## 1. Rappels de 5e : fractions égales, comparer, additionner

**Ex. 1** ★☆☆ **Automatismes : simplifier et compléter**

(a) 28 et 63 sont dans la table de 7 : $\frac{28}{63} = \frac{28\div 7}{63\div 7} = \frac{4}{9}$.

(b) $26 = 2 \times 13$ et $39 = 3 \times 13$, donc $\frac{26}{39} = \frac{2}{3}$.

(c) $6 \times 7 = 42$, donc je multiplie aussi le numérateur par 7 : $\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$.

(d) $7 \times 9 = 63$, donc je multiplie aussi le dénominateur par 9 : $\frac{7}{8} = \frac{63}{72}$.

(e) $6 = \frac{6 \times 5}{5} = \frac{30}{5}$.

(f) $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, et $4 \times 5 = 20$, donc $0{,}75 = \frac{15}{20}$.

**Ex. 2** ★☆☆ **Automatismes : additionner, soustraire, multiplier par un entier**

(a) Même dénominateur : $\frac{3+4}{10} = \frac{7}{10}$.

(b) $18 = 6 \times 3$ : $\frac{3}{18} + \frac{7}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

(c) Table de 16 : 16, 32, 48 et $48 = 12 \times 4$ : $\frac{21}{48} + \frac{4}{48} = \frac{25}{48}$ (inutile de prendre 192).

(d) $3 = \frac{15}{5}$, donc $\frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$.

(e) $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ : $\frac{11}{14} - \frac{4}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

(f) Seul le numérateur est multiplié par 7 : $\frac{7\times 4}{21} = \frac{7\times 4}{7\times 3} = \frac{4}{3}$.

(g) Table de 9 : 9, 18 et $18 = 6 \times 3$ : $\frac{14}{18} - \frac{3}{18} = \frac{11}{18}$.

**Ex. 3** ★★☆ **Comparer, ranger, encadrer**

(a) Même numérateur : un neuvième est plus gros qu'un onzième, donc $\frac{5}{9} > \frac{5}{11}$.

(b) Table de 20 : 20, 40, 60 et $60 = 15 \times 4$. $\frac{7}{15} = \frac{28}{60}$ et $\frac{9}{20} = \frac{27}{60}$ ; $28 > 27$, donc $\frac{7}{15} > \frac{9}{20}$.

(c) Au dénominateur 12 : $\frac{8}{12}$ ; $\frac{9}{12}$ ; $\frac{7}{12}$ ; $\frac{10}{12}$.
Donc $\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

(d) $0{,}6 = \frac{3}{5}$. Au dénominateur 35 : $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ et $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$.
$20 < 21$, donc c'est vrai.

(e) $2 = \frac{12}{6}$ et $3 = \frac{18}{6}$, et $12 < 17 < 18$.
Donc $2 < \frac{17}{6} < 3$.

**Ex. 4** ★★☆ **Repère l'erreur et corrige**

(a) Non : il a additionné les dénominateurs. Au dénominateur 20 : $\frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$.

(b) Non : elle a multiplié le dénominateur par 4, mais pas le numérateur. $\frac{3}{7} = \frac{3\times 4}{7\times 4} = \frac{12}{28}$.

(c) Non : on ne multiplie que le numérateur par 6. $\frac{6\times 7}{18} = \frac{6\times 7}{6\times 3} = \frac{7}{3}$.

(d) Non : même dénominateur, on le garde. $\frac{5+1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

(e) Non : il a inversé les deux opérations. On divise par le dénominateur, puis on multiplie par le numérateur : $56 \div 8 = 7$, puis $7 \times 3 = 21$. Les $\frac{3}{8}$ du réservoir font 21 L.

**Ex. 5** ★★★ **Pyramides de fractions**

(a) $24 = 8 \times 3$, donc $\frac{3}{8} + \frac{1}{24} = \frac{9}{24} + \frac{1}{24} = \frac{10}{24}$. On simplifie par 2 : $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$. La brique vaut $\frac{5}{12}$.

(b) $24 = 6 \times 4$, donc $\frac{1}{24} + \frac{5}{6} = \frac{1}{24} + \frac{20}{24} = \frac{21}{24}$. On simplifie par 3 : $\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$. La brique vaut $\frac{7}{8}$.

(c) Table de 12 : 12, 24, et $24 = 8 \times 3$. C'est le plus petit dénominateur commun. Le produit $12 \times 8 = 96$ marcherait aussi, mais avec de plus grands nombres. $\frac{5}{12} + \frac{7}{8} = \frac{10}{24} + \frac{21}{24} = \frac{31}{24}$, irréductible car 31 est premier et ne divise pas 24. Le sommet vaut $\frac{31}{24}$.

(d) Le sommet est la somme des deux briques du milieu, donc la brique de droite vaut $\frac{11}{10} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10} - \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$.

(e) À gauche : $\frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{8}{20} - \frac{3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. À droite : $\frac{7}{10} - \frac{3}{20} = \frac{14}{20} - \frac{3}{20} = \frac{11}{20}$. Les briques du bas valent $\frac{1}{4}$ et $\frac{11}{20}$.

**Ex. 6** ★★★ **Le jardin partagé**

(a) $360 \div 9 = 40$, puis $40 \times 2 = 80$. Les légumes occupent 80 m².

(b) $360 \div 12 = 30$, puis $30 \times 5 = 150$. Les fleurs occupent 150 m².

(c) Table de 12 : 12, 24, 36, et $36 = 9 \times 4$. $\frac{2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{8}{36} + \frac{15}{36} = \frac{23}{36}$ (et pas $\frac{7}{21}$ : on n'additionne pas les dénominateurs). Vérification : $80 + 150 = 230$ et $\frac{230}{360} = \frac{23}{36}$. Ensemble, ils occupent les $\frac{23}{36}$ du jardin.

(d) Le jardin entier vaut $1 = \frac{36}{36}$, donc la pelouse occupe $\frac{36}{36} - \frac{23}{36} = \frac{13}{36}$ du jardin. $360 \div 36 = 10$, puis $10 \times 13 = 130$. La pelouse mesure 130 m² (on retrouve bien $360 - 230 = 130$).

**Ex. 6** **(suite)**

(e) $\frac{1}{7}$ du jardin mesure $105 \div 5 = 21$ m², donc le jardin entier mesure $21 \times 7 = 147$ m².

**Ex. 7** ★★★ **Vrai ou faux : cinq affirmations**

(a) Vrai : 20 est un multiple de 10 et de 4. $\frac{3}{10} + \frac{1}{4} + \frac{9}{20} = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} + \frac{9}{20} = \frac{20}{20} = 1$.

(b) Faux : pour multiplier par 3, on ne multiplie que le numérateur. D'ailleurs $\frac{12}{45} = \frac{4}{15}$ : la fraction n'a pas changé. On simplifie avant : $3 \times \frac{4}{15} = \frac{3\times4}{3\times5} = \frac{4}{5}$. Le triple de $\frac{4}{15}$ est $\frac{4}{5}$.

(c) Faux : ajouter un même nombre aux deux termes ne donne pas une fraction égale, il faut les multiplier. $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{14}{21}$ alors que $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$. Une fraction égale à $\frac{3}{7}$ serait par exemple $\frac{3\times5}{7\times5} = \frac{15}{35}$.

