1. Rappels de 4^e : calculer avec des fractions relatives

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : additionner, soustraire, gérer les signes**

(a) Le plus petit dénominateur commun est 30 (pas 150).
$\frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{9}{30} + \frac{14}{30} = \frac{23}{30}$

(b) Soustraire $-\frac{7}{12}$, c'est ajouter $\frac{7}{12}$.
$-\frac{5}{12} + \frac{7}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

(c) $3 = \frac{12}{4}$, donc $3 - \frac{11}{4} = \frac{12}{4} - \frac{11}{4} = \frac{1}{4}$

(d) Les deux signes « − » donnent un quotient positif.
$\frac{-15}{-35} = \frac{15}{35} = \frac{3\times5}{7\times5} = \frac{3}{7}$

(e) Le plus petit dénominateur commun est 24.
$\frac{5}{8} - \frac{11}{12} = \frac{15}{24} - \frac{22}{24} = -\frac{7}{24}$

(f) $\frac{4}{-9} = -\frac{4}{9}$, donc $-\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{11}{9}$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : multiplier, inverser, diviser**

(a) On simplifie avant, en croisant : 14 avec 8, 25 avec 15.
$\frac{2\times7\times5\times5}{3\times5\times2\times4} = \frac{35}{12}$

(b) Signes contraires : le produit est négatif.
$-\frac{9\times4\times5}{4\times4\times9\times3} = -\frac{5}{12}$

(c) Inverse : $-\frac{5}{7}$, de même signe, car $\left(-\frac{7}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) = 1$.
Opposé : $\frac{7}{5}$.

(d) Non : tout nombre multiplié par 0 donne 0, jamais 1.
Donc 0 n'a pas d'inverse.

(e) $8 \div \frac{12}{5} = 8 \times \frac{5}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$

(f) $\left(-\frac{6}{7}\right) \times \frac{1}{3} = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7}$

(g) Même signe : le quotient est positif.
$\frac{3}{11} \times \frac{22}{9} = \frac{3\times2\times11}{11\times3\times3} = \frac{2}{3}$

Ex. 3 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) Léna a additionné les dénominateurs, ce qu'on ne fait jamais. On met au même dénominateur, 20 :
$\frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$
Le bon résultat est $\frac{23}{20}$.

(b) Malik a retourné la première fraction. On ne retourne que celle par laquelle on divise :
$\frac{10}{21} \times \frac{14}{15} = \frac{2\times5\times2\times7}{3\times7\times3\times5} = \frac{4}{9}$
Le bon résultat est $\frac{4}{9}$.

Ex. 3 (suite)

(c) Inès a changé le signe : elle a confondu inverse et opposé. L'inverse garde le signe : c'est $-\frac{9}{4}$.
En effet, $\left(-\frac{4}{9}\right) \times \left(-\frac{9}{4}\right) = 1$.

(d) Hugo a simplifié les deux numérateurs entre eux. Cela divise le produit par 4. On simplifie en croisant : 6 avec 9, 14 avec 35.
$\frac{2\times3\times2\times7}{5\times7\times3\times3} = \frac{4}{15}$
Le bon résultat est $\frac{4}{15}$.

Ex. 4 ★★☆ **Comparer, ranger, retrouver le nombre manquant**

(a) $-\frac{3}{4} = -\frac{15}{20}$ et $-\frac{7}{10} = -\frac{14}{20}$.
Entre deux négatifs, le plus petit est celui qui est le plus loin de 0 : $15 > 14$.
Donc $-\frac{3}{4} < -\frac{7}{10}$.

(b) Sur 12 : $-\frac{2}{3} = -\frac{8}{12}$; $\frac{1}{-2} = -\frac{6}{12}$; $\frac{-5}{-6} = \frac{10}{12}$, qui est positif ; $-\frac{7}{12}$.
Donc $-\frac{2}{3} < -\frac{7}{12} < \frac{1}{-2} < \frac{-5}{-6}$.

(c) Le nombre cherché est $-\frac{3}{8} - \frac{5}{12} = -\frac{9}{24} - \frac{10}{24} = -\frac{19}{24}$.
Le nombre manquant est $-\frac{19}{24}$.

(d) Le nombre cherché est $\frac{15}{28} \div \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{15}{28} \times \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\times5\times2\times4}{4\times7\times3} = -\frac{10}{7}$.
Le nombre manquant est $-\frac{10}{7}$.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux type brevet**

(a) Faux. Pour multiplier, on ne met pas au même dénominateur : on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en simplifiant avant, en croisant.
$\frac{8}{15} \times \frac{9}{4} = \frac{2\times4\times3\times3}{3\times5\times4} = \frac{6}{5}$.
L'affirmation est fausse.

(b) Faux. Le numérateur et le dénominateur sont tous les deux négatifs, donc la fraction est positive.
$\frac{-12}{-18} = \frac{12}{18} = \frac{2\times6}{3\times6} = \frac{2}{3}$.
Or $\frac{2}{3} \neq -\frac{2}{3}$.

(c) Faux. On n'additionne jamais les dénominateurs. Le plus petit dénominateur commun est 36 :
$\frac{7}{12} + \frac{5}{18} = \frac{21}{36} + \frac{10}{36} = \frac{31}{36}$.
Or $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$, et $\frac{31}{36} \neq \frac{2}{5}$.

Ex. 5 **(suite)**

(d) Vrai. Diviser par $\frac{2}{7}$, c'est multiplier par $\frac{7}{2} = 3{,}5$, un nombre plus grand que 1.
Un nombre positif non nul multiplié par 3,5 devient plus grand. Par exemple, $10 \div \frac{2}{7} = 10 \times \frac{7}{2} = 35$, et $35 > 10$.

(e) Faux. On compare d'abord les distances à zéro : $\frac{9}{11} = \frac{54}{66}$ et $\frac{5}{6} = \frac{55}{66}$, donc $\frac{9}{11} < \frac{5}{6}$.
Pour deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro : $-\frac{5}{6} < -\frac{9}{11}$.
Donc $-\frac{9}{11} > -\frac{5}{6}$.

Ex. 6 ★★★ **Une randonnée en trois jours**

(a) Après le premier jour, il reste $1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ du parcours.
$\frac{5}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{5\times3}{3\times3\times5} = \frac{1}{3}$.
Le deuxième jour, Lou parcourt $\frac{1}{3}$ du parcours total.

(b) $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15}{15} - \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$.
L'étape du troisième jour représente $\frac{4}{15}$ du parcours.

(c) $\frac{4}{15}$ du parcours valent 12 km, donc la longueur totale est $12 \div \frac{4}{15}$.
$12 \div \frac{4}{15} = 12 \times \frac{15}{4} = \frac{180}{4} = 45$.
Contrôle : $\frac{4}{15} \times 45 = 12$. Le parcours mesure 45 km.

(d) $\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
$\frac{1}{9} \times 45 = 5$.
Un tronçon représente $\frac{1}{9}$ du parcours, soit 5 km.

