49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 4e : calculer avec des fractions relatives*

À retenir : Pour additionner : même dénominateur, le plus petit possible ($\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$). On n'ajoute jamais les dénominateurs. Pour multiplier : on simplifie avant, en croisant. Diviser par $\frac{c}{d}$, c'est multiplier par $\frac{d}{c}$. 0 n'a pas d'inverse.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : additionner, soustraire, gérer les signes** — Calcule et donne le résultat sous forme de fraction irréductible.

(a) $\frac{3}{10}+\frac{7}{15}$ (b) $-\frac{5}{12}-\left(-\frac{7}{12}\right)$ (c) $3-\frac{11}{4}$

(d) $\frac{-15}{-35}$ (e) $\frac{5}{8}-\frac{11}{12}$ (f) $\frac{-7}{9}+\frac{4}{-9}$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : multiplier, inverser, diviser** — Calcule ou réponds. Donne chaque résultat sous forme de fraction irréductible.

(a) $\frac{14}{15}\times\frac{25}{8}$

(b) $\left(-\frac{9}{16}\right)\times\frac{20}{27}$

(c) Donne l'inverse puis l'opposé de $-\frac{7}{5}$.

(d) Le nombre 0 a-t-il un inverse ? Justifie.

(e) $8\div\frac{12}{5}$

(f) $\left(-\frac{6}{7}\right)\div 3$

(g) $\left(-\frac{3}{11}\right)\div\left(-\frac{9}{22}\right)$

Ex. 3 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Chaque élève s'est trompé. Explique son erreur, puis donne le bon résultat sous forme de fraction irréductible.

(a) Léna écrit : $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{5}{9}$.

(b) Malik écrit : $\frac{10}{21}\div\frac{15}{14}=\frac{21}{10}\times\frac{15}{14}$.

(c) Inès affirme : « L'inverse de $-\frac{4}{9}$ est $\frac{9}{4}$. »

(d) Hugo écrit : $\frac{6}{35}\times\frac{14}{9}=\frac{3}{35}\times\frac{7}{9}=\frac{1}{15}$.

Ex. 4 ★★☆ **Comparer, ranger, retrouver le nombre manquant** — Justifie chaque réponse par un calcul. Donne les nombres trouvés sous forme de fraction irréductible.

(a) Compare $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{7}{10}$.

(b) Range dans l'ordre croissant : $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{-2}$; $\frac{-5}{-6}$; $-\frac{7}{12}$.

Ex. 4 (suite)

(c) Trouve le nombre manquant : $\frac{5}{12}+\ldots=-\frac{3}{8}$.

(d) Trouve le nombre manquant : $\ldots\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{15}{28}$.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux type brevet** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie ta réponse par un calcul ou un contre-exemple. Donne les résultats sous forme de fraction irréductible.

(a) Affirmation 1 : « Pour calculer $\frac{8}{15}\times\frac{9}{4}$, il faut d'abord mettre les deux fractions au même dénominateur. »

(b) Affirmation 2 : « Les nombres $\frac{-12}{-18}$ et $-\frac{2}{3}$ sont égaux. »

(c) Affirmation 3 : « $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}=\frac{12}{30}$. »

(d) Affirmation 4 : « Diviser un nombre positif non nul par $\frac{2}{7}$ donne toujours un résultat plus grand que ce nombre. »

(e) Affirmation 5 : « $-\frac{9}{11}<-\frac{5}{6}$. »

Ex. 6 ★★★ **Une randonnée en trois jours** — Lou fait une randonnée en trois jours. Le premier jour, Lou parcourt $\frac{2}{5}$ du parcours. Le deuxième jour, Lou parcourt $\frac{5}{9}$ du reste. Le troisième jour, il reste 12 km à parcourir. Donne les fractions sous forme irréductible.

(a) Quelle fraction du parcours total représente l'étape du deuxième jour ?

(b) Quelle fraction du parcours total représente l'étape du troisième jour ?

(c) Calcule la longueur totale du parcours, en km.

(d) L'étape du deuxième jour est coupée en 3 tronçons de même longueur. Quelle fraction du parcours représente un tronçon ? Donne sa longueur en km.

