Corrigé – Fraction irréductible, problèmes

Mathématiques – Troisième

Arithmétique · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Diviseurs communs ★

Écris la liste des diviseurs communs aux deux nombres, puis donne le plus grand.

a) Diviseurs de 12 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.
Diviseurs de 18 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18.
Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 3 ; 6.
Le plus grand est 6**.**

b) Diviseurs de 20 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20.
Diviseurs de 30 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30.
Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 5 ; 10.
Le plus grand est 10**.**

c) Diviseurs de 14 : 1 ; 2 ; 7 ; 14.
Diviseurs de 21 : 1 ; 3 ; 7 ; 21.
Diviseurs communs : 1 ; 7.
Le plus grand est 7**.**

d) Diviseurs de 16 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16.
Diviseurs de 40 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 40.
Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 4 ; 8.
Le plus grand est 8**.**

e) Diviseurs de 9 : 1 ; 3 ; 9.
Diviseurs de 25 : 1 ; 5 ; 25.
Seul 1 est un diviseur commun : **le plus grand est** 1**.**
(Une fraction $\frac{9}{25}$ serait donc déjà irréductible.)

f) Diviseurs de 24 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.
Diviseurs de 36 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.
Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.
Le plus grand est 12**.**

g) Diviseurs de 35 : 1 ; 5 ; 7 ; 35.
Diviseurs de 49 : 1 ; 7 ; 49.
Diviseurs communs : 1 ; 7.
Le plus grand est 7**.**

h) Diviseurs de 45 : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45.
Diviseurs de 60 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60.
Diviseurs communs : 1 ; 3 ; 5 ; 15.
Le plus grand est 15**.**

Exercice 2 – Simplifier par un diviseur commun ★

Rends la fraction irréductible : cherche le plus grand diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

a) $\dfrac{36}{48} = \dfrac{12 \times 3}{12 \times 4} = \dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{45}{75} = \dfrac{15 \times 3}{15 \times 5} = \dfrac{3}{5}$

c) $\dfrac{28}{42} = \dfrac{14 \times 2}{14 \times 3} = \dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{64}{80} = \dfrac{16 \times 4}{16 \times 5} = \dfrac{4}{5}$

e) $-\dfrac{42}{56} = -\dfrac{14 \times 3}{14 \times 4} = -\dfrac{3}{4}$

f) $\dfrac{121}{143} = \dfrac{11 \times 11}{11 \times 13} = \dfrac{11}{13}$

g) $35 = 5 \times 7$ et $48 = 2^4 \times 3$: aucun facteur premier commun.
$\dfrac{35}{48}$ **est déjà irréductible.**

h) $\dfrac{150}{175} = \dfrac{25 \times 6}{25 \times 7} = \dfrac{6}{7}$

Exercice 3 – Avec les décompositions ★

Décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis rends la fraction

irréductible.

a) $\dfrac{72}{120}$
$= \dfrac{2^3 \times 3^2}{2^3 \times 3 \times 5}$
$= \dfrac{2^3 \times 3 \times 3}{2^3 \times 3 \times 5}$
$= \dfrac{3}{5}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $2^3 \times 3$.

b) $\dfrac{84}{220}$
$= \dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2^2 \times 5 \times 11}$
$= \dfrac{21}{55}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 2^2.

c) $\dfrac{180}{264}$
$= \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2^3 \times 3 \times 11}$
$= \dfrac{2^2 \times 3 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3 \times 2 \times 11}$
$= \dfrac{15}{22}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $2^2 \times 3$.

d) $\dfrac{225}{350}$
$= \dfrac{3^2 \times 5^2}{2 \times 5^2 \times 7}$
$= \dfrac{5^2 \times 3^2}{5^2 \times 2 \times 7}$
$= \dfrac{9}{14}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 5^2.

e) $\dfrac{48}{162}$
$= \dfrac{2^4 \times 3}{2 \times 3^4}$
$= \dfrac{2 \times 3 \times 2^3}{2 \times 3 \times 3^3}$
$= \dfrac{8}{27}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 2×3.