(e) Les deux autres jours réunis : $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.
Or $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$: 18 km le premier jour contre 27 km pour les deux autres.
L'affirmation est fausse.

Ex. 7 ★★★ **Enchaîner signes, inverses et quotients**

(a) $A = -\frac{3}{4} + \frac{11}{28}$
$A = -\frac{21}{28} + \frac{11}{28}$
$A = -\frac{10}{28}$
$A = -\frac{5}{14}$.

(b) Les deux fractions sont négatives, donc le quotient est positif.
$B = \frac{12}{35} \times \frac{25}{18}$
$B = \frac{2\times2\times3\times5\times5}{5\times7\times2\times3\times3}$
$B = \frac{10}{21}$.

(c) L'inverse de A est $-\frac{14}{5}$, car $\left(-\frac{5}{14}\right) \times \left(-\frac{14}{5}\right) = 1$ (il a le même signe que A).
L'opposé de A est $\frac{5}{14}$.

Ex. 7 **(suite)**

(d) On retourne seulement le diviseur B :
$C = -\frac{5}{14} \div \frac{10}{21}$
$C = -\frac{5}{14} \times \frac{21}{10}$
$C = -\frac{5\times3\times7}{2\times7\times2\times5}$
$C = -\frac{3}{4}$.

(e) $C + 0{,}75 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$.
0 n'a pas d'inverse : quel que soit le nombre n, $0 \times n = 0$ et jamais 1.
L'affirmation est fausse.

2. *Enchaîner les calculs : priorités*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : qui passe en premier ?**

(a) Le produit d'abord : $\frac{3}{4} - \frac{10}{40} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

(b) Les parenthèses d'abord : $\left(\frac{6}{8} - \frac{5}{8}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{1}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$.

(c) De gauche à droite, la division d'abord : $\frac{4}{9} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

(d) $-\frac{1}{3} + \frac{7}{6} \times \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{6} = -\frac{2}{6} - \frac{4}{6} = -1$.

(e) $0{,}5 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} - \frac{15}{90} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(f) $\frac{5}{12} - \left(\frac{3}{12} - \frac{8}{12}\right) = \frac{5}{12} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : carrés et grandes barres**

(a) $\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}$ (positif).

(b) Le carré porte seulement sur $\frac{2}{5}$: $-\frac{4}{25}$.

(c) Le carré d'abord : $3 \times \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(d) $1 - 2 \times \frac{9}{16} = 1 - \frac{9}{8} = \frac{8}{8} - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$.

(e) Numérateur : $\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; dénominateur : $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.
$\frac{5}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{8}{4} = 2$.

(f) Numérateur : $\frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{4}{3}$; dénominateur : $\frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$.
$-\frac{4}{3} \times \frac{6}{7} = -\frac{24}{21} = -\frac{8}{7}$.

Ex. 10 ★★☆ **Le calcul de Maëlys**

(a) Le produit passe avant l'addition : il faut d'abord calculer $\frac{1}{6} \times \frac{9}{4} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, et non additionner $\frac{5}{6}$ et $\frac{1}{6}$.

(b) $B = \frac{5}{6} + \frac{3}{8}$
$B = \frac{20}{24} + \frac{9}{24}$
$B = \frac{29}{24}$.
Le bon résultat est $\frac{29}{24}$.

Ex. 10 **(suite)**

(c) Il faut écrire $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{9}{4}=1\times\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$: avec ces parenthèses, la somme passe avant.

(d) $C=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{4}{9}$
$C=\frac{5}{6}-\frac{4}{54}=\frac{5}{6}-\frac{2}{27}$
$C=\frac{45}{54}-\frac{4}{54}=\frac{41}{54}$.
Donc $C=\frac{41}{54}$.

Ex. 11 ★★☆ **Un calcul de brevet, étape par étape**

(a) $\frac{9}{6}-\frac{1}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

(b) $A=\frac{4}{3}\div\frac{8}{9}-\frac{1}{2}$
$A=\frac{4}{3}\times\frac{9}{8}-\frac{1}{2}$
$A=\frac{36}{24}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$
$A=1$.
Donc $A=1$.

(c) La division d'abord : $\frac{1}{6}\times\frac{9}{8}=\frac{9}{48}=\frac{3}{16}$.
$E=\frac{24}{16}-\frac{3}{16}-\frac{8}{16}$
$E=\frac{13}{16}$.
Sans parenthèses, le résultat change.

(d) Numérateur : $\frac{4}{3}$; dénominateur : $\frac{16}{18}-\frac{9}{18}=\frac{7}{18}$.
$F=\frac{4}{3}\times\frac{18}{7}=\frac{72}{21}$
$F=\frac{24}{7}$.

Ex. 12 ★★★ **Vrai ou faux : quatre affirmations sur les priorités**

(a) $-\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{9}{16}$: le carré porte seulement sur $\frac{3}{4}$, puis on prend l'opposé.
$\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$.
Comme $-\frac{9}{16}\neq\frac{9}{16}$, l'affirmation est fausse.

(b) On fait la division puis la multiplication, de gauche à droite :
$\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$
$\frac{6}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$.
Le résultat est $\frac{9}{10}$ et pas $\frac{8}{5}$. On obtient $\frac{8}{5}$ seulement si on calcule d'abord $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$, ce qui est interdit.
L'affirmation est fausse.

(c) $0{,}5=\frac{1}{2}$.
Les parenthèses d'abord : $\frac{1}{4}-\frac{7}{12}=\frac{3}{12}-\frac{7}{12}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$.
$\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$.
L'affirmation est vraie.

(d) Numérateur : $\frac{5}{3}-\frac{3}{3}=\frac{2}{3}$.
Dénominateur : $\frac{5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{8}{3}$.
Quotient : $\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.
L'affirmation est vraie.

Ex. 13 ★★★ **Brevet : un entier et une fraction de fraction**

(a) Le carré passe avant le produit : $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.
$2\times\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.
Par contre $\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2=(-1)^2=1$: là, le produit est fait avant le carré.
Donc $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{5}{4}-\frac{1}{3}=\frac{15}{12}-\frac{4}{12}=\frac{11}{12}$
$\frac{11}{12}\div\frac{11}{18}=\frac{11}{12}\times\frac{18}{11}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$
$A=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$.
Donc A est un nombre entier : $A=2$.

(c) Numérateur : $1-\frac{5}{8}=\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$.
Dénominateur : $1{,}5=\frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{4}+\frac{6}{4}=\frac{9}{4}$.
$B=\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{12}{72}=\frac{1}{6}$.
Donc $B=\frac{1}{6}$.

(d) $A-B=2-\frac{1}{6}=\frac{12}{6}-\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$.
Donc $A-B=\frac{11}{6}$.

