1. Rappels de 5e : une grandeur en fonction d'une autre

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : je remplace la lettre**

(a) $A = 9 \times 4 = 36$. L'aire vaut 36 cm².

(b) $P = 4 \times 2{,}5 = 10$. Le périmètre vaut 10 cm.

(c) $P = 6 + 3 \times 7 = 6 + 21 = 27$. On paie 27 €. La multiplication passe d'abord : surtout pas 9×7.

(d) $T = 20 - 2 \times 3 = 20 - 6 = 14$. Il fait 14 °C.

(e) $N = 5 \times (-2) - 8 = -10 - 8 = -18$. On obtient -18.

(f) $N = (1{,}5 + 3) \times 2 = 4{,}5 \times 2 = 9$. On obtient 9.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : la question inverse**

(a) La dernière opération est « $+\,7$ ». Je la défais d'abord : $43 - 7 = 36$, puis $36 \div 4 = 9$. Vérification : $4 \times 9 + 7 = 43$ ✓. Le nombre de départ est 9.

(b) Je défais « $+\,9$ » : $64 - 9 = 55$, puis « $\times\,5$ » : $55 \div 5 = 11$. Vérification : $9 + 5 \times 11 = 64$ ✓. Donc $n = 11$.

(c) La dernière opération est « $\times\,2$ » : $34 \div 2 = 17$, puis $17 - 5 = 12$. Vérification : $(12 + 5) \times 2 = 34$ ✓. Le nombre de départ est 12.

(d) $19 - 4 = 15$, puis $15 \div 2 = 7{,}5$. Vérification : $4 + 2 \times 7{,}5 = 19$ ✓. On a parcouru 7,5 km.

(e) Non. Je vérifie : $2 \times 1{,}5 + 9 = 3 + 9 = 12$, pas 21. Lina a défait « $\times\,2$ » en premier ($21 \div 2 = 10{,}5$, puis $10{,}5 - 9 = 1{,}5$). Il faut commencer par la dernière opération : $21 - 9 = 12$, puis $12 \div 2 = 6$. Vérification : $2 \times 6 + 9 = 21$ ✓.

Ex. 3 ★★☆ **Une salle de répétition avec forfait**

(a) Le prix dépend de la durée : P est en fonction de h. La grandeur de départ est h. Formule : $P = 40 + 10 \times h$.

(b) $40 + 10 \times 3 = 70$; $40 + 10 \times 0 = 40$; $40 + 10 \times 1{,}5 = 55$; $40 + 10 \times 5 = 90$. Les prix sont donc 70, 40, 55 et 90 €.

(c) Non. Le prix est juste ($40 + 10 \times 4 = 80$ €), mais la grandeur de départ (la durée) se place en abscisse et le prix en ordonnée. Le bon point est $(4; 80)$: 80 est l'image de 4.

Ex. 3 (suite)

(d) Faux. Pour 0 h, on paie déjà 40 € : le point $(0; 40)$ n'est pas l'origine. Les points sont alignés, mais pas avec l'origine. Exemple : pour 6 h, $40 + 10 \times 6 = 100$ €, et non $2 \times 70 = 140$ €.

(e) Je défais à l'envers : $125 - 40 = 85$, puis $85 \div 10 = 8{,}5$. Vérification : $40 + 10 \times 8{,}5 = 125$ ✓. Le groupe a répété 8,5 h : 8,5 est l'antécédent de 125.

Ex. 4 ★★☆ **La température au cours d'une journée**

(a) 11 h, c'est 3 h après 8 h. Je pars de 3 sur l'axe horizontal, je monte jusqu'au point, puis je lis l'ordonnée : le point est pile entre les graduations 10 et 12. Il faisait donc 11 °C : 11 est l'image de 3.

(b) Je pars de 13 sur l'axe vertical : deux points sont à cette hauteur, ceux d'abscisses 4 et 6. Il a fait 13 °C à 12 h et à 14 h : 13 a deux antécédents, 4 et 6.

(c) Le point le plus haut a pour ordonnée 14 et pour abscisse 5. Le maximum vaut 14 °C. Il est atteint 5 h après 8 h, donc à 13 h.

(d) À 8 h (abscisse 0), je lis 4 °C. $14 - 4 = 10$: la température a monté de 10 °C.

Ex. 5 ★★★ **Deux loueurs de kayaks**

(a) Chez Rivière : $P = 7 \times h$. Chez Cascade : $P = 15 + 4 \times h$. Pour $h = 3$: Rivière $7 \times 3 = 21$, donc 21 € ; Cascade $15 + 4 \times 3 = 15 + 12 = 27$, donc 27 €.

(b) La dernière opération est « $+15$ » : je la défais en premier. $47 - 15 = 32$, puis $32 \div 4 = 8$. Vérification : $15 + 4 \times 8 = 15 + 32 = 47$ ✓. Sacha a loué le kayak 8 h : 8 est l'antécédent de 47.

