Corrigé – Forme canonique d'un trinôme

Mathématiques – Première spécialité

Second degré · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Reconnaître les trois formes ★

Dis sous quelle forme la fonction est écrite (développée, canonique ou factorisée), puis donne le coefficient a et ce que cette forme permet de lire directement : le sommet, les racines ou l'image de 0.

a) Forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a=3$, $\alpha=2$ et $\beta=5$.
Sommet $S(2\,;\,5)$.
Comme $a>0$, 5 est le minimum de f, atteint en 2.

b) Forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a=-1$.
$x+4=x-(-4)$: $\alpha=-4$ et $\beta=7$.
Sommet $S(-4\,;\,7)$.
Comme $a<0$, 7 est le maximum de g.

c) Forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$, avec $a=2$.
$x+5=x-(-5)$: les racines sont 1 et -5 (solutions de $h(x)=0$).

d) Forme développée ax^2+bx+c, avec $a=-1$, $b=6$ et $c=-2$.
Elle donne directement $k(0)=c=-2$.

e) Forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a=0{,}5$, $\alpha=-1$ et $\beta=-3$.
Sommet $S(-1\,;\,-3)$; $a>0$: minimum -3.

f) C'est un produit de deux facteurs du premier degré : forme factorisée.
Pour faire apparaître a, on écrit $x(4-x)=-x(x-4)$: $a=-1$.
Les racines sont 0 et 4.

g) Forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\beta=0$: $a=-3$, $\alpha=5$.
Sommet $S(5\,;\,0)$, sur l'axe des abscisses ; $a<0$: maximum 0.

h) Forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a=1$, $\alpha=1$ et $\beta=-9$.
Sommet $S(1\,;\,-9)$; $a>0$: minimum -9.

Exercice 2 – Compléter le carré ★

Écris sous forme canonique en complétant le carré : $x^2+2kx=(x+k)^2-k^2$.

a) x^2-8x+3
$=(x-4)^2-4^2+3$
$=(x-4)^2-16+3$
$=(x-4)^2-13$

b) x^2+4x+7
$=(x+2)^2-2^2+7$
$=(x+2)^2-4+7$
$=(x+2)^2+3$

c) $x^2 - 2x - 8$
$= (x-1)^2 - 1^2 - 8$
$= (x-1)^2 - 1 - 8$
$= (x-1)^2 - 9$

d) $x^2 + 12x$
$= (x+6)^2 - 6^2$
$= (x+6)^2 - 36$

e) $x^2 - 5x + 1$
$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1$
$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{4}{4}$
$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$

f) $x^2 + x$
$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

g) $x^2 - 14x + 49$
$= (x-7)^2 - 7^2 + 49$
$= (x-7)^2 - 49 + 49$
$= (x-7)^2$

h) $t^2 + 3t - 1$
$= \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1$
$= \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{4}{4}$
$= \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$

Exercice 3 – Le sommet par les formules ★

Calcule $\alpha = -\frac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$, et écris $f(x)$ sous forme canonique.

a) $\alpha = -\frac{-12}{2 \times 2}$
$= 3$
$\beta = f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 11$
$= 18 - 36 + 11$
$= -7$
Donc $f(x) = 2\,(x-3)^2 - 7$.

b) $\alpha = -\dfrac{4}{2\times(-1)}$
$= 2$
$\beta = f(2) = -2^2 + 4\times 2 + 1$
$= -4 + 8 + 1$
$= 5$
Donc $f(x) = -(x-2)^2 + 5$.

c) $\alpha = -\dfrac{6}{2\times 3}$
$= -1$
$\beta = f(-1) = 3\times(-1)^2 + 6\times(-1) - 2$
$= 3 - 6 - 2$
$= -5$
Donc $f(x) = 3(x+1)^2 - 5$.

d) $\alpha = -\dfrac{-8}{2\times(-2)}$
$= -2$
$\beta = f(-2) = (-2)\times(-2)^2 - 8\times(-2) + 3$
$= -8 + 16 + 3$
$= 11$
Donc $f(x) = -2(x+2)^2 + 11$.