Ex. 14 ★★★ **L'erreur de Noé, puis le calcul à rebours**

(a) Une division et une multiplication qui se suivent se calculent de gauche à droite. Noé aurait dû calculer d'abord $\frac{3}{5}\div\frac{4}{3}$. En faisant $\frac{4}{3}\times 2=\frac{8}{3}$ en premier, il a calculé $\frac{3}{5}\div\frac{8}{3}=\frac{9}{40}$, puis $\frac{36}{40}-\frac{9}{40}=\frac{27}{40}$: c'est faux.

(b) $\frac{3}{5}\div\frac{4}{3}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$
$\frac{9}{20}\times 2=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$
$C=\frac{9}{10}-\frac{9}{10}=0$.
Donc $C=0$.

(c) Les parenthèses d'abord : $\frac{3}{5}-\frac{4}{3}=\frac{9}{15}-\frac{20}{15}=-\frac{11}{15}$.
Le signe $-$ devant la parenthèse : $D=\frac{9}{10}-\left(-\frac{11}{15}\right)=\frac{9}{10}+\frac{11}{15}$.
$D=\frac{27}{30}+\frac{22}{30}=\frac{49}{30}$.
$49=7^2$ et $30=2\times3\times5$ n'ont aucun facteur premier commun, donc $D=\frac{49}{30}$ est irréductible.

(d) $\frac{3}{5}\div\frac{4}{3}=\frac{9}{20}$ (calcul de C). On appelle n le nombre cherché. Il faut que $\frac{9}{10}-\frac{9}{20}\times n=\frac{9}{20}$.
Comme $\frac{9}{10}-\frac{9}{20}=\frac{18}{20}-\frac{9}{20}=\frac{9}{20}$, il faut $\frac{9}{20}\times n=\frac{9}{20}$, donc $n=1$.
Il faut remplacer 2 par 1.

3. *Rendre une fraction irréductible*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : décomposer en facteurs premiers**

(a) $168 = 2 \times 84 = 2 \times 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 2 \times 21 = 2^3 \times 3 \times 7$. Vérification : $8 \times 3 \times 7 = 168$.

(b) 119 est impair, mais $119 = 7 \times 17$: il n'est pas premier. Vérification : $7 \times 17 = 119$.

(c) $10 \times 10 = 100$, donc je teste les nombres premiers inférieurs à 10 : 2, 3, 5, 7. 89 est impair, $8 + 9 = 17$ n'est pas un multiple de 3, 89 ne se termine ni par 0 ni par 5 et $89 = 7 \times 12 + 5$.
Donc 89 est premier.

(d) $1 + 5 + 3 = 9$, donc 153 est divisible par 9 : $153 = 9 \times 17 = 3^2 \times 17$. Vérification : $9 \times 17 = 153$.

(e) Je teste jusqu'à 14 ($15 \times 15 = 225$) : 2, 3, 5, 7 et 11 ne divisent pas 221, mais 13 le divise. $221 = 13 \times 17$. Vérification : $13 \times 17 = 221$.

(f) $390 = 2 \times 195 = 2 \times 3 \times 65 = 2 \times 3 \times 5 \times 13$. Vérification : $6 \times 65 = 390$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : rendre irréductible**

(a) $\dfrac{54}{72} = \dfrac{2 \times 3^3}{2^3 \times 3^2} = \dfrac{3}{2^2} = \dfrac{3}{4}$

(b) $49 = 7^2$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$: aucun facteur premier commun, donc $\dfrac{49}{120}$ est déjà irréductible.

(c) $-\dfrac{84}{126} = -\dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7} = -\dfrac{2}{3}$

(d) Je barre 2^2 et un seul 3 : $\dfrac{2^2 \times 7}{3 \times 5} = \dfrac{28}{15}$

(e) $\dfrac{51}{85} = \dfrac{3 \times 17}{5 \times 17} = \dfrac{3}{5}$

(f) $\dfrac{165}{-231} = -\dfrac{3 \times 5 \times 11}{3 \times 7 \times 11} = -\dfrac{5}{7}$

Ex. 17 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) Incorrect : le quotient de deux nombres négatifs est positif. $\dfrac{-52}{-76} = \dfrac{52}{76} = \dfrac{2^2 \times 13}{2^2 \times 19} = \dfrac{13}{19}$. La fraction irréductible est $\dfrac{13}{19}$.

(b) Incorrect : on ne simplifie pas une somme. $\dfrac{3+4}{3+8} = \dfrac{7}{11}$, qui est irréductible car 7 et 11 sont premiers et différents.

(c) Incorrect : un facteur ne se barre qu'autant de fois qu'il est des deux côtés. On barre un 2 et un 3 : $\dfrac{2^2 \times 7}{3 \times 11} = \dfrac{28}{33}$.

(d) Incorrect : 1 n'est pas un nombre premier. $45 = 3^2 \times 5$ et $77 = 7 \times 11$ n'ont aucun facteur premier commun, donc $\dfrac{45}{77}$ est irréductible.

(e) Incorrect : $3 + 5 + 7 = 15$ donc 3 divise 357. $\dfrac{357}{510} = \dfrac{3 \times 7 \times 17}{2 \times 3 \times 5 \times 17} = \dfrac{7}{10}$. La fraction n'était pas irréductible.

Ex. 18 ★★☆ **Grands nombres et décompositions**

(a) $1\,050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$; $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$; $1\,188 = 2^2 \times 3^3 \times 11$
(car $1 + 1 + 8 + 8 = 18$: 1 188 est divisible par 9).

(b) $\dfrac{1\,050}{1\,260} = \dfrac{2 \times 3 \times 5^2 \times 7}{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7} = \dfrac{5}{2 \times 3} = \dfrac{5}{6}$. La fraction irréductible est $\dfrac{5}{6}$.

(c) $\dfrac{1\,188}{1\,260} = \dfrac{2^2 \times 3^3 \times 11}{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7} = \dfrac{3 \times 11}{5 \times 7} = \dfrac{33}{35}$. La fraction irréductible est $\dfrac{33}{35}$.

(d) $0{,}66 = \dfrac{66}{100} = \dfrac{2 \times 3 \times 11}{2^2 \times 5^2}$.
$\dfrac{1\,050}{1\,188} \times 0{,}66 = \dfrac{2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 2 \times 3 \times 11}{2^2 \times 3^3 \times 11 \times 2^2 \times 5^2}$
$= \dfrac{7}{2^2 \times 3} = \dfrac{7}{12}$.
Le produit vaut $\dfrac{7}{12}$.

Ex. 19 ★★★ **Vrai ou faux type brevet**

(a) Faux. $375 = 3 \times 5^3$ et $1\,000 = 2^3 \times 5^3$ ont le facteur commun 5^3.
$\dfrac{375}{1\,000} = \dfrac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \dfrac{3}{8}$.
La fraction n'est pas irréductible.

(b) Vrai. $91 = 7 \times 13$, $93 = 3 \times 31$, $95 = 5 \times 19$ et $99 = 3^2 \times 11$. 92, 94, 96 et 98 sont pairs. Pour 97 : $\sqrt{97} < 10$, donc on teste 2, 3, 5 et 7. 97 est impair, $9 + 7 = 16$ n'est pas un multiple de 3, 97 ne se termine ni par 0 ni par 5 et $97 = 7 \times 13 + 6$.
Donc 97 est premier, et c'est le seul nombre premier entre 90 et 100.