(d) Vrai : $\frac{3}{7} = \frac{3\times2}{7\times2} = \frac{6}{14}$. Les deux fractions ont alors le même numérateur, et un treizième est plus grand qu'un quatorzième.
Donc $\frac{6}{13} > \frac{6}{14}$, c'est-à-dire $\frac{6}{13} > \frac{3}{7}$.

(e) Vrai : l'entier 4 s'écrit $\frac{24}{6}$, donc $4 - \frac{5}{6} = \frac{24}{6} - \frac{5}{6} = \frac{19}{6}$.

## 2. *Signe d'une fraction, écritures égales, simplifier par la décomposition*

**Ex. 8** ★☆☆ **Le signe devant, puis on simplifie**

(a) Le numérateur et le dénominateur sont tous les deux négatifs, donc le quotient est positif : $\frac{-7}{-9} = \frac{7}{9}$.

(b) Un seul terme est négatif, donc le quotient est négatif : $\frac{14}{-21} = -\frac{2\times7}{3\times7} = -\frac{2}{3}$.

(c) $\frac{-15}{35} = -\frac{3\times5}{7\times5} = -\frac{3}{7}$, et son opposé vaut $-\left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{7}$.

(d) Les deux termes sont négatifs, donc le quotient est positif : $\frac{-48}{-36} = \frac{48}{36} = \frac{2^4\times3}{2^2\times3^2} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$.

(e) $\frac{-56}{8} = -\frac{56}{8} = -7$ : le résultat est un entier.

(f) $\frac{0}{-13} = 0$, car le numérateur est nul
(le dénominateur, lui, n'est pas nul).

**Ex. 9** ★☆☆ **Le nombre qui manque**

(a) $63 = 9 \times 7$, donc on multiplie aussi le numérateur par 7 : $\frac{4}{9} = \frac{28}{63}$.

(b) $-42 = 6 \times (-7)$, donc on multiplie aussi le numérateur par $-7$ : $\frac{-5}{6} = \frac{35}{-42}$.

(c) Un entier est un rationnel : $-8 = \frac{-8}{1} = \frac{-8\times3}{1\times3} = \frac{-24}{3}$.

(d) $-4 = 32 \div (-8)$, donc on divise aussi le dénominateur par $-8$ : $\frac{32}{-56} = \frac{-4}{7}$.

**Ex. 9** **(suite)**

(e) On multiplie les deux termes par 10 : $\frac{2{,}4}{1{,}5} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$. Le nombre qui manque est 8.

(f) Le quotient est positif et $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. Ensuite $25 = 5 \times 5$, donc $\frac{3}{5} = \frac{15}{25}$.

**Ex. 10** ★★☆ **Décomposer pour simplifier**

(a) $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $378 = 2 \times 3^3 \times 7$. Les facteurs communs sont $2 \times 3^2$. Il reste $\frac{2\times5}{3\times7}$, donc $\frac{180}{378} = \frac{10}{21}$.

(b) $264 = 2^3 \times 3 \times 11$ et $616 = 2^3 \times 7 \times 11$. On barre $2^3$ et 11. Il y a un seul signe moins, donc $\frac{-264}{616} = -\frac{3}{7}$.

(c) $490 = 2 \times 5 \times 7^2$ et $693 = 3^2 \times 7 \times 11$. Un seul 7 est commun, il reste un 7 en haut : $\frac{490}{-693} = -\frac{2\times5\times7}{3^2\times11} = -\frac{70}{99}$.

(d) Les deux termes sont négatifs, donc le quotient est positif. $325 = 5^2 \times 13$ et $546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$. On barre 13 : $\frac{-325}{-546} = \frac{25}{42}$.

(e) $385 = 5 \times 7 \times 11$ et $624 = 2^4 \times 3 \times 13$. Ces deux nombres n'ont aucun facteur premier commun, donc $\frac{385}{624}$ ne se simplifie pas : elle est déjà irréductible.

**Ex. 11** ★★☆ **Les erreurs de la classe**

(a) Non. Le numérateur et le dénominateur sont tous les deux négatifs, donc le quotient est positif : $\frac{-11}{-12} = \frac{11}{12}$.

(b) Pas tout à fait. On a bien $-\frac{5}{9} = \frac{5}{-9}$, mais $\frac{-5}{-9} = \frac{5}{9}$, qui est positif. La deuxième égalité est donc fausse.

(c) Non. Ajouter le même nombre en haut et en bas ne donne pas une fraction égale. On a $3 \times 11 = 33$ et $7 \times 7 = 49$, donc les deux fractions sont différentes. Il faut multiplier les deux termes par un même nombre, par exemple $\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$.

(d) Non. Le 4 du haut est un terme d'une somme, pas un facteur, donc on ne peut pas le barrer. On calcule d'abord la somme : $\frac{4+9}{4} = \frac{13}{4}$, qui est différent de 9.

(e) Non. $39 = 3 \times 13$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ ont encore le facteur 3 en commun : $\frac{39}{60} = \frac{13}{2^2\times5} = \frac{13}{20}$. 13 n'est pas un facteur de 20, donc $\frac{156}{240} = \frac{13}{20}$, et c'est cette fraction qui est irréductible.

**Ex. 12** ★★★ **Qui est égal à qui ?**

(a) Un quotient est négatif quand un seul des deux termes est négatif, positif quand les deux ont le même signe. $A$, $B$, $E$, $G$ : un seul signe moins, ils sont négatifs. $C$ et $H$ : deux nombres négatifs, ils sont positifs. $D$ : $-\left(\frac{-4}{6}\right)$ est l'opposé d'un nombre négatif, il est positif. $F = -6$ est négatif.

**Ex. 12** **(suite)**

(b) $A = -\frac{2\times7}{3\times7} = -\frac{2}{3}$ ; $B = -\frac{2\times5}{3\times5} = -\frac{2}{3}$ ; $C = \frac{22}{33} = \frac{2\times11}{3\times11} = \frac{2}{3}$ ; $G = -\frac{2^3\times3}{2^2\times3^2} = -\frac{2}{3}$.

(c) $D = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $E = -\frac{36}{6} = -6$, $H = \frac{12}{2} = 6$. Groupes : $A = B = G = -\frac{2}{3}$ ; $C = D = \frac{2}{3}$ ; $E = F = -6$ ; $H = 6$ est seul. Attention : $C$ et $A$ ne sont pas égaux, ils sont opposés.

(d) Hugo a tort : $-6 = \frac{-6}{1}$, c'est un quotient de deux entiers, donc un nombre rationnel. D'ailleurs $-6 = E = \frac{-36}{6}$.

(e) $-\frac{2}{3} = \frac{2}{-3}$ et $-45 = -3 \times 15$, donc $-\frac{2}{3} = \frac{2\times15}{-3\times15} = \frac{30}{-45}$. Attention : $\frac{-30}{-45}$ serait positif.

**Ex. 13** ★★★ **Vrai ou faux sur les fractions**

(a) Faux : les deux termes de $\frac{-5}{-8}$ sont négatifs, donc $\frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$ est positif. Son opposé $-\frac{-5}{-8} = -\frac{5}{8}$ est donc négatif.