e) $\alpha = -\dfrac{-3}{2\times 1}$
$= \dfrac{3}{2}$
$\beta = f(\dfrac{3}{2}) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3\times\left(\dfrac{3}{2}\right) + 2$
$= \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 2$
$= -\dfrac{1}{4}$
Donc $f(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$.

f) $\alpha = -\dfrac{-4}{2\times 4}$
$= \dfrac{1}{2}$
$\beta = f(\dfrac{1}{2}) = 4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4\times\left(\dfrac{1}{2}\right) - 3$
$= 1 - 2 - 3$
$= -4$
Donc $f(x) = 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 4$.

g) $\alpha = -\dfrac{12}{2\times(-3)}$
$= 2$
$\beta = f(2) = (-3)\times 2^2 + 12\times 2$
$= -12 + 24$
$= 12$
Donc $f(x) = -3(x-2)^2 + 12$.

Exercice 4 – Compléter le carré quand $a \neq 1$ ★★

Écris sous forme canonique : mets a en facteur dans les deux premiers termes, complète le carré, puis redistribue a.

a) $2x^2 + 8x + 5$

$$\begin{aligned}
&= 2\left(x^2 + 4x\right) + 5 \\
&= 2\left[\,(x+2)^2 - 4\right] + 5 \\
&= 2\,(x+2)^2 - 8 + 5 \\
&= 2\,(x+2)^2 - 3
\end{aligned}$$

b) $-x^2 + 6x - 4$

$$\begin{aligned}
&= -\left(x^2 - 6x\right) - 4 \\
&= -\left[\,(x-3)^2 - 9\right] - 4 \\
&= -\,(x-3)^2 + 9 - 4 \\
&= -\,(x-3)^2 + 5
\end{aligned}$$

c) $3x^2 - 9x + 1$

$$\begin{aligned}
&= 3\left(x^2 - 3x\right) + 1 \\
&= 3\Big[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\Big] + 1 \\
&= 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} + \frac{4}{4} \\
&= 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{23}{4}
\end{aligned}$$

d) $-2x^2 - 6x + 1$

$$\begin{aligned}
&= -2\left(x^2 + 3x\right) + 1 \\
&= -2\Big[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\Big] + 1 \\
&= -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} + \frac{2}{2} \\
&= -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

e) $\frac{1}{2}x^2 - x + 3$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x\right) + 3 \\
&= \frac{1}{2}\left[\,(x-1)^2 - 1\right] + 3 \\
&= \frac{1}{2}\,(x-1)^2 - \frac{1}{2} + 3 \\
&= \frac{1}{2}\,(x-1)^2 + \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

f) $5x^2 + 20x + 20$

$$\begin{aligned}
&= 5\left(x^2 + 4x\right) + 20 \\
&= 5\left[\,(x+2)^2 - 4\right] + 20 \\
&= 5\,(x+2)^2 - 20 + 20 \\
&= 5\,(x+2)^2
\end{aligned}$$

Exercice 5 – Variations et extremum ★★

Donne l'axe de symétrie de la parabole, dresse le tableau de variations de la fonction et donne son extremum.

a) $\alpha = -\dfrac{-10}{2 \times 1}$
$= 5$
$\beta = f(5) = 5^2 - 10 \times 5 + 21$
$= 25 - 50 + 21$
$= -4$

Axe de symétrie : la droite d'équation $x = 5$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

$a = 1 > 0$: f est décroissante sur $]-\infty\,;\,5]$ et croissante sur $[5\,;\,+\infty[$.
Son minimum vaut -4, atteint en 5.

b) $\alpha = -\dfrac{6}{2 \times (-2)}$
$= \dfrac{3}{2}$
$\beta = f(\dfrac{3}{2}) = (-2) \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 6 \times \left(\dfrac{3}{2}\right) + 8$
$= -\dfrac{9}{2} + 9 + 8$
$= \dfrac{25}{2}$

Axe de symétrie : la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\frac{25}{2}$	$\searrow$	