(c) Faux. $285 = 3 \times 5 \times 19$ et $418 = 2 \times 11 \times 19$ ont le facteur premier commun 19.
$-\dfrac{285}{418} = -\dfrac{3 \times 5 \times 19}{2 \times 11 \times 19} = -\dfrac{15}{22}$.
La fraction n'est pas irréductible.

(d) Vrai. $143 = 11 \times 13$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ (11 et 13 sont premiers). Ces deux nombres n'ont aucun facteur premier commun, donc la fraction est irréductible, même si ni 143 ni 210 n'est premier.

(e) Vrai. $1 + 3 + 2 = 6$ et $2 + 9 + 7 = 18 : 3$ divise 132 et 297.
$\dfrac{132}{297} = \dfrac{2^2 \times 3 \times 11}{3^3 \times 11} = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4}{9}$.

Ex. 20 ★★★ **Simplifier jusqu'au bout**

(a) Non. $1 + 8 + 0 = 9$ et $1 + 8 + 9 = 18$: ces deux sommes sont des multiples de 9, donc 180 et 189 sont divisibles par 9. La fraction n'est pas irréductible : Yanis s'est arrêté trop tôt.

(b) $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ (vérification : $16 \times 9 \times 5 = 720$).
$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$
(vérification : $4 \times 27 \times 7 = 756$).

Ex. 20 (suite)

(c) Les facteurs communs sont 2^2 et 3^2.
$\frac{720}{756} = \frac{2^4\times3^2\times5}{2^2\times3^3\times7} = \frac{2^2\times5}{3\times7} = \frac{20}{21}$.
La forme irréductible est $\frac{20}{21}$.

(d) $105 = 21\times5$, donc $\frac{720}{756} = \frac{20}{21} = \frac{20\times5}{21\times5} = \frac{100}{105}$.
Le numérateur cherché est 100.

(e) Diviser, c'est multiplier par l'inverse :
$\frac{720}{756} \div \left(-\frac{50}{63}\right) = \frac{20}{21} \times \left(-\frac{63}{50}\right)$
$= -\frac{2^2\times5\times3^2\times7}{3\times7\times2\times5^2}$
$= -\frac{2\times3}{5}$
$= -\frac{6}{5}$.
Le quotient vaut $-\frac{6}{5}$.

Ex. 21 ★★★ Problème de brevet : la billetterie d'un festival

(a) $1+0+5+3 = 9$ et $1+7+5+5 = 18$. Ces deux sommes sont des multiples de 9, donc 1 053 et 1 755 sont divisibles par 9.

(b) Non : le produit est juste ($27\times65 = 1\,755$), mais $65 = 5\times13$ n'est pas premier.
$1\,053 = 9\times117 = 9\times9\times13 = 3^4\times13$.
$1\,755 = 9\times195 = 3^2\times3\times5\times13 = 3^3\times5\times13$.

(c) $\frac{1\,053}{1\,755} = \frac{3^4\times13}{3^3\times5\times13} = \frac{3}{5}$.
Les $\frac{3}{5}$ des billets ont été vendus en prévente.

(d) Les billets sur place représentent $1-\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ du total.
$\frac{2}{9}\times\frac{2}{5} = \frac{4}{45}$.
Vérification : $\frac{4}{45}\times1\,755 = 4\times39 = 156$ billets, et $\frac{2}{9}\times702 = 156$.
Les billets à tarif réduit vendus sur place représentent $\frac{4}{45}$ du total.

(e) Erreur : $\frac{2}{9}$ est une fraction des billets vendus sur place, pas du total. $\frac{7}{9}$ des billets sur place sont à plein tarif, soit $\frac{7}{9}\times\frac{2}{5} = \frac{14}{45}$ du total.
Vérification : $702-156 = 546$ et $\frac{14}{45}\times1\,755 = 14\times39 = 546$.
Les billets sur place à plein tarif représentent $\frac{14}{45}$ du total.

4. *Fractions et puissances*

Ex. 22 ★☆☆ Automatismes : exposants négatifs et exposant 0

(a) $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$
(un inverse, pas -36 ni -12).

(b) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$: négatif car la base est négative et l'exposant 3 est impair.

Ex. 22 (suite)

(c) On retourne la fraction : $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{4}$.

(d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$.

(e) Tout nombre non nul à l'exposant 0 vaut 1 : $\left(-\frac{11}{8}\right)^0 = 1$.

(f) $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}000\,01$.

(g) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$: positif car l'exposant est pair.

Ex. 23 ★☆☆ Automatismes : puissance d'une fraction et signe

(a) Le carré porte sur les deux termes : $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$.

(b) Ici seul le numérateur est au carré : $\frac{3^2}{7} = \frac{9}{7}$.

(c) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$: positif, exposant pair.

(d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$: négatif, exposant impair.

(e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$: positif, exposant pair.

(f) $(-2)^5 = -32$ et $3^2 = 9$, donc $\frac{(-2)^5}{3^2} = -\frac{32}{9}$.

(g) $16 = 2^4$ et le résultat est positif, donc l'exposant est pair : $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, donc $n = 4$.

Ex. 24 ★★☆ Quotients de produits de puissances

(a) $A = 2^{6-4}\times5^{2-3}$
$A = 2^2\times5^{-1}$
$A = \frac{4}{5}$.
Donc $A = \frac{4}{5}$.

(b) $B = 3^{4-(-1)}\times2^{-2-3}$
$B = 3^5\times2^{-5}$
$B = \frac{243}{32}$. Attention : $4-(-1) = 5$.
Donc $B = \frac{243}{32}$.

(c) $C = \frac{10^{-3+5}}{10^4} = \frac{10^2}{10^4}$
$C = 10^{2-4} = 10^{-2}$
$C = \frac{1}{100} = 0{,}01$.
Donc $C = \frac{1}{100}$.

(d) $6^3 = (2\times3)^3 = 2^3\times3^3$
$D = \frac{2^3\times3^3}{2^2\times3^4}$
$D = 2^1\times3^{-1} = \frac{2}{3}$.
Donc $D = \frac{2}{3}$.

Ex. 25 ★★☆ Repérer et corriger l'erreur

(a) Non. Un exposant négatif donne un inverse, pas un opposé : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. Noé a tort.

(b) Non. $2^4 + 2^3 = 16+8 = 24$, alors que $2^7 = 128$. On ne peut pas additionner les exposants d'une somme. Inès a tort.

Ex. 25 (suite)

(c) Non. Seul 5 est au carré : $\frac{5^2}{3} = \frac{25}{3}$. C'est $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ qui vaut $\frac{25}{9}$. Malik a tort.

(d) Non. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27}$: la base est négative et l'exposant 3 est impair, donc le résultat est négatif. Sacha a oublié le signe.

