}75^3 = 864$ cm³
(on vérifie : $\frac{144 \times 18}{3} = 864$).

Ex. 44 (suite)

(d) Le tronc n'est pas une réduction : on calcule la différence $2\,048 - 864 = 1\,184$ cm³ $= 1{,}184$ L. Le pourcentage vaut $\frac{1\,184}{2\,048} \times 100 \approx 57{,}8$ %. Le socle a un volume de 1,184 L, soit environ 57,8 % du volume de la pyramide.

Ex. 45 ★★☆ De Saint-Pétersbourg à Durban

(a) Non, elle a inversé la latitude et la longitude. La latitude (60°, au nord de l'équateur) s'écrit en premier avec N ou S. La longitude (30°, à l'est de Greenwich) s'écrit ensuite avec E ou O. Les bonnes coordonnées sont (60° N ; 30° E).

(b) Les deux villes sont dans deux hémisphères différents, donc on additionne les latitudes : $60° + 30° = 90°$. La longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle : $2\pi \times 6\,371 \times \frac{90}{360} \approx 10\,007{,}5$ km. Le trajet mesure environ 10 007,5 km.

(c) (HM) et (OE) sont parallèles, donc $\widehat{OMH} = \widehat{EOM} = 30°$ (angles alternes-internes). Le triangle OHM est rectangle en H, donc $\cos\widehat{OMH} = \frac{HM}{OM}$, d'où $HM = 6\,371 \times \cos 30° \approx 5\,517{,}4$ km. Le parallèle de Durban a un rayon d'environ 5 517,4 km.

(d) Parallèle : $2\pi \times 6\,371 \times \cos 30° \approx 34\,667{,}1$ km. Équateur : $2\pi \times 6\,371 \approx 40\,030{,}2$ km. Le rapport est $\cos 30° \approx 0{,}866$, donc le parallèle est plus court d'environ $(1 - 0{,}866) \times 100 \approx 13{,}4$ %.

Ex. 46 ★★★ Le silo à grains

(a) Le rayon vaut $OC = 4{,}8 \div 2 = 2{,}4$ m. Le triangle SOC est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $SC^2 = SO^2 + OC^2$, soit $SO^2 = 2{,}6^2 - 2{,}4^2 = 6{,}76 - 5{,}76 = 1$.
Donc $SO = 1$ m.

(b) Cylindre : $\pi \times 2{,}4^2 \times 6 = 34{,}56\pi$ m³. Cône : $\frac{\pi \times 2{,}4^2 \times 1}{3} = 1{,}92\pi$ m³ (sans oublier le $\div 3$). Silo : $34{,}56\pi + 1{,}92\pi = 36{,}48\pi$ m³ $\approx 114{,}6$ m³. Le silo a un volume d'environ 114,6 m³.

(c) $\frac{1{,}92\pi}{36{,}48\pi} \approx 0{,}053$. Le cône représente environ 5,3 % du volume du silo.

(d) 100 000 L $= 100$ m³, et $100 < 114{,}6$: le blé ne déborde pas. Le cône se remplit d'abord, avec $1{,}92\pi \approx 6{,}03$ m³. Il reste $100 - 1{,}92\pi$ m³ dans le cylindre, dont la base a pour aire $\pi \times 2{,}4^2 = 5{,}76\pi$ m². Hauteur : $\frac{100 - 1{,}92\pi}{5{,}76\pi} \approx 5{,}2$ m. Le blé arrive à environ 5,2 m au-dessus de [DC].

Ex. 47 ★★★ Le coffret de boules de pétanque

(a) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, donc $R^3 = \frac{3 \times V}{4\pi} = \frac{3 \times 195{,}4}{4\pi} \approx 46{,}65$.
Donc $R \approx \sqrt[3]{46{,}65} \approx 3{,}6$ cm.

(b) Le diamètre d'une boule vaut $2 \times 3{,}6 = 7{,}2$ cm (et non 3,6 cm). Comme $7{,}2 < 8$, on ne peut faire qu'une rangée sur une seule couche. Ensuite, $24 \div 7{,}2 \approx 3{,}3$. Inès peut donc ranger au maximum 3 boules.

(c) Coffret : $V = 24 \times 8 \times 8 = 1\,536$ cm³. Boules : $3 \times 195{,}4 = 586{,}2$ cm³. Espace vide : $1\,536 - 586{,}2 = 949{,}8$ cm³. Comme 1 L $= 1\,000$ cm³, il lui faut environ 0,9 L de mousse.

(d) Aire d'une sphère : $4\pi \times 3{,}6^2 = 51{,}84\pi$ cm². Pour trois boules : $3 \times 51{,}84\pi = 155{,}52\pi$ cm² $\approx 488{,}6$ cm². Or $488{,}6 > 400$. Un seul flacon ne suffit pas.

Ex. 48 ★★★ Le verre à pied

(a) Le rayon vaut $OB = 9 \div 2 = 4{,}5$ cm. $V = \frac{\pi \times 4{,}5^2 \times 12}{3} = 81\pi$ cm³ $\approx 254{,}5$ cm³. Comme 1 cL $= 10$ cm³, le verre contient environ 25,4 cL.

(b) La distance de 4 cm est mesurée depuis le bord, donc $SP = 12 - 4 = 8$ cm. Les droites (PQ) et (OB) sont perpendiculaires à (SO), donc parallèles. D'après le théorème de Thalès : $\frac{SP}{SO} = \frac{PQ}{OB}$, soit $PQ = \frac{4{,}5 \times 8}{12} = 3$ cm. La surface du jus a un rayon de 3 cm.

(c) Le cône de jus est une réduction du verre, de rapport $k = \frac{SP}{SO} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Les volumes sont multipliés par k^3 : $81\pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 81\pi \times \frac{8}{27} = 24\pi$ cm³ $\approx 75{,}4$ cm³. Or $\frac{8}{27} \approx 0{,}296$: le verre n'est rempli qu'à environ 29,6 %. Tom a tort, car il a multiplié par k au lieu de k^3.

(d) Il faut $k^3 = 0{,}5$, donc $k = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}794$. La hauteur du jus vaut $12 \times 0{,}794 \approx 9{,}5$ cm. Il faut arrêter le jus à environ 9,5 cm du sommet S, soit environ 2,5 cm sous le bord.