$a = -2 < 0$: f est croissante sur $]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}]$ et décroissante sur $[\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty[$.
Son maximum vaut $\dfrac{25}{2}$, atteint en $\dfrac{3}{2}$.

c) On développe d'abord : $-(x+3)(x-1)$

$= -\left(x^2 - x + 3x - 3\right)$

$= -x^2 - 2x + 3$

$\alpha = -\dfrac{-2}{2\times(-1)}$

$= -1$

$\beta = f(-1) = -(-1)^2 - 2\times(-1) + 3$

$= -1 + 2 + 3$

$= 4$

Axe de symétrie : la droite d'équation $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	

$a = -1 < 0$: f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.

Son maximum vaut 4, atteint en -1.

d) $\alpha = -\dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{4}}$

$= -2$

$\beta = f(-2) = \dfrac{1}{4}\times(-2)^2 + (-2)$

$= 1 - 2$

$= -1$

Axe de symétrie : la droite d'équation $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

$a = \dfrac{1}{4} > 0$: f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-2]$ et croissante sur $[-2\,;\,+\infty[$.

Son minimum vaut -1, atteint en -2.

e) $\alpha = -\dfrac{-4}{2 \times 1}$
$= 2$
$\beta = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 1$
$= 4 - 8 + 1$
$= -3$
On calcule aussi les valeurs aux bornes de l'intervalle :
$f(-1) = (-1)^2 - 4 \times (-1) + 1$
$= 1 + 4 + 1$
$= 6$
$f(5) = 5^2 - 4 \times 5 + 1$
$= 25 - 20 + 1$
$= 6$
Axe de symétrie : $x = 2$.

x	-1		2		5
f	6	$\searrow$	-3	$\nearrow$	6

Sur $[-1\,;\,5]$, le minimum vaut -3 (atteint en 2) et le maximum vaut 6 (atteint en -1 et en 5).

Exercice 6 – Lire une parabole ★★

1. Le sommet est le point le plus haut de la courbe (elle est tournée vers le bas).
   On lit $S(1\,;\,2)$: abscisse 1, ordonnée 2.
   L'axe de symétrie est la droite verticale qui passe par S : $x = 1$.

2. On cherche les points où la courbe coupe l'axe des abscisses : en $x = -1$ et en $x = 3$.
   $S = \{-1\,;\,3\}$.
   Ils sont symétriques par rapport à l'axe $x = 1$: $1 - 2 = -1$ et $1 + 2 = 3$.

3. Le sommet est $S(1\,;\,2)$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = 2$: $f(x) = a(x-1)^2 + 2$.
   La courbe passe par $(3\,;\,0)$, donc $f(3) = 0$:
   $a\,(3-1)^2 + 2 = 0$
   $\iff 4a + 2 = 0 \quad$ *($(3-1)^2 = 4$)*
   $\iff 4a = -2 \quad$ *(on retranche 2)*
   $\iff a = -\dfrac{1}{2} \quad$ *(on divise par 4)*
   $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

   $a < 0$: c'est cohérent avec une parabole tournée vers le bas.

4. $-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$
$=-\dfrac{1}{2}\left(x^2-2x+1\right)+2$
$=-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}+2$
$=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}$
Donc $f(0)=\dfrac{3}{2}=1{,}5$.
Sur le graphique, la courbe coupe l'axe des ordonnées entre 1 et 2, au milieu : c'est bien 1,5.

5. On calcule les valeurs aux bornes avec la forme canonique :
$f(-2)=-\dfrac{1}{2}(-2-1)^2+2$
$=-\dfrac{9}{2}+2$
$=-\dfrac{5}{2}$
$f(4)=-\dfrac{1}{2}(4-1)^2+2$
$=-\dfrac{9}{2}+\dfrac{4}{2}$
$=-\dfrac{5}{2}$

x	-2		1		4
f	$-\frac{5}{2}$	↗	2	↘	$-\frac{5}{2}$

$a<0$: f croît jusqu'au sommet, puis décroît.