Ex. 26 ★★★ Vrai ou faux type brevet : puissances et fractions

(a) Faux. Contre-exemple : $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, qui est positif. Un exposant négatif donne un inverse, pas un opposé. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ est même toujours positif.

(b) Faux. La moitié de 2^{10} est $\frac{2^{10}}{2} = 2^{10-1} = 2^9 = 512$. Or $2^5 = 32$. Diviser par 2 enlève 1 à l'exposant : on ne divise pas l'exposant par 2.

(c) Vrai. $3^2 + 3^2 + 3^2 = 3 \times 3^2 = 3^{1+2} = 3^3$. Vérification : $9 + 9 + 9 = 27$ et $3^3 = 27$. On n'a pas additionné les exposants : la somme de trois termes égaux est devenue un produit.

(d) Vrai. L'exposant 4 est pair : $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$, qui est positif. L'exposant 3 est impair : $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$, qui est négatif. Un nombre positif est plus grand qu'un nombre négatif, donc l'affirmation est vraie.

(e) Faux. $2^{-3} = \frac{1}{8}$, donc $\frac{3}{2^{-3}} = 3 \div \frac{1}{8} = 3 \times 8 = 24$. Diviser par $\frac{1}{8}$, c'est multiplier par 8. Comme $24 \neq \frac{3}{8}$, l'affirmation est fausse.

Ex. 27 ★★★ Enchaînements de puissances, étape par étape

(a) $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$ et $2^{-3} = \frac{1}{8}$
$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \div \frac{1}{8}$ (la barre de fraction joue le rôle de parenthèses)
$A = \frac{3}{4} \times 8$
$A = 6$
Attention : $2^{-1} + 2^{-2}$ n'est pas égal à 2^{-3}.

(b) $B = 16 + \frac{1}{4} - 1$ (car $4^{-1} = \frac{1}{4}$ et $4^0 = 1$)
$B = \frac{64}{4} + \frac{1}{4} - \frac{4}{4}$
$B = \frac{61}{4}$

(c) $C = -\frac{1}{27} \times 81$ (exposant 3 impair : résultat négatif)
$C = -\frac{81}{27}$
$C = -3$

Ex. 27 (suite)

(d) $D = 4^2 \times \frac{1}{10^3}$ (on retourne $\frac{1}{4}$)
$D = 16 \times \frac{1}{1\,000}$
$D = \frac{16}{1\,000}$
$D = \frac{2}{125}$
Écriture décimale : $D = 0{,}016$.

Ex. 28 ★★★ Problème : les rebonds d'une balle

(a) $243 \times \frac{2}{3} = \frac{486}{3} = 162$.
Après le premier rebond, la balle remonte à 162 cm.

(b) À chaque rebond, on multiplie la hauteur par $\frac{2}{3}$. Avec 4 rebonds, on multiplie 4 fois par $\frac{2}{3}$: on obtient $243 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$.
$243 \times \frac{2^4}{3^4} = 243 \times \frac{16}{81} = 3 \times 16 = 48$.
Après 4 rebonds, la balle remonte à 48 cm.

(c) Non. $243 \times \frac{2^5}{3} = 243 \times \frac{32}{3} = 2\,592$ cm, c'est plus haut que la hauteur de départ : c'est absurde. La puissance porte aussi sur le dénominateur.
Correction : $243 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 3^5 \times \frac{2^5}{3^5} = 2^5 = 32$.
Après 5 rebonds, la balle remonte à 32 cm.

(d) Après 6 rebonds : $32 \times \frac{2}{3} = \frac{64}{3}$, environ 21,3 cm.
Après 7 rebonds : $\frac{64}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{128}{9}$, environ 14,2 cm.
Après 8 rebonds : $\frac{128}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{256}{27}$, environ 9,5 cm.
C'est après 8 rebonds que la hauteur devient pour la première fois inférieure à 10 cm.

(e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$: c'est l'inverse de $\frac{2}{3}$, on retourne la fraction.
Hauteur de lâcher $\times \frac{2}{3} = 50$, donc hauteur de lâcher $= 50 \div \frac{2}{3} = 50 \times \frac{3}{2} = 75$.
Cette balle a été lâchée de 75 cm.

5. *Fractions dans le calcul littéral*

Ex. 29 ★☆☆ Automatismes : développer avec une fraction

(a) $A = \frac{5}{3} \times 6x - \frac{5}{3} \times \frac{3}{5}$
$A = 10x - 1$
(on multiplie les deux termes, pas seulement le premier).

(b) $B = \left(-\frac{3}{4}\right) \times 8x + \left(-\frac{3}{4}\right) \times (-2)$
$B = -6x + \frac{3}{2}$

(c) Le signe $-$ change le signe de chaque terme :
$C = -\frac{x}{5} + \frac{7}{3}$

(d) $D = 4 - \frac{1}{2} + x$ (les deux signes changent)
$D = x + \frac{7}{2}$

Ex. 29 **(suite)**

(e) $E = \frac{2x}{7} \times 14x + \frac{2x}{7} \times 21$
$E = 4x^2 + 6x$

(f) $F = -\frac{5}{6} \times \frac{3}{10}x - \frac{5}{6} \times 12$
$F = -\frac{x}{4} - 10$

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : réduire avec des fractions**

(a) $G = \frac{3x}{12} + \frac{4x}{12} = \frac{7x}{12}$
(et pas $\frac{2x}{7}$: on n'additionne pas les dénominateurs).

(b) $H = \frac{3x}{5} - \frac{5x}{5} = -\frac{2x}{5}$

(c) $K = \frac{2x}{12} - \frac{9x}{12} = -\frac{7x}{12}$

(d) $L = \frac{6x}{4} - \frac{x}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5x}{4} + \frac{2}{3}$
($\frac{5x}{4}$ et $\frac{2}{3}$ ne sont pas semblables).

(e) Termes en x^2 : $\frac{2x^2}{6} - \frac{3x^2}{6} = -\frac{x^2}{6}$; termes en x : $\frac{10x}{5} - \frac{x}{5} = \frac{9x}{5}$.
$M = -\frac{x^2}{6} + \frac{9x}{5}$

(f) C'est un produit : $N = \frac{2\times9}{3\times4} \times x \times x = \frac{18}{12}x^2 = \frac{3x^2}{2}$

Ex. 31 ★★☆ **Double distributivité et identités remarquables**

(a) Première erreur : Lina a oublié le double produit $2 \times \frac{x}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{x}{3}$. Seconde erreur : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, et pas $\frac{2}{4}$.
Le bon développement est donc $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$.

(b) On utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:
$P = x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2$
$P = x^2 - \frac{4}{25}$

(c) $Q = \frac{x}{2} \times 4x + \frac{x}{2} \times \frac{2}{3} - 3 \times 4x - 3 \times \frac{2}{3}$
$Q = 2x^2 + \frac{x}{3} - 12x - 2$
$Q = 2x^2 + \frac{x}{3} - \frac{36x}{3} - 2$
Donc $Q = 2x^2 - \frac{35x}{3} - 2$.