(e) Affirmation : « Le premier jour, Lou a marché plus que les deux autres jours réunis. » Est-ce vrai ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Enchaîner signes, inverses et quotients** — On considère les nombres $A=-\frac{3}{4}-\left(-\frac{11}{28}\right)$ et $B=\frac{-12}{35}\div\frac{-18}{25}$. Écris les étapes une par ligne et donne chaque résultat sous forme de fraction irréductible.

(a) Calcule A.

(b) Calcule B en simplifiant avant d'effectuer les produits.

(c) Donne l'inverse de A, puis l'opposé de A.

(d) Calcule $C=A\div B$.

(e) Affirmation : « Le nombre $C+0{,}75$ a un inverse. » Est-ce vrai ? Justifie.

2. Enchaîner les calculs : priorités

À retenir : Ordre : parenthèses, puissances, puis $\times$ et $\div$ de gauche à droite, enfin $+$ et $-$ au même dénominateur. Une grande barre de fraction joue le rôle de parenthèses. Attention : $-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : qui passe en premier ?** — Calcule en respectant les priorités. Donne le résultat sous forme de fraction irréductible ou d'entier.

(a) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} \times \frac{2}{5}$ (b) $\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right) \times \frac{2}{5}$ (c) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$

(d) $-\frac{1}{3} + \frac{7}{6} \div \left(-\frac{7}{4}\right)$ (e) $0{,}5 - \frac{3}{10} \times \frac{5}{9}$ (f) $\frac{5}{12} - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)$

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : carrés et grandes barres** — Calcule. Donne le résultat sous forme de fraction irréductible ou d'entier.

(a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ (b) $-\left(\frac{2}{5}\right)^2$ (c) $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

(d) $1 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (e) $\frac{1 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{8}}$ (f) $\frac{\frac{2}{3} - 2}{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}}$

Ex. 10 ★★☆ **Le calcul de Maëlys** — Pour calculer $B = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{9}{4}$, Maëlys écrit : $B = \frac{6}{6} \times \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$.

(a) Quelle règle de priorité n'est pas respectée dans ce calcul ? Explique.

(b) Calcule B correctement. Donne le résultat sous forme de fraction irréductible.

(c) Où faut-il placer des parenthèses dans l'écriture de B pour que le résultat $\frac{9}{4}$ soit juste ?

(d) Calcule $C = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \div \frac{9}{4}$ sous forme de fraction irréductible.

Ex. 11 ★★☆ **Un calcul de brevet, étape par étape** — On donne $A = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right) \div \frac{8}{9} - \frac{1}{2}$. Écris une étape par ligne.

(a) Calcule $\frac{3}{2} - \frac{1}{6}$ et donne le résultat sous forme de fraction irréductible.

(b) Calcule A et donne le résultat sous la forme la plus simple.

(c) On enlève les parenthèses : $E = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \div \frac{8}{9} - \frac{1}{2}$. Calcule E sous forme de fraction irréductible.

(d) Calcule $F = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{6}}{\frac{8}{9} - \frac{1}{2}}$ sous forme de fraction irréductible.

Ex. 12 ★★★ **Vrai ou faux : quatre affirmations sur les priorités** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par un calcul écrit une étape par ligne.

(a) Affirmation 1 : $-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2$.

(b) Affirmation 2 : $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{5}$.

(c) Affirmation 3 : $0{,}5 - \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{12}\right) = \frac{5}{6}$.

Ex. 12 (suite)

(d) Affirmation 4 : $\frac{\frac{5}{2} - 1}{\frac{5}{3} + 1} = \frac{1}{4}$.

Ex. 13 ★★★ **Brevet : un entier et une fraction de fraction** — On donne $A = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3}\right) \div \frac{11}{18} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ et $B = \frac{1 - \frac{5}{8}}{\frac{3}{4} + 1{,}5}$. Écris une étape par ligne et donne les résultats sous forme de fraction irréductible ou d'entier.

(a) Calcule $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$. Explique pourquoi le résultat n'est pas égal à $\left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2$.

(b) Montre que A est un nombre entier.

(c) Calcule B en calculant d'abord son numérateur, puis son dénominateur.

(d) Calcule $A - B$.

Ex. 14 ★★★ **L'erreur de Noé, puis le calcul à rebours** — On donne $C = \frac{9}{10} - \frac{3}{5} \div \frac{4}{3} \times 2$. Noé calcule d'abord $\frac{4}{3} \times 2$ et trouve $C = \frac{27}{40}$.