Exercice 7 – Retrouver l'expression d'une parabole ★★★

Détermine l'expression de la fonction du second degré f, sous forme canonique puis développée.

a) Le sommet donne $\alpha=2$ et $\beta=-3$: $f(x)=a(x-2)^2-3$.
A est sur la parabole, donc $f(4)=5$:
$a(4-2)^2-3=5$
$\iff 4a-3=5$ *($(4-2)^2=4$)*
$\iff 4a=8$ *(on ajoute 3)*
$\iff a=2$ *(on divise par 4)*
$S=\{2\}$

Donc $f(x)=2(x-2)^2-3$.
$f(x)=2(x-2)^2-3$
$=2\left(x^2-4x+4\right)-3$
$=2x^2-8x+8-3$
$=2x^2-8x+5$

b) Le sommet donne $f(x) = a(x+1)^2 + 4$ (car $\alpha = -1$).
L'origine est sur la parabole, donc $f(0) = 0$:
$a\left(0+1\right)^2 + 4 = 0$
$\iff a + 4 = 0 \quad \textit{((}(0+1)^2 = 1\textit{))}$
$\iff a = -4 \quad \textit{(on retranche } 4\textit{)}$
$S = \{-4\}$

Donc $f(x) = -4(x+1)^2 + 4$.
$f(x) = -4\left(x+1\right)^2 + 4$
$= -4\left(x^2 + 2x + 1\right) + 4$
$= -4x^2 - 8x - 4 + 4$
$= -4x^2 - 8x$

c) La parabole est symétrique par rapport à son axe : le sommet est à égale distance des deux racines.
$\alpha = \dfrac{-2+6}{2}$
$= 2$
Donc $f(x) = a(x-2)^2 - 8$, et $f(6) = 0$:
$a\left(6-2\right)^2 - 8 = 0$
$\iff 16a - 8 = 0 \quad \textit{((}(6-2)^2 = 16\textit{))}$
$\iff 16a = 8 \quad \textit{(on ajoute } 8\textit{)}$
$\iff a = \dfrac{1}{2} \quad \textit{(on divise par } 16\textit{)}$
$S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Donc $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 - 8$.
$f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x-2\right)^2 - 8$
$= \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 4\right) - 8$
$= \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2 - 8$
$= \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 6$

d) Ici $a = 1$, et le sommet donne $\alpha = 3$, $\beta = -1$: $f(x) = (x-3)^2 - 1$.
$f(x) = \left(x-3\right)^2 - 1$
$= x^2 - 6x + 9 - 1$
$= x^2 - 6x + 8$
On identifie avec $x^2 + bx + c$: $b = -6$ et $c = 8$.

Exercice 8 – Choisir la bonne forme ★★★

1. On développe chaque écriture et on retrouve $f(x)$:
   $2(x-1)^2 - 8$
   $= 2\left(x^2 - 2x + 1\right) - 8$
   $= 2x^2 - 4x + 2 - 8$
   $= 2x^2 - 4x - 6$
   $2(x+1)(x-3)$
   $= 2\left(x^2 - 3x + x - 3\right)$
   $= 2\left(x^2 - 2x - 3\right)$
   $= 2x^2 - 4x - 6$

2. Avec la forme canonique, $x-1$ devient $\sqrt{3}$:
   $f(1+\sqrt{3}) = 2\left(1+\sqrt{3}-1\right)^2 - 8$
   $= 2\left(\sqrt{3}\right)^2 - 8$
   $= 2 \times 3 - 8$
   $= -2$

3. Forme factorisée : un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.
   $2(x+1)(x-3) = 0$
   $\iff x+1 = 0$ ou $x-3 = 0$
   $\iff x = -1$ ou $x = 3$
   $S = \{-1\,;\,3\}$

4. Forme développée : le -6 disparaît.
   $2x^2 - 4x - 6 = -6$
   $\iff 2x^2 - 4x = 0$ *(on ajoute 6)*
   $\iff 2x(x-2) = 0$ *(on factorise par $2x$)*
   $\iff x = 0$ ou $x = 2$
   $S = \{0\,;\,2\}$