(c) Faux. Chez Rivière : $7 \times 2 = 14$ € et $7 \times 4 = 28$ €, et $28 = 2 \times 14$: c'est vrai. Chez Cascade : $15 + 4 \times 2 = 23$ € et $15 + 4 \times 4 = 31$ €, mais $2 \times 23 = 46$, pas 31. À cause du forfait de 15 € payé dès 0 h, le prix chez Cascade n'est pas proportionnel à la durée.

(d) Pour 5 h : Rivière $7 \times 5 = 35$ €, Cascade $15 + 4 \times 5 = 35$ € : c'est le même prix. Pour 6 h : Rivière $7 \times 6 = 42$ €, Cascade $15 + 4 \times 6 = 39$ € : Cascade est moins cher. Ensuite, chaque heure de plus ajoute 7 € chez Rivière mais seulement 4 € chez Cascade, donc l'écart se creuse. Cascade est moins cher à partir de 6 h.

Ex. 6 ★★★ **Une bougie qui se consume**

(a) C'est la hauteur qui dépend du temps : on choisit le moment de la mesure, et on obtient la hauteur. La hauteur est donc en fonction du temps. La grandeur obtenue se place en ordonnée (sur l'axe vertical), la grandeur de départ en abscisse.

(b) Je pars de 1 sur l'axe des abscisses, je monte jusqu'au point, puis je lis son ordonnée. Le point est entre les graduations 14 et 16, un peu au-dessus du milieu (15) : la hauteur est d'environ 15,5 cm.

(c) Elle inverse les rôles. Le temps est la grandeur de départ et la hauteur la grandeur obtenue : 8 est l'image de 4, et 4 est un antécédent de 8. Sur le graphique, c'est le point $(4; 8)$: abscisse 4, ordonnée 8.

(d) Pour $t = 2$: $H = 18 - 2{,}5 \times 2 = 18 - 5 = 13$, et le graphique donne bien 13 cm ✓. Pour $t = 6$: $H = 18 - 2{,}5 \times 6 = 18 - 15 = 3$, et le graphique donne bien 3 cm ✓. La formule convient pour ces deux points.

(e) La bougie a perdu $18 - 0{,}5 = 17{,}5$ cm. Elle perd 2,5 cm par heure, donc $17{,}5 \div 2{,}5 = 7$. Vérification : $18 - 2{,}5 \times 7 = 18 - 17{,}5 = 0{,}5$ ✓. Au bout de 7 h, la bougie mesure 0,5 cm.

Ex. 7 ★★★ **Un programme de calcul à défaire**

(a) Avec -7 : $-7 + 5 = -2$, puis $(-2) \times 3 = -6$, puis $-6 - 6 = -12$. On obtient -12. Avec 2,5 : $2{,}5 + 5 = 7{,}5$, puis $7{,}5 \times 3 = 22{,}5$, puis $22{,}5 - 6 = 16{,}5$. On obtient 16,5.

(b) $R = 3 \times (x + 5) - 6$ (les parenthèses sont nécessaires : on ajoute 5 avant de multiplier). Contrôle avec $x = 4$: formule $3 \times (4 + 5) - 6 = 27 - 6 = 21$; programme $4 + 5 = 9$, $9 \times 3 = 27$, $27 - 6 = 21$ ✓.

(c) Vérification avec 11 : $11 + 5 = 16$, $16 \times 3 = 48$, $48 - 6 = 42$. On obtient 42 et non 48 : Maël a oublié de défaire la dernière opération « -6 ». Il faut commencer par elle : $48 + 6 = 54$, puis $54 \div 3 = 18$, puis $18 - 5 = 13$. Vérification : $13 + 5 = 18$, $18 \times 3 = 54$, $54 - 6 = 48$ ✓. Le nombre de départ est 13 : on dit que 13 est un antécédent de 48.

(d) Vrai. En développant : $3 \times (x + 5) - 6 = 3x + 15 - 6 = 3x + 9$. Contrôle avec $x = -7$: $3 \times (-7) + 9 = -21 + 9 = -12$, comme à la première question ✓.

(e) Avec la formule de Zoé, je défais à l'envers : $0 - 9 = -9$, puis $(-9) \div 3 = -3$. Vérification avec le programme : $-3 + 5 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $6 - 6 = 0$ ✓. Il faut choisir -3 : l'image de -3 est 0.

2. *Produire une formule*

Ex. 8 ★☆☆ **Traduire une phrase par une formule**

(a) Avec 4 : $2 \times 4 = 8$. Je remplace 4 par x : $2 \times x = 2x$.

(b) Avec 4 : $4 \times 4 = 16$. Je remplace : $x \times x = x^2$. Attention : $2x$ n'est pas x^2 (pour 4 : 8 et 16).

(c) Avec 4 : $4 \times 4 \times 4 = 64$. Je remplace : $x \times x \times x = x^3$.

(d) Avec 4 : $(4 + 6) \times 3 = 30$. Je remplace : $(x + 6) \times 3 = 3x + 18$. Les parenthèses sont obligatoires.