(a) Explique l'erreur de Noé en citant la règle de priorité qu'il n'a pas respectée.

(b) Calcule C correctement, en écrivant une étape par ligne.

(c) Calcule $D = \frac{9}{10} - \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{3}\right)$ et donne le résultat sous forme de fraction irréductible.

(d) Par quel nombre faut-il remplacer le 2 dans C pour obtenir $\frac{9}{20}$? Justifie.

3. Rendre une fraction irréductible

À retenir : Je décompose en haut et en bas, puis je barre chaque facteur premier présent des DEUX côtés, autant de fois qu'il y est des deux côtés : $\frac{2^3 \times 7}{2 \times 3 \times 7} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$. 1 n'est pas premier. On ne simplifie jamais une somme.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : décomposer en facteurs premiers** — Décompose chaque nombre en produit de facteurs premiers. Si le nombre est premier, justifie-le. Vérifie en effectuant le produit.

(a) 168 (b) 119 (c) 89

(d) 153 (e) 221 (f) 390

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : rendre irréductible** — Rends chaque fraction irréductible en décomposant le numérateur et le dénominateur. Si elle l'est déjà, justifie-le.

(a) $\frac{54}{72}$

(b) $\frac{49}{120}$

(c) $-\frac{84}{126}$

(d) $\frac{2^4 \times 3 \times 7}{2^2 \times 3^2 \times 5}$

(e) $\frac{51}{85}$

Ex. 16 **(suite)**

(f) $\dfrac{165}{-231}$

Ex. 17 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Pour chaque affirmation d'élève, dis si elle est correcte. Justifie, puis corrige si besoin.

(a) Léna écrit $\dfrac{-52}{-76} = -\dfrac{13}{19}$.

(b) Malik écrit $\dfrac{3+4}{3+8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

(c) Inès écrit $\dfrac{2^3\times 3\times 7}{2\times 3^2\times 11} = \dfrac{7}{11}$ en barrant tous les 2 et tous les 3.

(d) Noé affirme : « $\dfrac{45}{77}$ n'est pas irréductible, car $45 = 1\times 3^2\times 5$ et $77 = 1\times 7\times 11$ ont le facteur premier 1 en commun. »

(e) Sacha affirme : « $\dfrac{357}{510}$ est irréductible, car 357 est impair. »

Ex. 18 ★★☆ **Grands nombres et décompositions** — Ben a choisi trois grands nombres : 1 050, 1 260 et 1 188. Utilise les critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9.

Nombre	1 050	1 260	1 188
Décomposition	…	…	…

(a) Complète le tableau avec la décomposition en produit de facteurs premiers de chaque nombre.

(b) Rends $\dfrac{1\,050}{1\,260}$ irréductible en une seule étape.

(c) Rends $\dfrac{1\,188}{1\,260}$ irréductible en une seule étape.

(d) Calcule $\dfrac{1\,050}{1\,188} \times 0{,}66$. Donne le résultat sous forme de fraction irréductible.

Ex. 19 ★★★ **Vrai ou faux type brevet** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par un calcul, une décomposition ou un contre-exemple.

(a) « $0{,}375 = \dfrac{375}{1\,000}$, et cette fraction est irréductible. »

(b) « Entre 90 et 100, il n'y a qu'un seul nombre premier. »

(c) « $-\dfrac{285}{418}$ est irréductible. »

(d) « $\dfrac{143}{210}$ est irréductible. »

(e) « $\dfrac{132}{297}$ et $\dfrac{4}{9}$ sont deux écritures du même nombre. »

Ex. 20 ★★★ **Simplifier jusqu'au bout** — Yanis simplifie $\dfrac{720}{756}$ petit à petit : $\dfrac{720}{756} = \dfrac{360}{378} = \dfrac{180}{189}$. Il affirme : « $\dfrac{180}{189}$ est irréductible, car 180 est pair et 189 est impair. » Donne chaque résultat sous forme de fraction irréductible.

(a) Yanis a-t-il raison ? Justifie avec le critère de divisibilité par 9.

(b) Décompose 720 et 756 en produits de facteurs premiers.