f) $\dfrac{490}{1\,050}$
$= \dfrac{2 \times 5 \times 7^2}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7}$
$= \dfrac{2 \times 5 \times 7 \times 7}{2 \times 5 \times 7 \times 3 \times 5}$
$= \dfrac{7}{15}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $2 \times 5 \times 7$.

g) $\dfrac{156}{234}$
$= \dfrac{2^2 \times 3 \times 13}{2 \times 3^2 \times 13}$
$= \dfrac{2 \times 3 \times 13 \times 2}{2 \times 3 \times 13 \times 3}$
$= \dfrac{2}{3}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $2 \times 3 \times 13$.

h) $\dfrac{1\,001}{1\,430}$
$= \dfrac{7 \times 11 \times 13}{2 \times 5 \times 11 \times 13}$
$= \dfrac{11 \times 13 \times 7}{11 \times 13 \times 2 \times 5}$
$= \dfrac{7}{10}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 11×13.

Exercice 4 – Le plus grand diviseur commun ★★

Décompose chaque nombre, puis trouve leur plus grand diviseur commun.

a) $90 = 2 \times 3^2 \times 5$
$150 = 2 \times 3 \times 5^2$
Facteurs communs, avec le plus petit exposant : 2, 3, 5.
Le plus grand diviseur commun est $2 \times 3 \times 5 = 30$**.**

b) $126 = 2 \times 3^2 \times 7$
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$
Facteurs communs, avec le plus petit exposant : 2, 3, 7.
Le plus grand diviseur commun est $2 \times 3 \times 7 = 42$**.**

c) $168 = 2^3 \times 3 \times 7$
$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$
Facteurs communs, avec le plus petit exposant : 2^2, 3, 7.
Le plus grand diviseur commun est $2^2 \times 3 \times 7 = 84$**.**

d) $240 = 2^4 \times 3 \times 5$
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
Facteurs communs, avec le plus petit exposant : 2^3, 3, 5.
Le plus grand diviseur commun est $2^3 \times 3 \times 5 = 120$**.**

e) $36 = 2^2 \times 3^2$
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$84 = 2^2 \times 3 \times 7$
Facteurs communs, avec le plus petit exposant : 2^2, 3.
Le plus grand diviseur commun est $2^2 \times 3 = 12$**.**

Exercice 5 – Fractions plus grandes ★★

Rends la fraction irréductible. *Un facteur qui n'est pas premier doit d'abord être décomposé.*

a) $\dfrac{2\,310}{3\,465}$
$= \dfrac{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11}{3^2 \times 5 \times 7 \times 11}$
$= \dfrac{3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 2}{3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 3}$
$= \dfrac{2}{3}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $3 \times 5 \times 7 \times 11$.

b) $\dfrac{3\,528}{5\,040}$
$= \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 7^2}{2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7}$
$= \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 7 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 7 \times 2 \times 5}$
$= \dfrac{7}{10}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $2^3 \times 3^2 \times 7$.

c) $\dfrac{4\,875}{6\,500}$
$= \dfrac{3 \times 5^3 \times 13}{2^2 \times 5^3 \times 13}$
$= \dfrac{5^3 \times 13 \times 3}{5^3 \times 13 \times 2^2}$
$= \dfrac{3}{4}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $5^3 \times 13$.

d) $\dfrac{2\,700}{4\,410}$
$= \dfrac{2^2 \times 3^3 \times 5^2}{2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2}$
$= \dfrac{2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2}$
$= \dfrac{30}{49}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $2 \times 3^2 \times 5$.

e) $\dfrac{2^3 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3^3 \times 7}$
$= \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 2 \times 5}{2^2 \times 3^2 \times 3 \times 7}$
$= \dfrac{2 \times 5}{3 \times 7}$
$= \dfrac{10}{21}$

f) $\dfrac{6^2 \times 35}{14 \times 15^2}$
$= \dfrac{(2 \times 3)^2 \times 5 \times 7}{2 \times 7 \times (3 \times 5)^2}$
$= \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7}{2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7}$
$= \dfrac{(2 \times 3^2 \times 5 \times 7) \times 2}{(2 \times 3^2 \times 5 \times 7) \times 5}$
$= \dfrac{2}{5}$

Exercice 6 – Égales ou pas ? ★★

Rends chaque fraction irréductible, puis dis si les deux fractions sont égales.

a) $\dfrac{42}{54}$

$$= \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 3^3}$$
$$= \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 3^2}$$
$$= \frac{7}{9}$$

On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 2×3.