(e) Avec 4 : $4 \times 3 + 6 = 18$. Je remplace : $x \times 3 + 6 = 3x + 6$. Ce n'est pas le même résultat que la question précédente.

(f) Avec 4 : $3 \times 4^2 = 3 \times 16 = 48$. Je remplace : $3 \times x^2 = 3x^2$.

(g) Avec 4 : $(3 \times 4)^2 = 12^2 = 144$. Je remplace : $(3x)^2 = 3x \times 3x = 9x^2$.

Ex. 9 ★☆☆ **Périmètre, aire ou volume ?**

(a) $P = x + x + x + x = 4x$, en cm.

(b) $A = x \times x = x^2$, en cm². Ce n'est pas $4x$: pour $x = 3$, l'aire vaut 9 cm² et le périmètre 12 cm.

(c) $P = 2 \times x + 2 \times 7 = 2x + 14$, en cm.

(d) $A = x \times 7 = 7x$, en cm².

(e) $P = 3 \times (x + 2) = 3x + 6$, en cm.

(f) $V = x \times x \times 4 = 4x^2$, en cm³.

Ex. 10 ★★☆ **Au bowling**

(a) $8 + 4{,}5 \times 3 = 8 + 13{,}5 = 21{,}5$. Pour 3 parties, le prix est de 21,50 €.

(b) Le prix dépend du nombre de parties ; les 8 € ne changent pas. Je choisis comme variable n, le nombre de parties. Je remplace 3 par n : $p = 8 + 4{,}5n$.

(c) Avec $n = 1$, les deux formules donnent bien 12,5. Avec $n = 2$: Malo trouve $(8 + 4{,}5) \times 2 = 25$ €, mais le vrai prix est $8 + 4{,}5 \times 2 = 17$ €. Malo a tort : il compte les chaussures à chaque partie. Les deux formules sont égales pour $n = 1$ seulement.

(d) Je défais les opérations : $30{,}5 - 8 = 22{,}5$, puis $22{,}5 \div 4{,}5 = 5$. Vérification : $8 + 4{,}5 \times 5 = 30{,}5$. Inès a joué 5 parties : 5 est l'antécédent de 30,5.

Ex. 11 ★★☆ **La boîte en carton**

(a) Longueur : $24 - 2 \times 2 = 20$ cm ; largeur : $18 - 2 \times 2 = 14$ cm ; hauteur : 2 cm. Volume : $20 \times 14 \times 2 = 560$ cm³.

(b) Léa a tort : on enlève un carré à chaque bout de la longueur, donc deux fois x. Pour $x = 2$, elle trouverait 22 cm au lieu de 20 cm. La bonne longueur est $24 - 2x$.

(c) Longueur $24 - 2x$, largeur $18 - 2x$, hauteur x : $V = (24 - 2x) \times (18 - 2x) \times x$.

(d) À la main : longueur $24 - 6 = 18$ cm, largeur $18 - 6 = 12$ cm, hauteur 3 cm, donc $18 \times 12 \times 3 = 648$ cm³. Formule : $(24 - 2 \times 3) \times (18 - 2 \times 3) \times 3 = 648$ ✓

(e) $(24 - 2x)(18 - 2x) = 432 - 48x - 36x + 4x^2 = 4x^2 - 84x + 432$. Sam a raison : les deux formules sont égales pour toutes les valeurs de x, et l'aire est en cm².

Ex. 12 ★★★ **Deux programmes, une seule formule ?**

(a) Lina : $(2 + 3) \times 2 - 6 = 5 \times 2 - 6 = 10 - 6 = 4$. Hugo : $2 \times 2 = 4$. Pour 2, les deux programmes donnent 4 : l'image de 2 est 4 dans les deux cas.

(b) Je contrôle avec 4. Lina : $(4 + 3) \times 2 - 6 = 14 - 6 = 8$. Hugo : $4 \times 4 = 16$. Comme $8 \neq 16$, c'est faux : un seul nombre ne suffit pas, il faut contrôler avec une autre valeur.

(c) On multiplie tout le résultat $x + 3$ par 2 : il faut des parenthèses. Avec la formule de Yanis, $x = 2$ donne $2 + 6 - 6 = 2$ au lieu de 4. La bonne formule est $R = (x + 3) \times 2 - 6 = 2x + 6 - 6$, donc $R = 2x$.

(d) Il a tort. Le programme multiplie le nombre par lui-même : $x \times x = x^2$. Pour $x = -1{,}5$: $(-1{,}5)^2 = 2{,}25$, alors que $2 \times (-1{,}5) = -3$. Comme $2{,}25 \neq -3$, $2x$ n'est pas x^2. La bonne formule est x^2.

(e) Lina $(2x)$: $2 \times 3 = 6$; $2 \times (-1) = -2$; $2 \times 0 = 0$; $2 \times 0{,}5 = 1$. Hugo (x^2) : $3^2 = 9$; $(-1)^2 = 1$; $0^2 = 0$; $0{,}5^2 = 0{,}25$. Dans le tableau, seul 0 a la même image dans les deux programmes. Les formules $2x$ et x^2 sont différentes : elles ne donnent le même résultat que pour quelques valeurs (0, et 2 vu plus haut).