(c) Déduis-en, en une seule étape, la forme irréductible de $\dfrac{720}{756}$.

(d) Théo cherche une fraction égale à $\dfrac{720}{756}$ dont le dénominateur est 105. Trouve son numérateur.

Ex. 20 **(suite)**

(e) Calcule $\dfrac{720}{756} \div \left(-\dfrac{50}{63}\right)$ en simplifiant avant de multiplier.

Ex. 21 ★★★ **Problème de brevet : la billetterie d'un festival** — Un festival a vendu 1 755 billets, dont 1 053 en prévente. Les autres ont été vendus sur place. Parmi les billets vendus sur place, $\dfrac{2}{9}$ sont à tarif réduit. Donne chaque fraction sous forme irréductible.

(a) Justifie avec un critère de divisibilité que 1 053 et 1 755 sont divisibles par 9.

(b) Kenza écrit $1\,755 = 3^3 \times 65$. Est-ce une décomposition en produit de facteurs premiers ? Justifie, puis décompose 1 053 et 1 755.

(c) Quelle fraction des billets a été vendue en prévente ?

(d) Quelle fraction du total des billets correspond aux billets à tarif réduit vendus sur place ? Vérifie avec le nombre de billets.

(e) Léo affirme : « Les billets vendus sur place à plein tarif représentent $1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$ du total. » Trouve son erreur et corrige-le.

4. *Fractions et puissances*

À retenir : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$: un inverse, pas un opposé ($7^{-2} = \dfrac{1}{49}$) ; $a^0 = 1$. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$. Base négative : exposant pair → positif. $2^2 + 3^3 \neq 3^5$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : exposants négatifs et exposant 0** — Calcule. Donne le résultat sous forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

(a) 6^{-2}

(b) $(-2)^{-3}$

(c) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-1}$

(d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}$

(e) $\left(-\dfrac{11}{8}\right)^{0}$

(f) 10^{-5}
(donne aussi son écriture décimale)

(g) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : puissance d'une fraction et signe** — Calcule. Donne le résultat sous forme d'une fraction irréductible, sauf pour la dernière question.

(a) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{2}$

(b) $\dfrac{3^2}{7}$

(c) $\left(-\dfrac{5}{6}\right)^{2}$

Ex. 23 (suite)

(d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

(e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$

(f) $\frac{(-2)^5}{3^2}$

(g) Trouve l'entier positif n tel que $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16}$.

Ex. 24 ★★☆ **Quotients de produits de puissances** — Écris chaque nombre sous forme d'un entier ou d'une fraction irréductible. Détaille les calculs sur les exposants.

(a) $A = \frac{2^6 \times 5^2}{2^4 \times 5^3}$

(b) $B = \frac{3^4 \times 2^{-2}}{3^{-1} \times 2^3}$

(c) $C = \frac{10^{-3} \times 10^5}{10^4}$
(donne aussi son écriture décimale)

(d) $D = \frac{6^3}{2^2 \times 3^4}$
(commence par décomposer 6^3 en produit de facteurs premiers)

Ex. 25 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Pour chaque élève, dis s'il a raison. Justifie, puis corrige le résultat si besoin.

(a) Noé écrit : $3^{-2} = -9$. A-t-il raison ? Justifie.

(b) Inès écrit : $2^4 + 2^3 = 2^7$. A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Malik écrit : $\frac{5^2}{3} = \frac{25}{9}$. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Sacha écrit : $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{27}$. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 26 ★★★ **Vrai ou faux type brevet : puissances et fractions** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie : un calcul ou un contre-exemple suffit.

(a) Affirmation 1 : « Pour tout nombre a non nul, a^{-2} est un nombre négatif. »

(b) Affirmation 2 : « La moitié de 2^{10} est égale à 2^5. »

(c) Affirmation 3 : « $3^2 + 3^2 + 3^2 = 3^3$ »

(d) Affirmation 4 : « $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ est plus grand que $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$. »

(e) Affirmation 5 : « $\frac{3}{2^{-3}} = \frac{3}{8}$ »

Ex. 27 ★★★ **Enchaînements de puissances, étape par étape** — Écris chaque nombre sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible. Écris une étape par ligne et détaille les calculs sur les exposants.