(b) Faux : $\frac{4\times(-3)}{7\times(-3)} = \frac{-12}{-21}$. Les deux termes sont négatifs, donc le quotient est positif. On a multiplié les deux termes par un même nombre non nul, donc $\frac{-12}{-21} = \frac{4}{7}$.

(c) Faux : en haut, 8 est un terme d'une somme, pas un facteur, on ne peut pas le barrer. $\frac{8+20}{8\times5} = \frac{28}{40} = \frac{2^2\times7}{2^3\times5} = \frac{7}{2\times5} = \frac{7}{10}$, et $\frac{7}{10} \neq 4$.

(d) Faux : 1 n'est pas un nombre premier, il ne figure pas dans la décomposition. On écrit $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.

(e) Faux : $119 = 7 \times 17$ et $187 = 11 \times 17$ ont le facteur premier 17 en commun.
Donc $\frac{-119}{187} = -\frac{7\times17}{11\times17} = -\frac{7}{11}$.

**Ex. 14** ★★★ **Le tournoi d'échecs d'Annecy**

(a) Noé a bien divisé les deux termes par 2, mais 84 et 196 sont encore pairs : ils ont encore un diviseur commun. La fraction $\frac{84}{196}$ n'est pas irréductible.

(b) $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ et $392 = 2^3 \times 7^2$. Je barre $2^3$ et un seul 7 : $\frac{168}{392} = \frac{3}{7}$. Margaux a gagné les $\frac{3}{7}$ de ses parties.

(c) $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ et $350 = 2 \times 5^2 \times 7$. Je barre 2 et $5^2$ : $\frac{150}{350} = \frac{3}{7}$. Sofiane a gagné les $\frac{3}{7}$ de ses parties.

(d) Oui : les deux fractions se simplifient en la même fraction irréductible $\frac{3}{7}$. Les deux équipes ont gagné la même proportion de parties.

(e) Je complète $\frac{3}{7} = \frac{\cdots}{91} : 91 = 7 \times 13$, il manque le facteur 13. $\frac{3}{7} = \frac{3\times13}{7\times13} = \frac{39}{91}$. La troisième équipe a gagné 39 parties.

## 3. *Comparer et ranger des nombres rationnels*

**Ex. 15** ★☆☆ **Automatismes : comparer deux nombres**

(a) Un négatif est plus petit qu'un positif : $-\frac{3}{7} < \frac{1}{9}$.

(b) Même dénominateur positif : $-8 < -5$, donc $-\frac{8}{11} < -\frac{5}{11}$.

(c) Sans les signes : $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$. $-\frac{1}{5}$ est plus loin de zéro, donc $-\frac{1}{5} < -\frac{1}{6}$.

(d) $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ et $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$. Or $15 > 14$, donc $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

(e) Sans les signes : $\frac{9}{8} > 1$ car $9 > 8$. On inverse : $-\frac{9}{8} < -1$.

(f) $\frac{-12}{-13} = \frac{12}{13}$, et $12 < 13$, donc $\frac{-12}{-13} < 1$.

(g) $\frac{4}{-10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$, donc $\frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$.

**Ex. 16** ★☆☆ **Automatismes : encadrer entre deux entiers**

(a) $23 = 6 \times 3 + 5$, donc $3 < \frac{23}{6} < 4$.

(b) $11 = 4 \times 2 + 3$, donc $2 < \frac{11}{4} < 3$. Je passe aux opposés et j'inverse : $-3 < -\frac{11}{4} < -2$.

(c) $0 < \frac{6}{7} < 1$ car $6 < 7$, donc $-1 < -\frac{6}{7} < 0$.

(d) $\frac{-29}{7} = -\frac{29}{7}$ et $29 = 7 \times 4 + 1$, donc $4 < \frac{29}{7} < 5$ et $-5 < \frac{-29}{7} < -4$.

(e) $\frac{31}{-10} = -\frac{31}{10} = -3{,}1$, donc $-4 < \frac{31}{-10} < -3$.

(f) $-\frac{50}{8} = -\frac{25}{4}$ et $25 = 4 \times 6 + 1$, donc $6 < \frac{25}{4} < 7$ et $-7 < -\frac{50}{8} < -6$.

**Ex. 17** ★★☆ **Ranger et intercaler**

(a) Avec le dénominateur 20 : $-\frac{7}{20}$ ; $-\frac{8}{20}$ ; $\frac{1}{20}$ ; $-\frac{6}{20}$ ; $-\frac{9}{20}$.
Or $-9 < -8 < -7 < -6 < 1$.
Donc $-\frac{9}{20} < -\frac{2}{5} < -0{,}35 < -\frac{3}{10} < \frac{1}{20}$.

(b) Avec le dénominateur 18 : $\frac{5}{-6} = -\frac{15}{18}$ ; $-\frac{7}{9} = -\frac{14}{18}$ ; $-\frac{13}{18}$ ; $-1 = -\frac{18}{18}$. Or $-13 > -14 > -15 > -18$.
Donc $-\frac{13}{18} > -\frac{7}{9} > \frac{5}{-6} > -1$.

(c) Avec le dénominateur 30 : $-\frac{25}{30}$ et $-\frac{24}{30}$, il n'y a pas d'entier entre $-25$ et $-24$. Avec 60 : $-\frac{50}{60}$ et $-\frac{48}{60}$.
Donc $-\frac{49}{60}$ convient.

(d) Avec le dénominateur 20 : $-2{,}3 = -\frac{46}{20}$ ; $-\frac{9}{4} = -\frac{45}{20}$ ; $-\frac{12}{5} = -\frac{48}{20}$. Or $-48 < -46 < -45$ : le plus petit nombre est $-\frac{12}{5}$. Le plongeur le plus profond est celui qui est à $-\frac{12}{5}$ m.

**Ex. 18** ★★☆ **Sur une droite graduée en cinquièmes**

(a) Une graduation vaut $\frac{1}{5}$. A est 8 graduations à gauche de 0 : $-\frac{8}{5}$. B : $-\frac{4}{5}$. C : $\frac{4}{5}$.

(b) $-\frac{4}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$. L'abscisse de D est $-\frac{1}{5}$.

(c) $\frac{9}{-5} = -\frac{9}{5}$ et A a pour abscisse $-\frac{8}{5}$. Même dénominateur positif : $-9 < -8$, donc $-\frac{9}{5} < -\frac{8}{5}$. Le point est à gauche de A : Hugo a tort.

(d) Avec le dénominateur 10 : A a pour abscisse $-\frac{16}{10}$ et B $-\frac{8}{10}$. Or $-16 < -9 < -8$. C'est vrai : le point est entre A et B.

**Ex. 19** ★★★ **Vrai ou faux : les pièges des signes**

(a) Sans les signes : $\frac{4}{7} = \frac{36}{63}$ et $\frac{5}{9} = \frac{35}{63}$, donc $\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$. Entre deux négatifs, l'ordre s'inverse : $-\frac{4}{7} < -\frac{5}{9}$. C'est faux.

(b) Les dénominateurs sont égaux et positifs, donc je compare les numérateurs, qui sont des relatifs : $-11 < -7$.
Donc $\frac{-11}{12} < \frac{-7}{12}$. Inès a tort : c'est faux.