Ex. 13 ★★★ **Deux salles d'escalade**

(a) Vertige : $18 + 6 \times 4 = 18 + 24 = 42$ €. Prise : $9 \times 4 = 36$ €.

Ex. 13 **(suite)**

(b) La grandeur de départ est le nombre de séances ; je l'appelle n (c'est la variable). Vertige : $p = 18 + 6n$. Prise : $p = 9n$. Je contrôle avec $n = 1$: $18 + 6 = 24$ € et 9 €, c'est bien ce qu'on paie pour une séance.

(c) Vertige $(18 + 6n)$: $18 + 6 \times 8 = 66$; $18 + 6 \times 2 = 30$; $18 + 6 \times 5 = 48$. Prise $(9n)$: $9 \times 8 = 72$; $9 \times 2 = 18$; $9 \times 5 = 45$. Pour 2 séances, Prise est moins chère (18 € < 30 €) ; pour 8 séances, c'est Vertige (66 € < 72 €).

(d) Je résous $18 + 6n = 9n$, donc $18 = 3n$, donc $n = 6$. Vérification : $18 + 6 \times 6 = 54$ € et $9 \times 6 = 54$ €. Les deux salles coûtent le même prix pour 6 séances.

(e) Vertige : $18 + 6n = 90$, donc $6n = 72$, donc $n = 12$. Prise : $9n = 90$, donc $n = 10$. Avec 90 €, Sofia fait 12 séances à Vertige (12 est l'antécédent de 90) et 10 à Prise. Elle fera le plus de séances à la salle Vertige.

Ex. 14 ★★★ **Le cadre photo**

(a) La bordure s'ajoute des deux côtés. Longueur : $15 + 2 + 2 = 19$ cm. Largeur : $10 + 2 + 2 = 14$ cm.

(b) Jade n'a compté la bordure que d'un seul côté. Il y en a une à gauche et une à droite, donc $L = 15 + 2x$. De même, $l = 10 + 2x$. Contrôle avec $x = 2$: $15 + 2 \times 2 = 19$ ✓.

(c) $P = 2 \times (15 + 2x + 10 + 2x) = 2 \times (25 + 4x)$, donc $P = 50 + 8x$, en cm. Contrôle avec $x = 1$: le cadre mesure 17 cm sur 12 cm et $2 \times (17 + 12) = 58$ cm ; la formule donne $50 + 8 \times 1 = 58$ ✓.

(d) À la main : $19 \times 14 = 266$ et $15 \times 10 = 150$, donc $266 - 150 = 116$ cm². Formule : $4 \times 2^2 + 50 \times 2 = 16 + 100 = 116$ ✓. C'est une aire, donc en cm², pas en cm comme le périmètre.

(e) $4 \times 0{,}5^2 + 50 \times 0{,}5 = 1 + 25 = 26$; $4 \times 3^2 + 50 \times 3 = 36 + 150 = 186$; $4 \times 1^2 + 50 \times 1 = 4 + 50 = 54$; $4 \times 1{,}5^2 + 50 \times 1{,}5 = 9 + 75 = 84$. Je lis la colonne où l'aire vaut 54 : 1 est un antécédent de 54. Ambre doit choisir une bordure de 1 cm.

3. *Image et antécédent par le calcul*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : calculer des images**

(a) $6 - 4 \times (-3) = 6 + 12 = 18$: la multiplication passe en premier, et $-4 \times (-3) = 12$. L'image de -3 est 18.

(b) $(-4)^2 - 7 = 16 - 7 = 9$. L'image de -4 est 9.

(c) $3 \times 2{,}5 - 1 = 7{,}5 - 1 = 6{,}5$. L'image de 2,5 est 6,5.

Ex. 15 **(suite)**

(d) $6 \times \frac{2}{3} + 1 = 4 + 1 = 5$. L'image de $\frac{2}{3}$ est 5.

(e) $10 - (-2)^2 = 10 - 4 = 6$ (et pas $10 + 4$: on soustrait le carré, qui vaut 4). L'image de -2 est 6.

(f) $2 \times (-0{,}5)^2 = 2 \times 0{,}25 = 0{,}5$. L'image de $-0{,}5$ est 0,5.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : le vocabulaire image et antécédent**

(a) 19 est l'image de 4. 4 est un antécédent de 19.

(b) Le nombre de départ est -2 et le nombre obtenu est 7.

(c) L'image de -6 est 0.

(d) Léna a inversé les deux mots : 15 est l'image de 3, et 3 est un antécédent de 15.

(e) $8^2 = 64$ mais aussi $(-8)^2 = 64$. Le nombre 64 a deux antécédents, 8 et -8 : il faut écrire « un antécédent de 64 est 8 ».

(f) Non : un nombre a une seule image. Si les deux résultats sont différents, l'un des deux élèves s'est trompé dans son calcul.