(a) $A = \frac{2^{-1} + 2^{-2}}{2^{-3}}$

(b) $B = 4^2 + 4^{-1} - 4^0$

(c) $C = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times 9^2$

(d) $D = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times 10^{-3}$. Donne aussi l'écriture décimale de D.

Ex. 28 ★★★ **Problème : les rebonds d'une balle** — Au gymnase, Yanis lâche une balle d'une hauteur de 243 cm. À chaque rebond, la balle remonte aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur d'où elle vient de tomber. Les hauteurs sont en centimètres.

(a) Calcule la hauteur atteinte par la balle après le premier rebond.

(b) Explique pourquoi la hauteur après 4 rebonds est $243 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$, puis calcule-la.

(c) Pour la hauteur après 5 rebonds, Zoé calcule $243 \times \frac{2^5}{3}$. A-t-elle raison ? Justifie, puis corrige.

(d) Après combien de rebonds la hauteur devient-elle pour la première fois inférieure à 10 cm ? Justifie par des calculs.

(e) Une autre balle suit la même règle et remonte à 50 cm après son premier rebond. Calcule $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, puis la hauteur d'où elle a été lâchée.

5. *Fractions dans le calcul littéral*

À retenir : Le facteur multiplie chaque terme de la parenthèse, avec son signe. Pour réduire, mets au même dénominateur : $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6}$. Dans $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, n'oublie pas le double produit $2ab$.

Ex. 29 ★★☆ **Automatismes : développer avec une fraction** — Développe et réduis chaque expression. Écris les coefficients sous forme de fraction irréductible.

(a) $A = \frac{5}{3}\left(6x - \frac{3}{5}\right)$

(b) $B = -\frac{3}{4}(8x - 2)$

(c) $C = -\left(\frac{x}{5} - \frac{7}{3}\right)$

(d) $D = 4 - \left(\frac{1}{2} - x\right)$

(e) $E = \frac{2x}{7}(14x + 21)$

(f) $F = -\frac{5}{6}\left(\frac{3}{10}x + 12\right)$

Ex. 30 ★★☆ **Automatismes : réduire avec des fractions** — Réduis chaque expression. Écris les coefficients sous forme de fraction irréductible.

(a) $G = \frac{x}{4} + \frac{x}{3}$

(b) $H = \frac{3x}{5} - x$

(c) $K = \frac{x}{6} - \frac{3x}{4}$

(d) $L = 1{,}5x - \frac{x}{4} + \frac{2}{3}$

(e) $M = \frac{x^2}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{5}$

(f) $N = \frac{2x}{3} \times \frac{9x}{4}$

Ex. 31 ★★☆ **Double distributivité et identités remarquables** — Écris les coefficients sous forme de fraction irréductible.

(a) Lina écrit : $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{2}{4}$. Trouve ses deux erreurs, puis écris le bon développement.

Ex. 31 **(suite)**

(b) Développe $P = \left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x + \frac{2}{5}\right)$.

(c) Développe et réduis $Q = \left(\frac{x}{2} - 3\right)\left(4x + \frac{2}{3}\right)$.

(d) Développe et réduis $R = \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2$.

Ex. 32 ★★☆ **Le programme de calcul de Bastien** — Voici le programme de Bastien : « Choisis un nombre. Prends son tiers. Soustrais 1 au résultat. Multiplie ce résultat par le nombre de départ. »

(a) Applique le programme au nombre $-\frac{3}{4}$. Donne le résultat sous forme de fraction irréductible.

(b) On note x le nombre de départ. Écris le résultat du programme en fonction de x, puis développe-le.

(c) Factorise l'expression trouvée à la question précédente par $\frac{x}{3}$.

(d) Inès affirme : « Ce programme revient à prendre le carré du nombre, à lui soustraire le nombre, puis à prendre le tiers. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 33 ★★★ **Vrai ou faux : égalités avec des fractions** — Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse. Si elle est vraie, justifie par un calcul valable pour tout x. Si elle est fausse, donne un contre-exemple ou le bon résultat.

(a) Affirmation 1 : pour tout nombre x, $\frac{x^2}{16} - \frac{4}{9} = \left(\frac{x}{4} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{2}{3}\right)$.

(b) Affirmation 2 : pour tout nombre x, $\frac{3x}{4} - x = \frac{x}{4}$.