(d) On utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:
$R = (2x)^2 - 2 \times 2x \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$
Donc $R = 4x^2 - 3x + \frac{9}{16}$.

Ex. 32 ★★☆ **Le programme de calcul de Bastien**

(a) Tiers : $\left(-\frac{3}{4}\right) \div 3 = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$
On soustrait 1 : $-\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$
On multiplie : $-\frac{5}{4} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{16}$
Le programme donne $\frac{15}{16}$.

(b) Le résultat est $x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x \times \frac{x}{3} - x \times 1$.
Développé, cela donne $\frac{x^2}{3} - x$.

Ex. 32 **(suite)**

(c) On a $\frac{x^2}{3} = \frac{x}{3} \times x$ et $x = \frac{x}{3} \times 3$.
Donc $\frac{x^2}{3} - x = \frac{x}{3}(x-3)$.

(d) C'est faux. On prend un contre-exemple : $x = 3$.
Programme de Bastien : $3 \times \left(\frac{3}{3} - 1\right) = 3 \times 0 = 0$.
Méthode d'Inès : $\frac{3^2-3}{3} = \frac{6}{3} = 2$.
On trouve $0 \neq 2$, donc Inès a tort
(sa méthode donne $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3}$).

Ex. 33 ★★★ **Vrai ou faux : égalités avec des fractions**

(a) On développe le membre de droite avec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, où $a = \frac{x}{4}$ et $b = \frac{2}{3}$:
$\left(\frac{x}{4} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{16} - \frac{4}{9}$.
L'affirmation 1 est vraie.

(b) Pour $x = 4$: $\frac{3\times4}{4} - 4 = 3 - 4 = -1$, alors que $\frac{4}{4} = 1$.
L'affirmation 2 est fausse. En fait, $\frac{3x}{4} - x = \frac{3x}{4} - \frac{4x}{4} = -\frac{x}{4}$.

(c) Le signe $-$ change les deux signes : $1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} - \frac{x}{2}$.
Contre-exemple : pour $x = 0$, le membre de gauche vaut $\frac{7}{4}$ et celui de droite vaut $\frac{1}{4}$.
L'affirmation 3 est fausse.

(d) $-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{5}\right)$
$= -\frac{9}{25} - \frac{9}{5}$
$= -\frac{9}{25} - \frac{45}{25}$
$= -\frac{54}{25}$
L'affirmation 4 est vraie
(le carré se calcule avant le signe $-$).

Ex. 34 ★★★ **Le potager de Maëlle**

(a) $P = 2\left(x + \frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)$
$= 2x + \frac{3}{2} + x - \frac{2}{3}$
$= 3x + \frac{9}{6} - \frac{4}{6}$
$= 3x + \frac{5}{6}$
Le périmètre vaut $\left(3x + \frac{5}{6}\right)$ m.

(b) $A = x \times \frac{x}{2} - x \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$
$= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}$
$= \frac{x^2}{2} - \frac{8x}{24} + \frac{9x}{24} - \frac{1}{4}$
$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{24} - \frac{1}{4}$
L'aire vaut $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{24} - \frac{1}{4}\right)$ m².

(c) Forme développée : $\frac{1}{2} \times \frac{16}{9} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{24} - \frac{1}{4} = \frac{8}{9} + \frac{1}{18} - \frac{1}{4}$
$= \frac{32}{36} + \frac{2}{36} - \frac{9}{36} = \frac{25}{36}$.
Contrôle : longueur $\frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$; largeur $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$; $\frac{25}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{25}{36}$.
Pour $x = \frac{4}{3}$, l'aire vaut $\frac{25}{36}$ m².

Ex. 34 (suite)

(d) $B = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \frac{x}{3} \times 2 = \frac{x^2}{9} - \frac{2x}{3}$
$= \frac{x}{3} \times \frac{x}{3} - \frac{x}{3} \times 2$
$= \frac{x}{3}\left(\frac{x}{3} - 2\right)$
L'aire restante est $\frac{x}{3}\left(\frac{x}{3} - 2\right)$ m² : c'est un rectangle de $\frac{x}{3}$ m sur $\left(\frac{x}{3} - 2\right)$ m.

Ex. 35 ★★★ **Une différence de deux carrés**

(a) $\left(\frac{x}{5} + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{x}{5} \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$= \frac{x^2}{25} + \frac{3x}{5} + \frac{9}{4}$

(b) $\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{5}\right)^2 - 2 \times \frac{x}{5} \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$= \frac{x^2}{25} - \frac{3x}{5} + \frac{9}{4}$

(c) $D = \frac{x^2}{25} + \frac{3x}{5} + \frac{9}{4} - \left(\frac{x^2}{25} - \frac{3x}{5} + \frac{9}{4}\right)$
$= \frac{x^2}{25} + \frac{3x}{5} + \frac{9}{4} - \frac{x^2}{25} + \frac{3x}{5} - \frac{9}{4}$
$= \frac{6x}{5}$
Pour tout x, $D = \frac{6x}{5}$.

(d) Avec la forme réduite : $D = \frac{6}{5} \times \left(-\frac{25}{12}\right) = -\frac{150}{60} = -\frac{5}{2}$.
Pour $x = -\frac{25}{12}$, $D = -\frac{5}{2}$.

(e) Pour $x = 1$: $D = \frac{6 \times 1}{5} = \frac{6}{5}$, qui n'est pas un entier.
L'affirmation de Sacha est fausse.

6. *Équations avec des fractions*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : équations du premier degré avec des fractions**

(a) Diviser par $\frac{3}{5}$, c'est multiplier par $\frac{5}{3}$: $x = 9 \times \frac{5}{3} = 15$.

(b) $x = \frac{2}{21} \times \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{14}{84} = -\frac{1}{6}$.

(c) On multiplie chaque terme par 12 : $2x - 9 = 4$, donc $2x = 13$ et $x = \frac{13}{2}$.

(d) $0{,}7 = \frac{7}{10}$; on multiplie chaque terme par 10 :
$2x + 7 = 5x$, donc $7 = 3x$ et $x = \frac{7}{3}$.

(e) On multiplie chaque terme par 8 : $5 = 2 - 12x$, donc $12x = -3$ et $x = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$.

(f) On multiplie les deux membres par 6 : $2(2x - 1) = x$, donc $4x - 2 = x$, $3x = 2$ et $x = \frac{2}{3}$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : produit nul et équation $x^2 = a$**

(a) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $5x + 3 = 0$ donne $x = -\frac{3}{5}$; $x - \frac{7}{2} = 0$ donne $x = \frac{7}{2}$.

(b) $\frac{25}{49} > 0$: deux solutions, $x = \frac{5}{7}$ ou $x = -\frac{5}{7}$.

(c) $\frac{x}{3} + 2 = 0$ donne $\frac{x}{3} = -2$, donc $x = -6$; $4x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{4}$.