(c) $\frac{13}{-12} = -\frac{13}{12}$ et $-1 = -\frac{12}{12}$. Comme $-13 < -12$, on a $-\frac{13}{12} < -1$. C'est faux : $\frac{13}{-12}$ est plus petit que $-1$.

(d) $-\frac{1}{40}$ est négatif et $\frac{1}{900}$ est positif, donc $-\frac{1}{40} < \frac{1}{900}$.
Tom a tort : c'est faux
(on compare sans les signes seulement entre deux négatifs).

(e) $\frac{-20}{-24} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$. Or $\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ et $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$, donc $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$. Et $5 < 6$, donc $\frac{5}{6} < 1$. C'est vrai.

**Ex. 20** ★★★ **Températures dans le massif de Briançon**

(a) Sans les signes : $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ et $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$, donc $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$. Mais entre deux négatifs, le plus loin de zéro est le plus petit : $-\frac{2}{3} < -\frac{5}{8}$. B est plus froide que C : Noé a tort.

(b) $-0{,}6 = -\frac{6}{10} = -\frac{72}{120}$ ; $-\frac{2}{3} = -\frac{80}{120}$ ; $-\frac{5}{8} = -\frac{75}{120}$ ; $\frac{3}{20} = \frac{18}{120}$ ; $-\frac{7}{10} = -\frac{84}{120}$.

(c) Je range les numérateurs : $-84 < -80 < -75 < -72 < 18$.
Donc $-\frac{7}{10} < -\frac{2}{3} < -\frac{5}{8} < -0{,}6 < \frac{3}{20}$. De la plus froide à la plus chaude : E, B, C, A, D.

(d) C : $-\frac{75}{120}$ et A : $-\frac{72}{120}$. Comme $-75 < -73 < -72$, la température $-\frac{73}{120}$ °C convient
(ou $-\frac{74}{120} = -\frac{37}{60}$ °C).

**Ex. 21** ★★★ **Droite graduée en quarts et points cachés**

(a) Une graduation vaut $\frac{1}{4}$. R : $-\frac{5}{4}$ ; S : $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ ; T : $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Avec le dénominateur 20 : $-\frac{25}{20}$ ; $-\frac{10}{20}$ ; $\frac{30}{20}$ ; $\frac{7}{5} = \frac{28}{20}$.
Or $-25 < -10 < 28 < 30$, donc $-\frac{5}{4} < -\frac{1}{2} < \frac{7}{5} < \frac{3}{2}$.

(b) Sans les signes : $\frac{11}{9} = \frac{44}{36}$ et $\frac{5}{4} = \frac{45}{36}$, donc $\frac{11}{9} < \frac{5}{4}$, d'où $-\frac{11}{9} > -\frac{5}{4}$. De plus $\frac{11}{9} > 1$, d'où $-\frac{11}{9} < -1 < -\frac{1}{2}$. V est donc entre R et S, à gauche de $-1$.

(c) $\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ : le quotient de deux négatifs est positif. M est donc à droite de 0, 3 graduations après 0, entre 0 et T. Lucas a placé $-\frac{3}{4}$ : il a tort.

(d) $13 = 5 \times 2 + 3$, donc $2 < \frac{13}{5} < 3$. En passant aux opposés, les inégalités s'inversent : $-3 < -\frac{13}{5} < -2$.
Léa a tort : W est entre $-3$ et $-2$, donc à gauche de la partie dessinée.

## 4. *Additionner et soustraire des fractions relatives*

**Ex. 22** ★☆☆ **Automatismes : même dénominateur**

(a) $\frac{-4+7}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (on simplifie par 3).

(b) $\frac{2-9}{11} = \frac{-7}{11} = -\frac{7}{11}$.

(c) $\frac{-5-6}{13} = \frac{-11}{13} = -\frac{11}{13}$.

(d) Soustraire $-\frac{7}{8}$, c'est ajouter $\frac{7}{8}$ : $\frac{3+7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

(e) $-\left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{12}$, donc $\frac{5-11}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$.

(f) On rend le dénominateur positif : $\frac{7}{-10} = \frac{-7}{10}$, donc $\frac{-7+3}{10} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$.

**Ex. 23** ★☆☆ **Automatismes : dénominateurs différents**

(a) Dénominateur commun 12 (et pas 24) : $\frac{-10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{-1}{12} = -\frac{1}{12}$.

(b) Soustraire $-\frac{4}{9}$, c'est ajouter $\frac{4}{9}$. Dénominateur commun 18 : $\frac{3}{18} + \frac{8}{18} = \frac{11}{18}$.

(c) $-3 = \frac{-21}{7}$, donc $\frac{-21+5}{7} = \frac{-16}{7} = -\frac{16}{7}$.

(d) $0{,}6 = \frac{3}{5}$ ; dénominateur 20 : $\frac{12}{20} - \frac{35}{20} = \frac{-23}{20} = -\frac{23}{20}$.

(e) Dénominateur commun 30 : $\frac{-14}{30} - \frac{5}{30} = \frac{-19}{30} = -\frac{19}{30}$.

(f) $\frac{5}{-8} = \frac{-5}{8}$ et $2 = \frac{16}{8}$ : $\frac{-5+16}{8} = \frac{11}{8}$.

**Ex. 24** ★★☆ **Repère l'erreur et corrige**

(a) Léa a additionné les numérateurs et les dénominateurs. Dénominateur commun 10 : $\frac{-6}{10}+\frac{5}{10}=\frac{-1}{10}$. Le bon résultat est $-\frac{1}{10}$.

(b) Hugo a gardé la soustraction : soustraire $-\frac{2}{9}$, c'est ajouter $\frac{2}{9}$. $\frac{15}{36}+\frac{8}{36}=\frac{23}{36}$. Le bon résultat est $\frac{23}{36}$.

(c) Inès a écrit $-2$ comme $\frac{-2}{9}$, alors que $-2=\frac{-18}{9}$. $\frac{-18+4}{9}=\frac{-14}{9}$. Le bon résultat est $-\frac{14}{9}$.

(d) Malo a oublié le signe : $7-9=-2$, donc $\frac{-2}{12}=-\frac{1}{6}$. Le résultat est négatif, car $\frac{3}{4}$ est plus grand que $\frac{7}{12}$.

**Ex. 25** ★★☆ **Le niveau de l'étang**

(a) $0{,}15=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$. Dénominateur commun 20 : $\frac{-6}{20}+\frac{5}{20}-\frac{3}{20}=\frac{-4}{20}=-\frac{1}{5}$. La variation totale est $-\frac{1}{5}$ m : le niveau a baissé.

(b) On calcule $\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{5}{20}+\frac{6}{20}=\frac{11}{20}$. Il faut ajouter $\frac{11}{20}$ m.

(c) Variation de la semaine 4 $=\frac{1}{12}-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{60}+\frac{12}{60}=\frac{17}{60}$. Le niveau a monté de $\frac{17}{60}$ m pendant la semaine 4.

**Ex. 26** ★★★ **Le carré magique relatif**

(a) $0{,}25=\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ et $\frac{5}{-12}=\frac{-5}{12}$.
Donc $S=\frac{3}{12}+\frac{-1}{12}+\frac{-5}{12}=\frac{3-1-5}{12}=\frac{-3}{12}$. On simplifie par 3 : la somme magique est $S=-\frac{1}{4}$.