(c) Affirmation 3 : pour tout nombre x, $1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{x}{2}$.

(d) Affirmation 4 : pour $x = -\frac{3}{5}$, l'expression $-x^2 + 3x$ vaut $-\frac{54}{25}$.

Ex. 34 ★★★ **Le potager de Maëlle** — Le potager de Maëlle est un rectangle de longueur $\left(x + \frac{3}{4}\right)$ m et de largeur $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)$ m, où x est un nombre plus grand que 1. Écris les coefficients sous forme de fraction irréductible.

(a) Exprime le périmètre P du potager en fonction de x, puis développe et réduis.

(b) Développe et réduis l'aire $A = \left(x + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)$, en m².

(c) Calcule A pour $x = \frac{4}{3}$ avec la forme développée, puis contrôle en calculant d'abord la longueur et la largeur.

(d) Son voisin Hugo retire d'un carré de côté $\frac{x}{3}$ m, avec $x > 6$, une bande de $\frac{x}{3}$ m sur 2 m. Écris l'aire restante B, puis factorise-la par $\frac{x}{3}$.

Ex. 35 ★★★ **Une différence de deux carrés** — On considère l'expression $D = \left(\frac{x}{5} + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right)^2$. Écris les coefficients sous forme de fraction irréductible.

(a) Développe et réduis $\left(\frac{x}{5} + \frac{3}{2}\right)^2$.

(b) Développe et réduis $\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right)^2$.

(c) Déduis-en l'expression développée et réduite de D.

Ex. 35 **(suite)**

(d) Calcule D pour $x = -\frac{25}{12}$.

(e) Sacha affirme : « Quand x est un nombre entier, D est aussi un nombre entier. » Vrai ou faux ? Justifie.

6. *Équations avec des fractions*

À retenir : Je multiplie TOUS les termes des deux membres par le dénominateur commun, numérateurs entre parenthèses : $\frac{x-1}{3} = \frac{x}{2}$ donne $2(x-1) = 3x$. Je ne divise jamais par x. $x^2 = \frac{4}{9}$: $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : équations du premier degré avec des fractions** — Résous chaque équation. Donne la solution sous forme de fraction irréductible ou d'entier.

(a) $\frac{3x}{5} = 9$ (b) $-\frac{4}{7}x = \frac{2}{21}$ (c) $\frac{x}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$

(d) $\frac{x}{5} + 0{,}7 = \frac{x}{2}$ (e) $\frac{5}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3x}{2}$ (f) $\frac{2x-1}{3} = \frac{x}{6}$

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : produit nul et équation $x^2 = a$** — Résous chaque équation. Donne toutes les solutions sous forme de fraction irréductible ou d'entier.

(a) $(5x + 3)\left(x - \frac{7}{2}\right) = 0$ (b) $x^2 = \frac{25}{49}$

(c) $\left(\frac{x}{3} + 2\right)(4x - 1) = 0$ (d) $x^2 = -\frac{9}{4}$

Ex. 38 ★★☆ **L'erreur d'Inès** — Pour résoudre $\frac{x+2}{3} - \frac{2x-1}{4} = 1$, Inès multiplie par 12 et écrit : $4(x + 2) - 3 \times 2x - 1 = 12$, puis $4x + 8 - 6x - 1 = 12$, donc $-2x = 5$ et $x = -\frac{5}{2}$.

(a) Remplace x par $-\frac{5}{2}$ dans l'équation de départ. Inès a-t-elle trouvé la solution ? Justifie.

(b) Explique l'erreur d'Inès sur sa première ligne.

(c) Résous correctement l'équation.

(d) Vérifie ta solution en la remplaçant dans l'équation de départ.

Ex. 39 ★★☆ **Développer et réduire avant de résoudre** — Développe et réduis chaque membre, puis résous l'équation. Donne les solutions sous forme de fraction irréductible.

(a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{4}$

(b) $(2x - 3)(2x + 3) = 4x^2 - 5x$

(c) $\frac{x}{2} - (x - 4) = 3 - \frac{x}{2}$

(d) $x\left(x - \frac{5}{3}\right) = 2x$: ramène-toi à une équation produit nul.

Ex. 40 ★★★ **Vrai ou faux : les pièges des équations** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie ta réponse.