$\dfrac{63}{81}$

$$= \frac{3^2 \times 7}{3^4}$$
$$= \frac{3^2 \times 7}{3^2 \times 3^2}$$
$$= \frac{7}{9}$$

On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 3^2.

Mêmes formes irréductibles : les fractions sont égales.

b) $\dfrac{45}{63}$

$$= \frac{3^2 \times 5}{3^2 \times 7}$$
$$= \frac{5}{7}$$

On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 3^2.

$\dfrac{35}{42}$

$$= \frac{5 \times 7}{2 \times 3 \times 7}$$
$$= \frac{7 \times 5}{7 \times 2 \times 3}$$
$$= \frac{5}{6}$$

On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 7.

Formes irréductibles différentes : les fractions ne sont pas égales.

c) $\dfrac{52}{78}$

$$= \frac{2^2 \times 13}{2 \times 3 \times 13}$$
$$= \frac{2 \times 13 \times 2}{2 \times 13 \times 3}$$
$$= \frac{2}{3}$$

On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 2×13.

$\dfrac{70}{105}$

$$= \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7}$$
$$= \frac{5 \times 7 \times 2}{5 \times 7 \times 3}$$
$$= \frac{2}{3}$$

On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 5×7.

Mêmes formes irréductibles : les fractions sont égales.

d) $\dfrac{66}{88}$
$= \dfrac{2 \times 3 \times 11}{2^3 \times 11}$
$= \dfrac{2 \times 11 \times 3}{2 \times 11 \times 2^2}$
$= \dfrac{3}{4}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : 2×11.
$\dfrac{84}{108}$
$= \dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2^2 \times 3^3}$
$= \dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2^2 \times 3 \times 3^2}$
$= \dfrac{7}{9}$
On a supprimé les facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $2^2 \times 3$.
Formes irréductibles différentes : les fractions ne sont pas égales.

Exercice 7 – Les bouquets ★★★

1. $252 = 14 \times 18$ et $196 = 14 \times 14$: 14 divise les deux nombres.
   Oui, 14 **bouquets de** 18 **roses et** 14 **tulipes.**

2. $252 = 2 \times 126 = 2^2 \times 63 = 2^2 \times 3 \times 21 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.
   $196 = 2 \times 98 = 2^2 \times 49 = 2^2 \times 7^2$.

3. Le nombre de bouquets doit diviser 252 et 196 : on cherche le plus grand diviseur commun.
   Facteurs communs avec le plus petit exposant : 2^2 et 7.
   $2^2 \times 7 = 28$: **au plus** 28 **bouquets.**

4. $252 \div 28 = 9$ et $196 \div 28 = 7$.
   Chaque bouquet contient 9 **roses et** 7 **tulipes.**

Exercice 8 – Le carreleur ★★★

1. En cm, le sol mesure 420 sur 336.
   Sans découpe, on aligne un nombre entier de carreaux dans la longueur et dans la largeur : le côté doit diviser 420 et 336.
   C'est un diviseur commun.

2. $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $336 = 2^4 \times 3 \times 7$.
   Facteurs communs avec le plus petit exposant : 2^2, 3 et 7.
   $2^2 \times 3 \times 7 = 84$: **le côté d'un carreau mesure** 84 **cm.**

3. Dans la longueur : $420 \div 84 = 5$ carreaux ; dans la largeur : $336 \div 84 = 4$ carreaux.
   $5 \times 4 = 20$: **il faut** 20 **carreaux.**

Exercice 9 – Les deux lampes ★★★

1. Elles se retrouvent au bout d'un nombre de secondes multiple de 45 et de 60 : on cherche le plus petit multiple commun.
   $45 = 3^2 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.
   On prend tous les facteurs, avec le plus grand exposant : $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.
   180 s $= 3$ min : **elles s'allument de nouveau ensemble à 20 h 03.**