(b) Le nombre manquant vaut $S-\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{12}=\frac{-3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}=\frac{-3+4-1}{12}=0$. Le nombre qui manque dans la ligne 1 est 0.

(c) Colonne 1 : $S-\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}=\frac{-3+4-3}{12}=\frac{-2}{12}=-\frac{1}{6}$.
Ligne 3 : $S-\left(-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{6}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{4}$. Les deux cases valent $-\frac{1}{6}$ et $-\frac{1}{4}$.

(d) Première diagonale : $-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{6}=\frac{-4-1+2}{12}=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$. Seconde diagonale : $0+\left(-\frac{1}{12}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{0-1-2}{12}=-\frac{1}{4}$. Les deux diagonales ont aussi pour somme $S=-\frac{1}{4}$ : le tableau est bien un carré magique.

**Ex. 27** ★★★ **Vrai ou faux sur les signes**

(a) Faux. Soustraire $-\frac{4}{21}$, c'est ajouter $\frac{4}{21}$. Dénominateur commun 21 : $\frac{6}{21}+\frac{4}{21}=\frac{10}{21}$. Le bon résultat est $\frac{10}{21}$.

(b) Faux. $\frac{3}{-8}=\frac{-3}{8}$ et $4=\frac{32}{8}$, et non $\frac{4}{8}$.
Donc $\frac{-3-32}{8}=\frac{-35}{8}$. Le bon résultat est $-\frac{35}{8}$.

(c) Vrai. Le plus petit dénominateur commun est 30 : $\frac{21}{30}+\frac{-22}{30}=\frac{-1}{30}$. Le nombre $-\frac{11}{15}$ est plus loin de zéro que $\frac{7}{10}$, donc il impose son signe : la somme $-\frac{1}{30}$ est bien négative.

(d) Faux. $-\left(-\frac{5}{14}\right)=\frac{5}{14}$ et $\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$, donc $\frac{5-6}{14}=\frac{-1}{14}$. Le bon résultat est $-\frac{1}{14}$ : $-\left(-\frac{5}{14}\right)$ ne vaut pas $-\frac{5}{14}$.

**Ex. 27** (suite)

(e) Vrai. $0{,}35=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$, $\frac{9}{10}=\frac{18}{20}$ et soustraire $-\frac{1}{4}$, c'est ajouter $\frac{5}{20}$.
Donc $\frac{7-18+5}{20}=\frac{-6}{20}=-\frac{3}{10}$ : l'égalité est vraie.

**Ex. 28** ★★★ **Le relais de Lille**

(a) $-1{,}2=-\frac{12}{10}=-\frac{6}{5}$. Le plus petit dénominateur commun de 4, 3 et 5 est 60 : $\frac{-75}{60}+\frac{40}{60}+\frac{-72}{60}=\frac{-75+40-72}{60}=\frac{-107}{60}$. L'écart total est $-\frac{107}{60}$ minute : l'équipe est en avance.

(b) $-2=\frac{-120}{60}$. Écart du 4e : $-2-\left(-\frac{107}{60}\right)=\frac{-120}{60}+\frac{107}{60}=\frac{-13}{60}$. Le 4e relayeur doit faire un écart de $-\frac{13}{60}$ minute, c'est-à-dire avoir $\frac{13}{60}$ minute d'avance.

(c) $-\frac{107}{60}+\frac{1}{4}=\frac{-107}{60}+\frac{15}{60}=\frac{-92}{60}$, et on simplifie par 4 : $-\frac{23}{15}$. L'écart total réel est $-\frac{23}{15}$ minute : l'équipe reste en avance sur le temps prévu.

(d) $-\frac{23}{15}-(-2)=-\frac{23}{15}+\frac{30}{15}=\frac{7}{15}$. La différence est positive : l'équipe a fini $\frac{7}{15}$ de minute plus tard que l'objectif, qui n'est donc pas atteint.

## 5. *Multiplier, inverse, diviser par une fraction*

**Ex. 29** ★☆☆ **Automatismes : multiplier des fractions**

(a) Pas de dénominateur commun pour multiplier : $\frac{3\times2}{7\times7}=\frac{6}{49}$
(et non $\frac{6}{7}$).

(b) Un facteur négatif : le produit est négatif. $-\frac{5\times9}{6\times10}=-\frac{5\times3\times3}{2\times3\times2\times5}=-\frac{3}{4}$.

(c) Deux facteurs négatifs : le produit est positif. $\frac{14\times3}{9\times8}=\frac{2\times7\times3}{3\times3\times2\times4}=\frac{7}{12}$.

(d) L'entier ne multiplie que le numérateur : $\frac{4\times5}{12}=\frac{4\times5}{4\times3}=\frac{5}{3}$.

(e) Un facteur négatif : le produit est négatif. $-\frac{6\times15}{25\times4}=-\frac{2\times3\times3\times5}{5\times5\times2\times2}=-\frac{9}{10}$.

(f) $\frac{8}{-21}=-\frac{8}{21}$, donc le produit est négatif : $-\frac{8\times7}{21\times12}=-\frac{4\times2\times7}{3\times7\times4\times3}=-\frac{2}{9}$.

(g) Une fraction d'une fraction est un produit : $\frac{3}{5}\times\frac{10}{9}=\frac{3\times2\times5}{5\times3\times3}=\frac{2}{3}$.

(h) Deux facteurs négatifs : le produit est positif. $\frac{3\times2\times11}{11\times6}=\frac{3\times2\times11}{11\times2\times3}=1$.

**Ex. 30** ★☆☆ **Automatismes : inverse ou opposé ?**

(a) Inverses : $\frac{4}{9}$ ; $-\frac{11}{2}$ ; $-\frac{1}{8}$ ; $0{,}6 = \frac{3}{5}$ donc $\frac{5}{3}$. Opposés : $-\frac{9}{4}$ ; $\frac{2}{11}$ ; $8$ ; $-\frac{3}{5}$. L'inverse garde le signe, l'opposé le change.

(b) Non. $-\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = -1$ et non 1. L'inverse d'un nombre négatif est négatif : c'est $-\frac{7}{3}$.

(c) 0 n'a pas d'inverse : 0 multiplié par n'importe quel nombre donne 0, jamais 1.

(d) $0{,}8 = \frac{4}{5}$. Deux facteurs négatifs, donc $\frac{5\times4}{4\times5} = 1$. Le produit vaut 1 : $-\frac{5}{4}$ et $-0{,}8$ sont inverses l'un de l'autre.

**Ex. 31** ★★☆ **Quotients sous toutes les formes**

(a) Signes contraires : le quotient est négatif. $-\frac{14}{15} \times \frac{20}{21} = -\frac{2\times7\times4\times5}{3\times5\times3\times7} = -\frac{8}{9}$. Le quotient vaut $-\frac{8}{9}$.

(b) Diviser par 18, c'est multiplier par $\frac{1}{18}$ : $-\frac{12}{7\times18} = -\frac{2\times6}{7\times3\times6} = -\frac{2}{21}$. Le quotient vaut $-\frac{2}{21}$.

(c) La grande barre veut dire $\frac{-20}{27} \div \frac{-8}{45}$. Même signe : le quotient est positif. $\frac{20}{27} \times \frac{45}{8} = \frac{4\times5\times5\times9}{3\times9\times2\times4} = \frac{25}{6}$. Le quotient vaut $\frac{25}{6}$.