(a) Affirmation 1 : la solution de l'équation $\frac{5x}{4} = 15$ est $x = \frac{75}{4}$.

(b) Affirmation 2 : les solutions de l'équation $(10x - 4)\left(x + \frac{5}{3}\right) = 0$ sont $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{3}$.

(c) Affirmation 3 : l'équation $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{6} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$ n'a aucune solution.

(d) Affirmation 4 : pour résoudre $x^2 = \frac{7}{6}x$, on divise les deux membres par x. La seule solution est donc $\frac{7}{6}$.

Ex. 41 ★★★ **La cagnotte de Lina** — Lina a une cagnotte de x euros. Elle dépense $\frac{1}{4}$ de sa cagnotte pour un livre, puis $\frac{2}{5}$ de ce qui reste pour une place de concert. À la fin, il lui reste 54 €.

(a) Exprime en fonction de x la somme qui reste après l'achat du livre, puis le prix de la place de concert.

(b) Écris une équation qui traduit « il reste 54 € », puis résous-la. Quel est le montant de la cagnotte ?

(c) Vérifie ta réponse en calculant chaque dépense et ce qui reste à la fin.

(d) Noé affirme : « Lina a dépensé $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20}$ de sa cagnotte. » Cette affirmation est-elle vraie ? Justifie.

Ex. 42 ★★★ **Deux programmes de calcul** — Programme A : choisir un nombre ; lui ajouter $\frac{2}{3}$; élever le résultat au carré.
Programme B : choisir un nombre ; lui soustraire 1 ; multiplier le résultat par le nombre choisi ; ajouter 3.

(a) Sacha choisit $-\frac{1}{3}$. Calcule le résultat de chaque programme.

(b) On choisit x. Écris le résultat de chaque programme en fonction de x, puis développe et réduis.

(c) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir le même résultat avec les deux programmes ? Donne-le sous forme de fraction irréductible.

(d) Sacha affirme : « Avec le programme A, je peux obtenir $-\frac{1}{9}$. » Cette affirmation est-elle vraie ? Justifie.

(e) Quels nombres faut-il choisir pour que le programme A donne $\frac{1}{16}$?

7. *Problèmes, vrai ou faux et exercices type brevet*

À retenir : Fraction d'un reste : on multiplie par ce reste. Avec $\frac{1}{5}$ puis $\frac{1}{2}$ du reste, on a pris $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ du total. Si $\frac{2}{3}$ du tout valent 10, le tout vaut $10 \div \frac{2}{3} = 15$. Je vérifie et je conclus avec l'unité.

Ex. 43 ★★☆ **Automatismes : une fraction d'une quantité, ou le tout** — Calcule en ligne. Donne les fractions sous forme irréductible.

(a) Calcule les $\frac{3}{8}$ de 56 €.

(b) Les $\frac{2}{7}$ d'un nombre valent 18. Quel est ce nombre ?

(c) Calcule les $\frac{5}{6}$ de 4{,}2 kg.

(d) Quelle fraction de 32 L représentent 12 L ?

(e) Léo dit : « 15 élèves représentent les $\frac{3}{5}$ de ma classe, donc elle compte $\frac{3}{5} \times 15 = 9$ élèves. » Corrige son erreur.

(f) Lina a dépensé les $\frac{5}{8}$ de ses économies. Il lui reste 45 €. Combien avait-elle au départ ?

(g) Combien de minutes font les $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{9}$ h ?

Ex. 44 ★★☆ **Automatismes : une fraction du reste** — Donne chaque fraction sous forme irréductible.

(a) Mia mange $\frac{1}{4}$ d'une tarte, puis $\frac{1}{3}$ du reste. Quelle fraction de la tarte a-t-elle mangée en tout ?

(b) Une citerne est pleine. On utilise $\frac{2}{5}$ de l'eau le matin, puis la moitié du reste l'après-midi. Quelle fraction de l'eau reste-t-il ?

(c) Tom dépense $\frac{2}{9}$ de son argent, puis $\frac{3}{7}$ du reste. Il dit : « J'ai dépensé $\frac{2}{9} + \frac{3}{7} = \frac{41}{63}$ de mon argent. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Un terrain est en potager pour $\frac{3}{8}$, et $\frac{2}{5}$ du reste est en pelouse. Quelle fraction du terrain est en pelouse ?