2. 30 min $= 1\,800$ s et $1\,800 \div 180 = 10$.
   Elles s'allument ensemble à 20 h 00, puis 10 fois de plus (toutes les 3 minutes, jusqu'à 20 h 30).
   Elles s'allument ensemble 11 **fois.**

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) *On ne simplifie jamais une somme : on calcule d'abord le numérateur et le dénominateur.*

$$\begin{aligned}&\frac{3+5}{3+7}\\ &= \frac{8}{10}\\ &= \frac{2\times 4}{2\times 5}\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

b) *Il y a deux facteurs* 2 *en bas : on n'en supprime que deux en haut, il en reste un.*

$$\begin{aligned}&\frac{2^3\times 5}{2^2\times 3}\\ &= \frac{2^2\times 2\times 5}{2^2\times 3}\\ &= \frac{2\times 5}{3}\\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

c) 10 *et* 14 *sont encore tous les deux pairs : la simplification n'est pas finie.*

$\dfrac{30}{42} = \dfrac{2\times 3\times 5}{2\times 3\times 7}$, donc $\dfrac{30}{42} = \dfrac{5}{7}$.

d) *Il y a un seul* 7 *en haut : on ne supprime qu'un des deux* 7 *du bas.*

$$\begin{aligned}&\frac{2^2\times 7}{3\times 7^2}\\ &= \frac{2^2\times 7}{3\times 7\times 7}\\ &= \frac{2^2}{3\times 7}\\ &= \frac{4}{21}\end{aligned}$$

e) *Faire des lots identiques, c'est partager : on cherche un diviseur commun, pas un produit.*

$24 = 2^3 \times 3$ et $40 = 2^3 \times 5$: plus grand diviseur commun $2^3 = 8$.

Au plus 8 **lots**, de 3 stylos et 5 cahiers.

f) *Se retrouver, c'est un multiple commun, pas un diviseur commun.*

$12 = 2^2 \times 3$ et $20 = 2^2 \times 5$: plus petit multiple commun $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Ils se retrouvent dans 60 **min.**

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $\dfrac{4+8}{4+12}$ est égal à :

Réponse C : $\dfrac{3}{4}$

On calcule d'abord : $\dfrac{12}{16} = \dfrac{4\times 3}{4\times 4} = \dfrac{3}{4}$. Barrer les 4 de la somme donne $\dfrac{8}{12}$, c'est faux.

2. La forme irréductible de $\dfrac{105}{135}$ est :

Réponse A : $\dfrac{7}{9}$

$\dfrac{3\times 5\times 7}{3^3\times 5} = \dfrac{7}{3^2} = \dfrac{7}{9}$. $\dfrac{21}{27}$ et $\dfrac{35}{45}$ se simplifient encore.

3. Le plus grand diviseur commun de $2^3\times 3^2\times 5$ et $2^2\times 3^3\times 7$ est :

Réponse D : $2^2\times 3^2$

Facteurs communs 2 et 3, chacun avec le plus petit exposant : $2^2\times 3^2 = 36$.

4. Avec 48 billes rouges et 72 billes bleues, on fait le plus grand nombre possible de sachets identiques. Combien de sachets ?

Réponse B : 24

$48 = 2^4\times 3$ et $72 = 2^3\times 3^2$: plus grand diviseur commun $2^3\times 3 = 24$ (sachets de 2 rouges et 3 bleues).

5. Deux sonneries retentissent ensemble à 9 h 00, puis toutes les 6 min pour l'une et toutes les 8 min pour l'autre. Elles retentissent de nouveau ensemble à :

Réponse D : 9 h 24

Plus petit multiple commun de $6 = 2\times 3$ et $8 = 2^3$: $2^3\times 3 = 24$ min. ($6\times 8 = 48$ est un multiple commun, mais pas le plus petit.)

6. Laquelle de ces fractions est irréductible ?

Réponse A : $\dfrac{91}{120}$

$91 = 7\times 13$ et $120 = 2^3\times 3\times 5$: aucun facteur commun. Les autres se simplifient par 17, 19 et 13.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).