(d) $-0{,}75 = -\frac{3}{4}$. Signes contraires : $-\frac{3}{4} \times \frac{16}{9} = -\frac{3\times4\times4}{4\times3\times3} = -\frac{4}{3}$. Le quotient vaut $-\frac{4}{3}$.

(e) $\frac{2}{9}$ est plus petit que 1, donc le quotient est plus grand que $\frac{7}{3}$. Vérification : $\frac{7}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{7\times3\times3}{3\times2} = \frac{21}{2}$, et $\frac{21}{2} > \frac{7}{3}$. Le quotient est donc plus grand.

**Ex. 32** ★★☆ **Erreurs, fraction manquante et ruban**

(a) Noé a retourné la première fraction. Il fallait retourner seulement le diviseur : $\frac{6}{35} \times \frac{14}{9} = \frac{2\times3\times2\times7}{5\times7\times3\times3} = \frac{4}{15}$. Le bon quotient est $\frac{4}{15}$.

(b) Inès a simplifié le numérateur 4 avec l'autre numérateur 6. On simplifie un numérateur seulement avec un dénominateur : $\frac{4\times6}{9\times7} = \frac{4\times2\times3}{3\times3\times7} = \frac{8}{21}$. Le bon résultat est $\frac{8}{21}$.

(c) La fraction cherchée vaut $\frac{10}{21} \div \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{10}{21} \times \frac{6}{5} = -\frac{2\times5\times2\times3}{3\times7\times5} = -\frac{4}{7}$. Contrôle : $-\frac{4}{7} \times \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$. La fraction manquante est $-\frac{4}{7}$.

(d) Les $\frac{2}{7}$ de la longueur valent $\frac{4}{5}$ m, donc la longueur est $\frac{4}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{2\times2\times7}{5\times2} = \frac{14}{5}$. Contrôle : $\frac{2}{7} \times \frac{14}{5} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$. Le ruban mesure $\frac{14}{5}$ m.

**Ex. 33** ★★★ **Les gourdes de Lina**

(a) On cherche combien de fois $\frac{3}{8}$ est contenu dans $\frac{15}{4}$. $\frac{15}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{15}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{3\times5\times2\times4}{4\times3} = 10$. Lina remplit 10 gourdes. Contrôle : $10 \times \frac{3}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$.

**Ex. 33** (suite)

(b) Il a tort : il a retourné la première fraction alors qu'on ne retourne que le diviseur $\frac{3}{8}$. Son calcul donne $\frac{4\times3}{15\times8} = \frac{1}{10}$, ce qui est absurde pour un nombre de gourdes. Le bon calcul est $\frac{15}{4} \times \frac{8}{3} = 10$.

(c) Prendre les $\frac{5}{9}$ de $\frac{15}{4}$, c'est multiplier : $\frac{5}{9} \times \frac{15}{4} = \frac{5\times3\times5}{3\times3\times4} = \frac{25}{12}$. Le bidon contient $\frac{25}{12}$ L.

(d) $\frac{25}{12} \div \frac{3}{8} = \frac{25}{12} \times \frac{8}{3} = \frac{25\times2\times4}{3\times4\times3} = \frac{50}{9}$. Comme $5 < \frac{50}{9} < 6$, Lina remplit 5 gourdes pleines. Elles contiennent $5 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$ L (l'entier ne multiplie que le numérateur). Il reste $\frac{25}{12} - \frac{15}{8} = \frac{50}{24} - \frac{45}{24} = \frac{5}{24}$ L dans le bidon.

**Ex. 34** ★★★ **Vrai ou faux : inverses et quotients**

(a) Vrai. $\frac{5}{-12} = -\frac{5}{12}$. Son opposé est $\frac{5}{12}$, dont l'inverse est $\frac{12}{5}$. Son inverse est $-\frac{12}{5}$ (l'inverse d'un nombre négatif reste négatif), dont l'opposé est $\frac{12}{5}$. Les deux nombres valent $\frac{12}{5}$.

(b) Vrai. Diviser par $\frac{2}{3}$, c'est multiplier par $\frac{3}{2}$ ; diviser par $\frac{3}{2}$, c'est multiplier par $\frac{2}{3}$. Or $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ : le nombre est multiplié par 1. Exemple : $5 \div \frac{2}{3} = \frac{15}{2}$ et $\frac{15}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{2}{3} = 5$.

(c) Faux. Division et multiplication ont la même priorité : on calcule de gauche à droite. $-\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \times 2 = -\frac{3}{2}$, puis $-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{3\times2}{2\times3\times3} = \frac{1}{3}$. On trouve $\frac{27}{4}$ seulement si on calcule d'abord $\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{9}\right)$, ce qui ne respecte pas l'ordre.

(d) Faux. $\frac{-2}{3}$, $\frac{9}{-4}$ et $-\frac{10}{3}$ sont tous les trois négatifs : avec trois facteurs négatifs, le produit est négatif. $-\frac{2\times9\times10}{3\times4\times3} = -\frac{2\times3\times3\times2\times5}{3\times2\times2\times3} = -5$.

(e) Faux. $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ est positif, mais on le divise par un nombre négatif : le quotient est négatif. $\frac{9}{16} \times \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{9\times2}{2\times8\times9} = -\frac{1}{8}$.

**Ex. 35** ★★★ **Le terrain de Figeac**

(a) $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{2\times3\times3}{3\times2\times2} = \frac{3}{2}$ : on simplifie chaque numérateur avec un dénominateur avant de multiplier. Les jardins ont une aire de $\frac{3}{2}$ ha.

(b) $\frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{6}{4} = \frac{3}{4}$. Le parking a une aire de $\frac{3}{4}$ ha.

(c) Diviser par 16, c'est multiplier par $\frac{1}{16}$ : $\frac{3}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{32}$. Chaque parcelle a une aire de $\frac{3}{32}$ ha.

(d) $\frac{5}{8} \times 16 = \frac{5\times8\times2}{8} = 10$ parcelles. Leur aire est $10 \times \frac{3}{32} = \frac{2\times5\times3}{2\times16} = \frac{15}{16}$ ha. Contrôle : $\frac{5}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{16}$. Les écoles reçoivent 10 parcelles, soit $\frac{15}{16}$ ha.

**Ex. 35** **(suite)**

(e) On divise l'aire des jardins par celle du parking : $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{3\times2\times2}{2\times3} = 2$. Il faut multiplier par 2 : les jardins sont deux fois plus grands que le parking.

## 6. *Priorités, calculs enchaînés et carré d'une fraction*

**Ex. 36** ★☆☆ **Automatismes : les priorités en ligne**

(a) Le produit d'abord : $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$. Puis $\frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{7}{5}$ (et pas $\frac{9}{5}$).

(b) Les parenthèses d'abord : $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Puis $\frac{3}{5} \times 3 = \frac{9}{5}$.

(c) De gauche à droite : $\frac{5}{6} \div 5 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$. Puis $\frac{1}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(d) Le quotient d'abord : $\frac{4}{7} \div 2 = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$. Puis $\frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$.