(e) Une bibliothèque a 360 livres : $\frac{5}{12}$ sont des romans et $\frac{2}{7}$ du reste sont des BD. Combien y a-t-il de BD ?

Ex. 45 ★★☆ **L'âge de Nolan** — Nolan, le neveu de Ben, a un âge entier en années. Si on ajoute 9 ans au quart de son âge, on obtient son âge diminué de 6 ans.

(a) Soit x l'âge de Nolan, en années. Écris une équation qui traduit l'énoncé.

(b) Résous cette équation : commence par multiplier les deux membres par 4.

(c) Vérifie ta solution dans l'énoncé, puis conclus par une phrase.

(d) Sami remplace « 9 ans » par « 10 ans » dans l'énoncé. Il dit : « On trouve encore un âge possible pour Nolan. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **Des équipes au club de sport** — Un club de sport compte 288 adhérents, dont 168 font de la natation. Le club veut répartir tous ses adhérents en équipes identiques : chaque équipe a le même nombre de nageurs et le même nombre de non-nageurs.

(a) Décompose 168 et 288 en produit de facteurs premiers.

(b) Grâce à ces décompositions, écris sous forme irréductible la fraction des adhérents qui nagent.

Ex. 46 **(suite)**

(c) Combien d'adhérents ne nagent pas ? Décompose ce nombre en produit de facteurs premiers.

(d) Le club peut-il former 16 équipes ? Justifie.

(e) Quel est le plus grand nombre d'équipes possible ? Donne la composition d'une équipe et conclus par une phrase.

Ex. 47 ★★★ **Le budget vacances d'Inès** — Inès part en vacances. Elle dépense $\frac{1}{6}$ de ses économies pour le train, puis les $\frac{3}{5}$ du reste pour l'hôtel. Il lui reste alors 230 €. Donne les fractions sous forme irréductible.

(a) Quelle fraction de ses économies Inès dépense-t-elle pour l'hôtel ?

(b) Son frère calcule $\frac{1}{6}+\frac{3}{5}=\frac{23}{30}$ et dit qu'elle a dépensé les $\frac{23}{30}$ de ses économies. Explique son erreur, puis donne la bonne fraction dépensée.

(c) Soit x le montant de ses économies, en euros. Écris une équation qui traduit l'énoncé, puis résous-la.

(d) Combien Inès a-t-elle payé le train et l'hôtel ? Vérifie tes résultats dans l'énoncé et conclus par une phrase.

Ex. 48 ★★★ **Vrai ou faux et QCM type brevet** — Pour les quatre premières affirmations, dis si chacune est vraie ou fausse et justifie. Pour la dernière question, choisis la bonne réponse et justifie.

(a) « Si on additionne deux fractions irréductibles de même dénominateur, on obtient toujours une fraction irréductible. »

(b) « Pour tous nombres strictement positifs a et b, l'inverse de $a+b$ est égal à $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. »

(c) « $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=-\frac{9}{4}$ »

(d) « Le nombre $-\frac{3}{4}$ est une solution de l'équation $16x^2=9$. »

(e) $E=1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ vaut : réponse A : $\frac{1}{3}$; réponse B : $\frac{1}{2}$; réponse C : $-\frac{1}{2}$.

Ex. 49 ★★★ **Trois tarifs à la piscine** — Une piscine propose trois tarifs. Tarif A : 4,80 € l'entrée. Tarif B : une carte à 36 € par an, puis chaque entrée coûte les $\frac{3}{4}$ du prix du tarif A. Tarif C : une carte à 50 € par an, puis chaque entrée coûte les $\frac{5}{8}$ du prix du tarif A.

(a) Calcule le prix d'une entrée avec le tarif B, puis avec le tarif C.

(b) Soit x le nombre d'entrées dans l'année. Exprime en fonction de x le prix payé avec chacun des trois tarifs.

(c) Pour combien d'entrées les tarifs A et B coûtent-ils le même prix ? Vérifie, puis conclus par une phrase.

(d) Margot affirme : « Il existe un nombre d'entrées pour lequel les tarifs B et C coûtent exactement le même prix. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 49 **(suite)**

(e) Ilan prévoit 40 entrées dans l'année. Quel tarif doit-il choisir pour payer le moins cher ? Justifie.