Ex. 17 ★★☆ **Antécédent : je résous, puis je vérifie**

(a) On multiplie x par 4, puis on ajoute 7 : $y = 4x + 7$.

(b) $4 \times (-2{,}5) + 7 = -10 + 7 = -3$. L'image de $-2{,}5$ est -3.

(c) $4x + 7 = 31$, donc $4x = 24$, donc $x = 6$. Vérification : $4 \times 6 + 7 = 24 + 7 = 31$ ✓. L'antécédent de 31 est 6.

(d) $4x + 7 = 0$, donc $4x = -7$, donc $x = -1{,}75$. Vérification : $4 \times (-1{,}75) + 7 = -7 + 7 = 0$ ✓. L'antécédent de 0 est $-1{,}75$.

(e) Sami a calculé l'image de 15 au lieu de chercher un nombre de départ. On résout $4x + 7 = 15$, donc $4x = 8$, donc $x = 2$. Vérification : $4 \times 2 + 7 = 15$ ✓. L'antécédent de 15 est 2.

Ex. 18 ★★☆ **Avec un carré : aucun, un ou plusieurs antécédents**

(a) $2^2 - 5 = 4 - 5 = -1$; $(-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$; $0^2 - 5 = -5$; $1{,}5^2 - 5 = 2{,}25 - 5 = -2{,}75$. On écrit -1 ; 4 ; -5 ; $-2{,}75$.

(b) $3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$. L'image de 3 est 4. D'après le tableau, l'image de -3 est aussi 4 : le nombre 4 a au moins deux antécédents, 3 et -3.

(c) Noé a oublié les parenthèses : il a calculé $-(4^2)$. Correction : $(-4)^2 - 5 = 16 - 5 = 11$. L'image de -4 est 11.

Ex. 18 **(suite)**

(d) Il faut $x^2 - 5 = -5$, c'est-à-dire $x^2 = 0$. Seul 0 a pour carré 0. Le nombre -5 a un seul antécédent : 0.

(e) Il faudrait $x^2 - 5 = -8$, c'est-à-dire $x^2 = -3$. Or un carré n'est jamais négatif. Le nombre -8 n'a aucun antécédent.

Ex. 19 ★★★ **Les erreurs de Malo**

(a) Malo a calculé de gauche à droite, mais la multiplication passe avant la soustraction. $8 - 3 \times (-2) = 8 - (-6) = 8 + 6 = 14$. L'image de -2 est 14.

(b) $3 \times (-1{,}2) = -3{,}6$, et soustraire $-3{,}6$ revient à ajouter 3,6 : Malo a oublié ce signe. $8 - 3 \times (-1{,}2) = 8 - (-3{,}6) = 8 + 3{,}6 = 11{,}6$. L'image de $-1{,}2$ est 11,6.

(c) Je vérifie : $8 - 3 \times (-7) = 8 + 21 = 29$, et pas -13. Le résultat de Malo est donc faux. Il a oublié le signe $-$ devant $3x$. En enlevant 8 des deux côtés : $-3x = -21$, donc $x = 7$. Vérification : $8 - 3 \times 7 = 8 - 21 = -13$ ✓. Un antécédent de -13 est 7.

(d) Faux. La première partie est vraie : $8 - 3 \times 0 = 8$, donc 8 est l'image de 0. Mais l'image de 8 est $8 - 3 \times 8 = 8 - 24 = -16$, et pas 0 : 8 n'est donc pas un antécédent de 0. Malo a inversé les deux mots : c'est 0 qui est un antécédent de 8.

Ex. 20 ★★★ **Un programme avec un carré : formule, calcul, graphique**

(a) On soustrait 2 d'abord, puis on met le résultat au carré : il faut des parenthèses, $y = (x - 2)^2$. Avec le programme : $6 - 2 = 4$, puis $4^2 = 16$. Avec la formule d'Ilyes : $6^2 - 2 = 36 - 2 = 34$. Les deux résultats sont différents, donc la formule d'Ilyes est fausse : il met au carré avant de soustraire.

(b) $(-3 - 2)^2 = (-5)^2 = 25$ (et pas -25 : le carré d'un nombre négatif est positif). L'image de -3 est 25. $(2{,}4 - 2)^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$. L'image de 2,4 est 0,16.

(c) Je pars de 4 sur l'axe des ordonnées. Je lis deux points à cette hauteur, d'abscisses 0 et 4. Vérification : $(0 - 2)^2 = (-2)^2 = 4$ ✓ et $(4 - 2)^2 = 2^2 = 4$ ✓. 0 et 4 sont deux antécédents de 4.

(d) Sur le graphique, les points vont par paires de même ordonnée, de part et d'autre de l'abscisse 2 (1 et 3, 0 et 4). 2,4 est à 0,4 à droite de 2. Je prends 1,6, à 0,4 à gauche. Vérification : $(1{,}6 - 2)^2 = (-0{,}4)^2 = 0{,}16$ ✓. 1,6 et 2,4 sont deux antécédents de 0,16.