(e) Le produit d'abord, en simplifiant avant : $\frac{9}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3\times3\times2}{2\times2\times3} = \frac{3}{2}$. Puis $2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

(f) Le produit d'abord : $\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{5\times2\times2}{2\times3\times5} = \frac{2}{3}$. Puis $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

**Ex. 37** ★☆☆ **Automatismes : carrés, cubes et puissance 0**

(a) $\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$ : on élève au carré le numérateur ET le dénominateur.

(b) $\left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}$ : le produit de deux négatifs est positif.

(c) Le carré porte seulement sur $\frac{4}{5}$ : $-\left(\frac{4}{5} \times \frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{25}$.

(d) $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$ : trois facteurs négatifs, le résultat est négatif.

(e) $\frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = \frac{27}{8}$.

(f) Un nombre non nul à la puissance 0 vaut 1 : $\left(-\frac{5}{9}\right)^0 = 1$.

(g) La puissance d'abord : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Puis $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

**Ex. 38** ★★☆ **Repère l'erreur et corrige**

(a) Inès a additionné avant de multiplier. Le produit passe d'abord : $\frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{3\times2}{2\times2\times3\times3} = \frac{1}{6}$. Puis $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$. Le bon résultat est $\frac{5}{12}$.

(b) Hugo a commencé par la division de droite. Une suite de divisions se fait de gauche à droite : $\frac{8}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$, puis $\frac{4}{3} \div 2 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. Le bon résultat est $\frac{2}{3}$.

(c) Lina a multiplié par 2 au lieu de multiplier la fraction par elle-même. $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. Le bon résultat est $\frac{4}{25}$.

**Ex. 38** **(suite)**

(d) Malo a oublié le signe. Le produit de trois facteurs négatifs est négatif : $\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64}$. Le bon résultat est $-\frac{27}{64}$.

**Ex. 39** ★★☆ **Calculs enchaînés pas à pas**

(a) Parenthèses : $\frac{3}{12} - \frac{8}{12} = -\frac{5}{12}$. Produit, en simplifiant avant : $-\frac{5\times6}{12\times5} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$.
Donc $A = -\frac{1}{2}$.

(b) Numérateur : $\frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$. Dénominateur : $\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$. Puis on divise : $-\frac{3}{2} \div \frac{7}{4} = -\frac{3}{2} \times \frac{4}{7} = -\frac{3\times2\times2}{2\times7} = -\frac{6}{7}$.
Donc $B = -\frac{6}{7}$.

(c) Le quotient d'abord : $\frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$. Puis $\frac{5}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.
Donc $C = \frac{3}{2}$.

(d) Parenthèses : $\frac{1}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{2}{3}$. Carré : $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ (positif). Produit : $\frac{4}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{4\times9}{9\times2\times4} = \frac{1}{2}$.
Donc $D = \frac{1}{2}$.

**Ex. 40** ★★★ **Le grand défi des priorités**

(a) On convertit : $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ et $\frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}$. Les divisions passent avant l'addition, et on les fait de gauche à droite : $\frac{7}{10} \div \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{10} \times \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{7\times5}{2\times5\times7} = -\frac{1}{2}$, puis $-\frac{1}{2} \div 2 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$. Enfin $\frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20}$.
Donc $A = \frac{7}{20}$. Diviser d'abord $\frac{7}{-5}$ par 2 donnerait un résultat faux $\left(-\frac{2}{5}\right)$.

(b) La grande barre joue le rôle de parenthèses.
Numérateur : $\frac{3}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{5}{4}$. Dénominateur : le produit d'abord, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (on simplifie par 3), puis $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$. Enfin $B = -\frac{5}{4} \div \frac{5}{6} = -\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$.
Donc $B = -\frac{3}{2}$.

(c) Les parenthèses d'abord : $\frac{2}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$, donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (un carré est positif). Puis la puissance avant le produit : $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$, et $\frac{4}{25} \times \frac{15}{8} = \frac{2\times2\times3\times5}{5\times5\times2\times2\times2} = \frac{3}{10}$. Enfin $C = \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{5}{20} - \frac{6}{20} = -\frac{1}{20}$.
Donc $C = -\frac{1}{20}$.

(d) $-\left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{16}{9}$ (le signe $-$ n'est pas élevé au carré) ; $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$ (trois facteurs négatifs, donc négatif) ; $\left(\frac{7}{5}\right)^0 = 1$.
Donc $D = -\frac{16}{9} + \left(-\frac{1}{27}\right) \times 1 = -\frac{48}{27} - \frac{1}{27} = -\frac{49}{27}$.

**Ex. 41** ★★★ **Le terrain partagé d'Annecy**

(a) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5\times5}{6\times6} = \frac{25}{36}$ (et pas $\frac{10}{12}$ : on multiplie, on ne double pas). L'aire du terrain est $\frac{25}{36}$ hm².

(b) Il reste après le potager : $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Aire de jeux : $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$. L'aire de jeux occupe $\frac{9}{20}$ du terrain.

(c) Pelouse : $1 - \frac{2}{5} - \frac{9}{20} = \frac{20}{20} - \frac{8}{20} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$. La pelouse occupe $\frac{3}{20}$ du terrain.

(d) $\frac{3}{20} \times \frac{25}{36} = \frac{3\times5\times5}{4\times5\times3\times12} = \frac{5}{48}$ (on simplifie par 3 et par 5 avant de multiplier). La pelouse mesure $\frac{5}{48}$ hm².

(e) De gauche à droite : $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, puis $\frac{12}{20} - \frac{15}{20} = -\frac{3}{20}$, puis $-\frac{3}{20} \times \frac{3}{5} = -\frac{9}{100}$. Timéo trouve $-\frac{9}{100}$ : c'est absurde, car une part de terrain ne peut pas être négative. Il fallait calculer le produit en premier.

**Ex. 42** ★★★ **Une expression, plusieurs parenthèses**

(a) Le produit d'abord : $\frac{3}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{3\times2\times2}{2\times3\times3} = \frac{2}{3}$. Puis $E = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.
Donc $E = \frac{5}{6}$.

(b) Zoé fait $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$, puis $2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$, puis $\frac{8}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$. Elle a en fait calculé $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \times \frac{4}{9} - \frac{1}{3}$ : son résultat $\frac{5}{9}$ n'est pas égal à $E$.

(c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) : \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$ ; $\frac{3}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$ ; $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Les parenthèses vont donc autour de $\frac{4}{9} - \frac{1}{3}$.

(d) On cherche le facteur manquant dans $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \ldots - \frac{1}{3} = 0$. Or $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$, donc le produit doit valoir $-\frac{1}{6}$. Le facteur manquant est $-\frac{1}{6} \div \frac{3}{2} = -\frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = -\frac{2}{2\times3\times3} = -\frac{1}{9}$. Vérification : $\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{6}$ et $\frac{3}{6} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = 0$. Il faut remplacer $\frac{4}{9}$ par $-\frac{1}{9}$.

(e) Faux. $(-E)^2 = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$ est positif ; $-E^2 = -\left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{25}{36}$ est négatif. Ces deux nombres sont opposés, pas égaux.

## 7. *Problèmes avec des fractions*

**Ex. 43** ★☆☆ **Prendre une fraction d'une quantité**

(a) $\frac{3}{7} \times 84 = 3 \times 12 = 36$ kg.