5. Forme canonique :
   $2(x-1)^2 - 8 = 10$
   $\iff 2(x-1)^2 = 18$ *(on ajoute 8)*
   $\iff (x-1)^2 = 9$ *(on divise par 2)*
   $\iff x - 1 = -3$ ou $x - 1 = 3$ *(deux nombres ont pour carré 9)*
   $\iff x = -2$ ou $x = 4$
   $S = \{-2\,;\,4\}$

   Pour tout réel x, $2(x-1)^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant -8$, avec égalité pour $x = 1$.
   Le minimum de f vaut -8, atteint en 1.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque calcul d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris le bon résultat.

a) *En écrivant* $(x+4)^2$*, on a ajouté* $4^2 = 16$ *: il faut le retrancher.*

$$\begin{aligned} & x^2 + 8x + 1 \\ &= (x+4)^2 - 16 + 1 \\ &= (x+4)^2 - 15 \end{aligned}$$

b) *La formule est* $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ *: le signe moins a été oublié.*

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{12}{2 \times 3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

c) *En redistribuant* 2 *sur le crochet, on retranche* $2 \times 9 = 18$*, et non* 9*.*

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 12x + 1 \\ &= 2\left(x^2 + 6x\right) + 1 \\ &= 2\left[(x+3)^2 - 9\right] + 1 \\ &= 2(x+3)^2 - 18 + 1 \\ &= 2(x+3)^2 - 17 \end{aligned}$$

d) *Le signe* $-$ *devant le crochet change* -1 *en* $+1$*.*

$$\begin{aligned} & -x^2 + 2x + 5 \\ &= -\left(x^2 - 2x\right) + 5 \\ &= -\left[(x-1)^2 - 1\right] + 5 \\ &= -(x-1)^2 + 1 + 5 \\ &= -(x-1)^2 + 6 \end{aligned}$$

e) $-(-3)^2 = -9$ *: on calcule le carré avant d'appliquer le signe* $-$*.*

$$\begin{aligned} & -(-3)^2 - 6 \times (-3) + 2 \\ &= -9 + 18 + 2 \\ &= 11 \end{aligned}$$

f) $a = -2 < 0$ *: la parabole est tournée vers le bas, c'est un maximum.*

Pour tout réel x, $-2(x-1)^2 \leqslant 0$, donc $f(x) \leqslant 3$.

f admet un maximum égal à 3, atteint en 1.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. La forme canonique de $x^2 - 6x + 4$ est :

Réponse C : $(x-3)^2 - 5$

$x^2 - 6x + 4 = (x-3)^2 - 9 + 4 = (x-3)^2 - 5$.

2. Le sommet de la parabole d'équation $y = 4(x+1)^2 - 7$ est :

Réponse A : $(-1\,;\,-7)$

$x + 1 = x - (-1)$: $\alpha = -1$ et $\beta = -7$.

3. La fonction $f(x) = -4x^2 + 8x - 5$:

Réponse D : admet un maximum en 1

$\alpha = -\dfrac{8}{2 \times (-4)} = 1$, et $a = -4 < 0$: c'est un maximum.

4. Pour quelle question la forme $f(x) = 2(x - 1)(x + 4)$ est-elle la plus utile ?

Réponse B : résoudre $f(x) = 0$

La forme factorisée donne les racines 1 et -4 par la règle du produit nul.

5. La parabole de sommet $S(2\,;\,1)$ passant par $A(3\,;\,4)$ a pour équation :

Réponse D : $y = 3(x - 2)^2 + 1$

$y = a(x - 2)^2 + 1$ et $4 = a \times 1^2 + 1$, donc $a = 3$.

6. L'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 2x^2 + 10x - 1$ est la droite d'équation :

Réponse A : $x = -\dfrac{5}{2}$

$\alpha = -\dfrac{10}{2 \times 2} = -\dfrac{5}{2}$; l'axe est la droite verticale $x = \alpha$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).