Ex. 21 ★★★ **Louer un kayak : deux tarifs**

(a) Tarif A : $y = 2{,}5x + 7$. Tarif B : $y = 4x + 1$.

(b) Tarif A : $2{,}5 \times 1{,}5 + 7 = 3{,}75 + 7 = 10{,}75$. Tarif B : $4 \times 1{,}5 + 1 = 6 + 1 = 7$. L'image de 1,5 est 10,75 pour le tarif A et 7 pour le tarif B : une location de 1,5 h coûte 10,75 € avec A et 7 € avec B.

(c) Je résous $2{,}5x + 7 = 27$, donc $2{,}5x = 20$, donc $x = 20 \div 2{,}5 = 8$. Vérification : $2{,}5 \times 8 + 7 = 20 + 7 = 27$ ✓. Un antécédent de 27 est 8 : Yanis a loué le kayak pendant 8 h.

(d) Je résous $2{,}5x + 7 = 4x + 1$, donc $7 - 1 = 4x - 2{,}5x$, donc $6 = 1{,}5x$, donc $x = 4$. Vérification : $2{,}5 \times 4 + 7 = 17$ et $4 \times 4 + 1 = 17$ ✓. Pour 4 h, les deux tarifs coûtent 17 €.

(e) 30 min, c'est une demi-heure : 2 h 30 min font 2,5 h, et pas 2,30 h. Léa a calculé l'image de 2,3 : $4 \times 2{,}3 + 1 = 10{,}2$. Le bon calcul : $4 \times 2{,}5 + 1 = 10 + 1 = 11$. L'image de 2,5 est 11 : la location coûte 11 €.

4. *Le tableau de valeurs, le tableur*

Ex. 22 ★☆☆ **Lire un tableau dans les deux sens**

(a) Je pars de -1 sur la première ligne et je descends : je lis -5. L'image de -1 est -5.

(b) Je cherche 7 sur toute la deuxième ligne, sans m'arrêter au premier : il apparaît deux fois, sous 3 et sous -4. Le nombre 7 a donc deux antécédents dans le tableau : 3 et -4.

(c) Non. 1 est sur la deuxième ligne : en remontant, je lis 2. Donc 2 est un antécédent de 1 : c'est l'image de 2 qui vaut 1. Malo a lu de bas en haut. L'image de 1 n'est pas dans le tableau, car 1 n'est pas sur la première ligne.

(d) Non, elle a tort de conclure. 0 n'est pas sur la deuxième ligne : le tableau ne donne donc aucun antécédent de 0. Mais on n'a pas la formule : un nombre de départ absent du tableau peut avoir 0 pour image. On ne peut pas savoir.

Ex. 23 ★☆☆ **Compléter un tableau avec des négatifs**

(a) $y = 5 - 2 \times (-3)^2 = 5 - 2 \times 9 = 5 - 18 = -13$.

(b) $y = 5 - 2 \times 0{,}5^2 = 5 - 2 \times 0{,}25 = 5 - 0{,}5 = 4{,}5$.

(c) $y = 5 - 2 \times (-1)^2 = 5 - 2 \times 1 = 3$.

(d) $y = 5 - 2 \times 1^2 = 5 - 2 \times 1 = 3$. C'est le même nombre que pour -1, car $(-1)^2 = 1^2 = 1$. Le nombre 3 a donc deux antécédents dans ce tableau : -1 et 1.

Ex. 23 (suite)

(e) Lina a mis les parenthèses au mauvais endroit : elle a calculé $-3^2 = -9$. Il faut remplacer x par (-3) : $(-3)^2 = 9$. On obtient $5 - 2 \times 9 = 5 - 18 = -13$, et pas 23.

Ex. 24 ★★☆ **Le programme de Noé au tableur**

(a) Le tableur ne connaît pas « x » : il faut utiliser le nom de la cellule du nombre de départ. En B2, on tape =5*B1-8.

(b) En recopiant vers la droite, B1 devient C1 puis D1. En D2, le tableur utilise =5*D1-8.

(c) B2 : $5 \times (-2) - 8 = -10 - 8 = -18$. C2 : $5 \times 1{,}5 - 8 = 7{,}5 - 8 = -0{,}5$. D2 : $5 \times 4 - 8 = 20 - 8 = 12$.

(d) Je défais les opérations : $37 + 8 = 45$, puis $45 \div 5 = 9$. Vérification : $5 \times 9 - 8 = 37$. Il faut écrire 9 : c'est l'antécédent de 37.

Ex. 25 ★★☆ **Retrouver la formule d'un tableau**

(a) Pour 0 : $0^2 + 0 + 1 = 1$, et pour 2 : $2^2 + 2 + 1 = 7$, ça marche. Mais pour -1 : $(-1)^2 + (-1) + 1 = 1$, et le tableau donne -2. Sami a tort : deux colonnes ne suffisent pas.

(b) $3 \times 0 + 1 = 1$; $3 \times 2 + 1 = 7$; $3 \times (-1) + 1 = -2$; $3 \times 5 + 1 = 16$. La formule marche pour toutes les colonnes : Jade a raison.