(b) $\frac{5}{6} \times \frac{9}{10} = \frac{5\times3\times3}{2\times3\times2\times5} = \frac{3}{4}$.

(c) 1 h = 60 min, donc $\frac{3}{4} \times 60 = 3 \times 15 = 45$ min.

(d) $0{,}8 = \frac{4}{5}$, donc $\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$.

(e) $4{,}5 = \frac{9}{2}$, donc $\frac{4}{9} \times \frac{9}{2} = \frac{4\times9}{9\times2} = \frac{4}{2} = 2$ km, soit 2 000 m.

(f) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{3\times5}{5\times2\times3} = \frac{1}{2}$ L, soit 50 cL de lait.

(g) $\frac{2}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{2\times3}{3\times3\times2\times5} = \frac{1}{15}$ des élèves du collège.

**Ex. 44** ★★☆ **Calculer la part restante**

(a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$, donc il reste $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ de son argent.

(b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$, donc $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ de l'affiche est blanche.

(c) $0{,}25 = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ ; $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$, donc les messages représentent $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ de son temps d'écran.

(d) Lou a additionné les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux : c'est faux. Avec le dénominateur commun 12 : $\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, donc il reste $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ de la pizza.

(e) $\frac{15}{30} + \frac{10}{30} + \frac{6}{30} = \frac{31}{30}$, ce qui est plus grand que 1. C'est impossible : la somme des parts doit valoir exactement 1.

(f) Dénominateur commun 45 : $1 - \frac{21}{45} - \frac{10}{45} = \frac{14}{45}$. La deuxième part vaut $\frac{14}{45}$ de la somme.

**Ex. 45** ★★☆ **Retrouver le total à partir d'une part**

(a) Tom a pris les $\frac{3}{8}$ de 72, mais 72 est déjà une part. Il faut diviser : $72 \div \frac{3}{8} = 72 \times \frac{8}{3} = 24 \times 8 = 192$. Le roman compte 192 pages.

(b) Contenance : $18 \div \frac{2}{7} = 18 \times \frac{7}{2} = 9 \times 7 = 63$ L. Il faut ajouter $63 - 18 = 45$ L d'eau.

(c) Les 49 € sont le reste : $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ des économies. Économies : $49 \div \frac{7}{12} = 49 \times \frac{12}{7} = 7 \times 12 = 84$ €. Lina avait 84 € d'économies.

(d) Durée totale : $40 \div \frac{4}{7} = 40 \times \frac{7}{4} = 10 \times 7 = 70$ min. Le trajet dure 1 h 10 min.

**Ex. 46** ★★☆ **Du reste ou du total ?**

(a) $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Il reste $\frac{3}{5}$ du verger.

(b) Non : les poiriers occupent les $\frac{3}{4}$ du reste, pas du verger. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$. Les poiriers occupent $\frac{9}{20}$ du verger.

(c) $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ et $\frac{8}{20} < \frac{9}{20}$. Non : ce sont les poiriers qui occupent la plus grande partie.

(d) Pelouse : $1 - \frac{8}{20} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$, et $\frac{3}{20} \times 800 = 3 \times 40 = 120$ m². Vérification : $\frac{8}{20} + \frac{9}{20} + \frac{3}{20} = \frac{20}{20} = 1$. La pelouse mesure 120 m².

**Ex. 47** ★★★ **Le réservoir de Nadia**

(a) On prend les $\frac{3}{8}$ des $\frac{5}{6}$ du réservoir : $\frac{3}{8} \times \frac{5}{6} = \frac{3\times5}{8\times2\times3} = \frac{5}{16}$ (on supprime le facteur 3 avant de multiplier). Nadia a consommé les $\frac{5}{16}$ du réservoir plein.

**Ex. 47** **(suite)**

(b) Non. Les $\frac{3}{8}$ portent sur le carburant du départ, pas sur le réservoir plein. Au départ : $\frac{5}{6} \times 48 = 48 \div 6 \times 5 = 40$ L. Consommé : $\frac{3}{8} \times 40 = 40 \div 8 \times 3 = 15$ L (ou $\frac{5}{16} \times 48 = 15$ L). Nadia a consommé 15 L, pas 18 L.

(c) $\frac{5}{6} - \frac{5}{16} = \frac{40}{48} - \frac{15}{48} = \frac{25}{48}$. À l'arrivée, il reste les $\frac{25}{48}$ du réservoir plein.

(d) $\frac{25}{48} \times 48 = 25$ L (vérification : $40 - 15 = 25$ L). Pour le plein : $48 - 25 = 23$ L. Il reste 25 L, et Nadia doit ajouter 23 L pour refaire le plein.

**Ex. 48** ★★★ **Deux terrains près d'Angers**

(a) Dénominateur commun 24 : $\frac{3}{8} + \frac{1}{3} + \frac{7}{24} = \frac{9}{24} + \frac{8}{24} + \frac{7}{24} = \frac{24}{24} = 1$. La somme des parts vaut 1 : les trois parts couvrent tout le terrain d'Élodie.

(b) Dénominateur commun 36 : $\frac{5}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{20}{36} + \frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{35}{36}$. Allée : $1 - \frac{35}{36} = \frac{1}{36}$. Aire : $\frac{1}{36} \times 720 = 20$ m². L'allée occupe $\frac{1}{36}$ du terrain de Karim, soit 20 m².

(c) On a bien $\frac{5}{9} = \frac{40}{72} > \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$, mais les terrains n'ont pas la même taille. Élodie : $\frac{3}{8} \times 1\,200 = 1\,200 \div 8 \times 3 = 450$ m². Karim : $\frac{5}{9} \times 720 = 720 \div 9 \times 5 = 400$ m². Karim a tort : il a 400 m² de tournesols, Élodie en a 450 m².

(d) Il faut 450 m² sur 720 m² : $\frac{450}{720}$. Avec $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ et $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$, on obtient $\frac{450}{720} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$. Vérification : $\frac{5}{8} \times 720 = 450$. Karim devrait planter les $\frac{5}{8}$ de son terrain en tournesols.

**Ex. 49** ★★★ **La randonnée de Yanis**

(a) Après le premier jour, il reste $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ du trajet. Deuxième jour : $\frac{3}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{5 \times 7} = \frac{3}{7}$ (on supprime le facteur 5). Yanis parcourt les $\frac{3}{7}$ du trajet le deuxième jour.

(b) Erreur 1 : les $\frac{3}{5}$ portent sur le reste, pas sur le total : il faut ajouter $\frac{3}{7}$. Erreur 2 : on n'additionne pas les dénominateurs, on prend un dénominateur commun. Correction : $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$. Les deux premiers jours, Yanis parcourt les $\frac{5}{7}$ du trajet.

(c) $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$. Il reste les $\frac{2}{7}$ du trajet pour le troisième jour.

(d) Les $\frac{2}{7}$ du trajet valent 12 km, donc le trajet vaut $12 \div \frac{2}{7} = 12 \times \frac{7}{2} = 42$ km. Le trajet total mesure 42 km.

(e) Jour 1 : $\frac{2}{7} \times 42 = 12$ km. Jour 2 : $\frac{3}{7} \times 42 = 18$ km. Jour 3 : 12 km. Somme : $12 + 18 + 12 = 42$ km. On retrouve bien le trajet total de 42 km.