Ex. 37 (suite)

(d) Un carré n'est jamais négatif : l'équation n'a aucune solution.

Ex. 38 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) $\frac{-\frac{5}{2}+2}{3} = -\frac{1}{6}$ et $\frac{2\times\left(-\frac{5}{2}\right)-1}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$.
$-\frac{1}{6} - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{9}{6} = \frac{4}{3}$.
$\frac{4}{3} \neq 1$: $-\frac{5}{2}$ n'est pas solution, Inès s'est trompée.

(b) Le numérateur $2x - 1$ est une somme : il faut des parenthèses. Le signe $-$ porte sur tout le numérateur : $-3(2x - 1) = -6x + 3$, et non $-6x - 1$.

(c) $4(x + 2) - 3(2x - 1) = 12$
$4x + 8 - 6x + 3 = 12$
$-2x + 11 = 12$
$-2x = 1$
La solution est $x = -\frac{1}{2}$.

(d) $\frac{-\frac{1}{2}+2}{3} = \frac{1}{2}$ et $\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{4} = -\frac{1}{2}$.
$\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$: la solution est bien $-\frac{1}{2}$.

Ex. 39 ★★☆ **Développer et réduire avant de résoudre**

(a) $x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + \frac{3}{4}$ (sans oublier le double produit $2 \times x \times \frac{1}{2} = x$).
On soustrait x^2 : $x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
La solution est $x = \frac{1}{2}$.

(b) $4x^2 - 9 = 4x^2 - 5x$
On soustrait $4x^2$: $-9 = -5x$.
La solution est $x = \frac{9}{5}$.

(c) $\frac{x}{2} - x + 4 = 3 - \frac{x}{2}$
$-\frac{x}{2} + 4 = 3 - \frac{x}{2}$
On ajoute $\frac{x}{2}$: $4 = 3$, ce qui est faux.
Tous les x disparaissent : l'équation n'a aucune solution.

(d) $x^2 - \frac{5}{3}x = 2x$
$x^2 - \frac{11}{3}x = 0$
$x\left(x - \frac{11}{3}\right) = 0$
Les solutions sont $x = 0$ et $x = \frac{11}{3}$
(diviser par x aurait fait perdre 0).

Ex. 40 ★★★ **Vrai ou faux : les pièges des équations**

(a) Faux. On multiplie les deux membres par 4 :
$5x = 60$
$x = 60 \div 5 = 12$.
Vérification : $\frac{5\times12}{4} = \frac{60}{4} = 15$ ✓. La solution est 12, pas $\frac{75}{4}$: diviser par $\frac{5}{4}$, c'est multiplier par $\frac{4}{5}$.

Ex. 40 **(suite)**

(b) Faux. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul :
$10x - 4 = 0$ donne $x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$;
$x + \frac{5}{3} = 0$ donne $x = -\frac{5}{3}$.
Les solutions sont $\frac{2}{5}$ et $-\frac{5}{3}$: $\frac{5}{3}$ n'est pas une solution.

(c) Faux. On multiplie chaque terme par 6, en gardant le numérateur $x - 3$ entre parenthèses :
$3x - (x - 3) = 2x + 3$
$3x - x + 3 = 2x + 3$
$2x + 3 = 2x + 3$.
Cette égalité est vraie pour tout x : tous les nombres sont solutions. Par exemple, pour $x = 0$: $0 - \frac{-3}{6} = \frac{1}{2}$ et $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓.
Si on oublie les parenthèses, on obtient
$2x - 3 = 2x + 3$, ce qui ferait croire, à tort, qu'il n'y a aucune solution.

(d) Faux. En divisant par x, on perd la solution 0. On soustrait $\frac{7}{6}x$ aux deux membres puis on factorise :
$x^2 - \frac{7}{6}x = 0$
$x\left(x - \frac{7}{6}\right) = 0$
donc $x = 0$ ou $x = \frac{7}{6}$.
L'équation a deux solutions : 0 et $\frac{7}{6}$.

Ex. 41 ★★★ **La cagnotte de Lina**

(a) Après le livre, il reste $x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$ euros.
La place de concert coûte $\frac{2}{5} \times \frac{3x}{4} = \frac{6x}{20} = \frac{3x}{10}$ euros.

(b) $x - \frac{x}{4} - \frac{3x}{10} = 54$
On multiplie chaque terme des deux membres par 20 :
$20x - 5x - 6x = 1080$
$9x = 1080$
$x = 120$.
La cagnotte de Lina était de 120 €.

(c) Livre : $\frac{1}{4} \times 120 = 30$ €, il reste $120 - 30 = 90$ €.
Concert : $\frac{2}{5} \times 90 = 36$ €, il reste $90 - 36 = 54$ € ✓.

(d) L'affirmation est fausse. Lina a dépensé $30 + 36 = 66$ €.
$\frac{66}{120} = \frac{2 \times 3 \times 11}{2^3 \times 3 \times 5} = \frac{11}{20}$.
Elle a donc dépensé $\frac{11}{20}$ de sa cagnotte, pas $\frac{13}{20}$: les $\frac{2}{5}$ portent sur le reste, pas sur toute la cagnotte.

Ex. 42 ★★★ **Deux programmes de calcul**

(a) Programme A : $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, puis $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.
Programme B : $-\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$, puis $\left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$, puis $\frac{4}{9} + 3 = \frac{31}{9}$.
Le programme A donne $\frac{1}{9}$ et le programme B donne $\frac{31}{9}$.

Ex. 42 **(suite)**

(b) $A = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$ (sans oublier le double produit).
$B = x(x - 1) + 3 = x^2 - x + 3$.

(c) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = x^2 - x + 3$
On soustrait x^2 : $\frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = -x + 3$
On multiplie chaque terme par 9 : $12x + 4 = -9x + 27$
$21x = 23$
$x = \frac{23}{21}$.
23 est premier et $21 = 3 \times 7$: la fraction est irréductible. Il faut choisir $\frac{23}{21}$
(les deux programmes donnent alors $\frac{1369}{441}$).

(d) L'affirmation est fausse. Le programme A donne un carré, et un carré est toujours positif ou nul. L'équation $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}$ n'a donc aucune solution.

(e) $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{16}$ donne $x + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ ou $x + \frac{2}{3} = -\frac{1}{4}$.
$x = \frac{3}{12} - \frac{8}{12} = -\frac{5}{12}$ ou $x = -\frac{3}{12} - \frac{8}{12} = -\frac{11}{12}$.
Il faut choisir $-\frac{5}{12}$ ou $-\frac{11}{12}$.

7. *Problèmes, vrai ou faux et exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : une fraction d'une quantité, ou le tout**

(a) $56 \div 8 = 7$ puis $7 \times 3 = 21$: cela fait 21 €.

(b) $18 \div 2 = 9$ donne $\frac{1}{7}$ du nombre, puis $9 \times 7 = 63$: le nombre est 63.