(c) $y = 3 \times 10 + 1 = 31$. L'image de 10 est 31.

(d) Je résous $3x + 1 = -11$: $3x = -12$, donc $x = -4$. Vérification : $3 \times (-4) + 1 = -11$. L'antécédent de -11 est -4.

Ex. 26 ★★★ **La boîte d'Inès au tableur**

(a) La hauteur de la boîte est le côté du carré découpé : x cm. Sur chaque côté de la feuille, on enlève x cm à chaque bout. Le fond est donc un carré de côté $20 - 2x$ cm. Volume = longueur × largeur × hauteur, donc $V = x \times (20 - 2x) \times (20 - 2x)$.

(b) Quand on recopie, le tableur remplace B1 par le nom de la cellule de la même colonne. En D2, on lit donc =D1*(20-2*D1)*(20-2*D1).

(c) B2 : $1 \times 18 \times 18 = 324$. C2 : $2 \times 16 \times 16 = 512$. D2 : $3 \times 14 \times 14 = 588$. Le tableur affiche 324, 512 et 588.

Ex. 26 **(suite)**

(d) 3,5 n'est pas dans le tableau, alors j'utilise la formule : $3{,}5 \times (20-7) \times (20-7) = 3{,}5 \times 169 = 591{,}5$. L'image de 3,5 est 591,5, et $591{,}5 > 588$. Inès a tort : 588 est le plus grand volume du tableau, mais pas le plus grand volume possible.

(e) J'utilise la formule avec $x = 5$: $5 \times (20-10) \times (20-10) = 5 \times 100 = 500$. L'image de 5 est 500, donc 5 est un antécédent de 500.

Ex. 27 ★★★ **Les températures relevées par Hugo**

(a) Je pars de 14 sur la ligne des heures et je lis en dessous : 15. L'image de 14 est 15 : à 14 h, il faisait 15 °C.

(b) Je pars de 9 sur la deuxième ligne et je parcours toute la ligne. 9 apparaît deux fois, sous 10 et sous 18. Tom s'est arrêté trop tôt. Il faut écrire : « 9 a deux antécédents dans le tableau, 10 et 18. »

(c) Non. 12 n'est pas dans le tableau, et c'est un tableau de mesures sans formule. On peut seulement estimer : à 10 h il fait 9 °C, à 14 h il fait 15 °C. À 12 h, il faisait sans doute entre 9 °C et 15 °C, par exemple environ 12 °C.

(d) Il faut tester toutes les colonnes. Pour 6 : $2 \times 6 - 8 = 4$, ça convient. Pour 14 : $2 \times 14 - 8 = 20$, mais le tableau donne 15. La formule ne convient pas : une seule colonne vérifiée ne suffit pas.

Ex. 28 ★★★ **Deux tarifs de location de vélos**

(a) La formule commence par = et utilise le nom de la cellule de la durée, B1 (pas x). En B2 : =8+2*B1. En B3 : =4*B1.

(b) Je fais un calcul par colonne. Tarif A : $8 + 2 \times 3 = 14$; $8 + 2 \times 1 = 10$; $8 + 2 \times 5 = 18$. Tarif B : $4 \times 3 = 12$; $4 \times 1 = 4$; $4 \times 5 = 20$.

(c) Je résous $8 + 2x = 4x$. J'enlève $2x$ des deux côtés : $8 = 2x$, donc $x = 4$. Vérification : $8 + 2 \times 4 = 16$ et $4 \times 4 = 16$. Pour 4 h, les deux tarifs coûtent 16 €.

(d) Tarif A : $8 + 2x = 22$ donne $2x = 14$, donc $x = 7$. 7 est l'antécédent de 22 : elle peut louer 7 h. Tarif B : $4x = 22$ donne $x = 5{,}5$, qui n'est pas une durée entière. $4 \times 5 = 20$ € et $4 \times 6 = 24$ €, plus que 22 €. Elle peut louer 5 h au maximum.

5. *Construire une représentation graphique*

Ex. 29 ★☆☆ **Du tableau aux points**

(a) L'abscisse est le nombre de départ, -2. L'ordonnée est son image, 7. Le point est $(-2; 7)$.

(b) Non. L'abscisse est le nombre de départ, 0, et l'ordonnée est son image, 3. Le bon point est $(0; 3)$: Inès a inversé nombre de départ et image.

(c) Les ordonnées sont les images. Elles vont de -5 à 7, soit un écart de $7 - (-5) = 12$. Avec 1 carreau pour 10 unités, les quatre points tiendraient sur à peine plus d'un carreau de hauteur et on ne pourrait pas les distinguer. Une unité adaptée est 1 carreau pour 1 unité.

(d) Non. L'image de 4 est -5, donc le point est $(4; -5)$. Son ordonnée est négative : il se place sous l'axe des abscisses.

(e) Un point de l'axe des abscisses a une ordonnée égale à 0. Le nombre obtenu 0 correspond au nombre de départ 1,5, donc le point est $(1{,}5; 0)$.