(c) $4{,}2 \div 6 = 0{,}7$ puis $0{,}7 \times 5 = 3{,}5$: cela fait 3,5 kg.

(d) $\frac{12}{32} = \frac{4 \times 3}{4 \times 8} = \frac{3}{8}$: 12 L représentent les $\frac{3}{8}$ de 32 L.

(e) Léo a calculé les $\frac{3}{5}$ de 15, alors que 15 est la part et non le tout : la classe compte plus de 15 élèves.
$15 \div 3 = 5$ élèves pour $\frac{1}{5}$, puis $5 \times 5 = 25$: la classe compte 25 élèves.

(f) Il lui reste $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ de ses économies. $45 \div 3 = 15$ puis $15 \times 8 = 120$: elle avait 120 €.

(g) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ h, et $\frac{1}{6} \times 60 = 10$: cela fait 10 minutes.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : une fraction du reste**

(a) Le reste vaut $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de la tarte.
$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$: Mia a mangé la moitié de la tarte.

(b) Après le matin, il reste $\frac{3}{5}$ de l'eau. L'après-midi, on en garde la moitié : $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$. Il reste $\frac{3}{10}$ de l'eau.

Ex. 44 (suite)

(c) Non. Les $\frac{3}{7}$ portent sur le reste, qui vaut $1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$ de l'argent, et pas sur tout l'argent.
$\frac{2}{9}+\frac{3}{7}\times\frac{7}{9}=\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{5}{9}$: Tom a dépensé $\frac{5}{9}$ de son argent.

(d) Le reste vaut $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ du terrain.
$\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$: la pelouse couvre $\frac{1}{4}$ du terrain.

(e) Romans : $\frac{5}{12}\times 360=150$. Reste : $360-150=210$ livres.
BD : $\frac{2}{7}\times 210=60$. Il y a 60 BD.

Ex. 45 ★★☆ L'âge de Nolan

(a) Le quart de l'âge augmenté de 9 : $\frac{x}{4}+9$. L'âge diminué de 6 : $x-6$.
Équation : $\frac{x}{4}+9=x-6$.

(b) $x+36=4x-24$
$36+24=4x-x$
$60=3x$
$x=20$

(c) $\frac{20}{4}+9=5+9=14$ et $20-6=14$ ✓
Nolan a 20 ans.

(d) Non. $\frac{x}{4}+10=x-6$ donne $x+40=4x-24$, donc $64=3x$ et $x=\frac{64}{3}$.
$\frac{64}{3}$ n'est pas un entier (64 n'est pas divisible par 3), alors que l'âge de Nolan en est un. Avec 10 ans, le problème n'a pas de solution.

Ex. 46 ★★☆ Des équipes au club de sport

(a) $168=2\times 84=2\times 2\times 42=2\times 2\times 2\times 21=2^3\times 3\times 7$
$288=2\times 144=2^5\times 9=2^5\times 3^2$

(b) $\frac{168}{288}=\frac{2^3\times 3\times 7}{2^5\times 3^2}=\frac{7}{2^2\times 3}=\frac{7}{12}$
Les $\frac{7}{12}$ des adhérents nagent.

(c) $288-168=120$ adhérents ne nagent pas.
$120=2^3\times 3\times 5$

(d) Non. $16=2^4$, mais 168 ne contient que 2^3 : $168\div 16=10{,}5$ n'est pas un entier. Les 168 nageurs ne se répartissent pas en 16 équipes.

(e) Le nombre d'équipes doit diviser $168=2^3\times 3\times 7$ et $120=2^3\times 3\times 5$. Le plus grand est $2^3\times 3=24$.
$168\div 24=7$ et $120\div 24=5$.
Le club peut former au plus 24 équipes de 7 nageurs et 5 non-nageurs, soit 12 adhérents par équipe.

Ex. 47 ★★★ Le budget vacances d'Inès

(a) Après le train, il reste $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ des économies.
Hôtel : $\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$.
Inès dépense la moitié de ses économies pour l'hôtel.

(b) Les $\frac{3}{5}$ portent sur le reste, pas sur le total : on ne peut pas les ajouter directement à $\frac{1}{6}$.
Fraction dépensée : $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.
Inès a dépensé les $\frac{2}{3}$ de ses économies.

(c) Équation : $x-\frac{x}{6}-\frac{x}{2}=230$.
$\frac{6x-x-3x}{6}=230$, donc $\frac{2x}{6}=230$, soit $\frac{x}{3}=230$.
$x=690$.
Inès avait 690 € d'économies.

(d) Train : $\frac{690}{6}=115$ €. Reste : $690-115=575$ €.
Hôtel : $\frac{3}{5}\times 575=345$ €.
Il reste $575-345=230$ € ✓.
Inès a payé 115 € pour le train et 345 € pour l'hôtel.

Ex. 48 ★★★ Vrai ou faux et QCM type brevet

(a) Faux. Contre-exemple : $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ sont irréductibles, mais $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}$ n'est pas irréductible ($\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$).

(b) Faux. Contre-exemple avec $a=2$ et $b=3$: l'inverse de $2+3=5$ est $\frac{1}{5}$.
Or $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, et $\frac{5}{6}\neq\frac{1}{5}$.

(c) Faux. L'exposant -2 donne l'inverse, pas l'opposé : $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.
L'exposant est pair, donc le résultat est positif.

(d) Vrai. $16\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2=16\times\frac{9}{16}=9$.
L'égalité est vérifiée, donc $-\frac{3}{4}$ est bien une solution.

(e) Réponse A.
$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, dont l'inverse est $\frac{2}{3}$.
$E=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Ex. 49 ★★★ Trois tarifs à la piscine

(a) Tarif B : $\frac{3}{4}\times 4{,}80=3{,}60$ €.
Tarif C : $\frac{5}{8}\times 4{,}80=3$ €.
Une entrée coûte 3,60 € avec le tarif B et 3 € avec le tarif C.

(b) Tarif A : $4{,}8x$.
Tarif B : $36+3{,}6x$.
Tarif C : $50+3x$.

Ex. 49 **(suite)**

(c) $4{,}8x = 36 + 3{,}6x$

$1{,}2x = 36$

$x = 30$.

Vérification : $4{,}8 \times 30 = 144$ et $36 + 3{,}6 \times 30 = 144$ ✓.

Pour 30 entrées, les tarifs A et B coûtent tous les deux 144 €.

(d) $36 + 3{,}6x = 50 + 3x$

$0{,}6x = 14$

$x = \frac{14}{0{,}6} = \frac{70}{3}$, soit environ $23{,}3$.

Un nombre d'entrées est un nombre entier, et $\frac{70}{3}$ n'est pas entier.

Margot a tort : aucun nombre d'entrées ne donne le même prix avec B et C.

(e) Tarif A : $4{,}8 \times 40 = 192$ €.

Tarif B : $36 + 3{,}6 \times 40 = 180$ €.

Tarif C : $50 + 3 \times 40 = 170$ €.

Ilan doit choisir le tarif C : il paiera 170 €.