(f) Je calcule l'image de -1 : $3 - 2 \times (-1) = 3 + 2 = 5$. L'ordonnée du point est 4, et non 5 : le point $(-1; 4)$ n'appartient pas à la représentation graphique. Le point d'abscisse -1 est $(-1; 5)$.

(g) Ici, le nombre de départ peut prendre toutes les valeurs, même décimales, comme 1,5. Entre deux points placés, il y a donc d'autres points de la représentation : je les relie par une courbe régulière. Un nombre de cahiers ne prend que des valeurs entières : entre 2 et 3 cahiers, il n'y a rien, donc on ne relie pas les points.

Ex. 30 ★☆☆ **Le point est-il sur la représentation ?**

(a) $4^2 - 3 \times 4 = 16 - 12 = 4$. L'image de 4 est bien l'ordonnée 4 : A appartient à la représentation.

(b) $(-2)^2 - 3 \times (-2) = 4 + 6 = 10$. L'image de -2 est 10, pas -2 : B n'appartient pas à la représentation.

(c) $0{,}5^2 - 3 \times 0{,}5 = 0{,}25 - 1{,}5 = -1{,}25$. C'est bien l'ordonnée : C appartient à la représentation.

(d) $10^2 - 3 \times 10 = 100 - 30 = 70 \neq 5$, donc D n'appartient pas à la représentation. Léo a placé (image ; nombre). Comme $5^2 - 3 \times 5 = 10$, le bon point est $(5; 10)$.

(e) L'ordonnée de E est l'image de -1 : $(-1)^2 - 3 \times (-1) = 1 + 3 = 4$. Le point est $E(-1; 4)$.

Ex. 30 **(suite)**

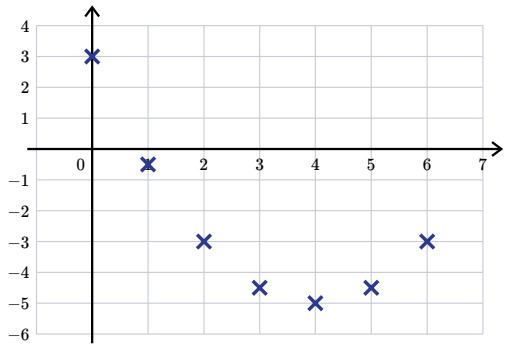
(f) $1{,}5^2 - 3 \times 1{,}5 = 2{,}25 - 4{,}5 = -2{,}25$. L'image de 1,5 est $-2{,}25$: c'est H qui appartient à la représentation, pas G. Ce point est sous l'axe des abscisses.

Ex. 31 ★★☆ **Une nuit en montagne**

(a) $0{,}5 \times 2^2 - 4 \times 2 + 3 = 2 - 8 + 3 = -3$; $0{,}5 \times 4^2 - 4 \times 4 + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$; $0{,}5 \times 6^2 - 4 \times 6 + 3 = 18 - 24 + 3 = -3$. Les images de 2, 4 et 6 sont -3, -5 et -3.

(b) Plusieurs images sont négatives : ces points se placent sous l'axe des abscisses. La plus petite image est -5, donc l'axe doit descendre au moins jusqu'à -5.

(c) Je place les points (heure ; température) :



Oui, on peut les relier par une courbe régulière, car le temps prend toutes les valeurs entre 0 et 6.

(d) Le point le plus bas est $(4; -5)$. Le minimum est -5 °C. Il est atteint pour $h = 4$, donc à 6 h du matin (2 h + 4 h).

Ex. 32 ★★☆ **Parties de bowling**

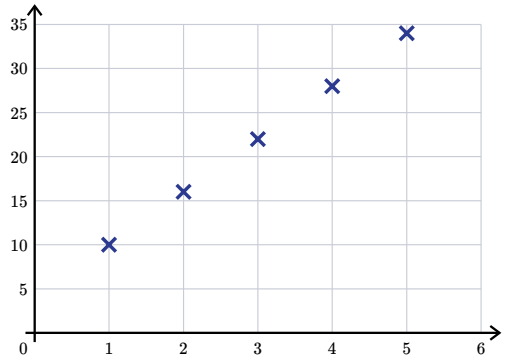
(a) $6 \times 4 + 4 = 28$; $6 \times 1 + 4 = 10$; $6 \times 5 + 4 = 34$. Les images de 4, 1 et 5 sont 28, 10 et 34.

(b) $6 \times 2 + 4 = 16$: l'image de 2 est 16. L'abscisse doit être le nombre de parties et l'ordonnée le prix. Tom a inversé les deux : le bon point est $(2; 16)$.

(c) Les prix vont de 10 à 34. Avec un pas de 1, il faudrait 35 graduations. Avec un pas de 10, on placerait mal 16, 22 ou 28. Je choisis un pas de 5, avec un axe de 0 à 35.

Ex. 32 **(suite)**

(d) Je place les points (nombre de parties ; prix) :



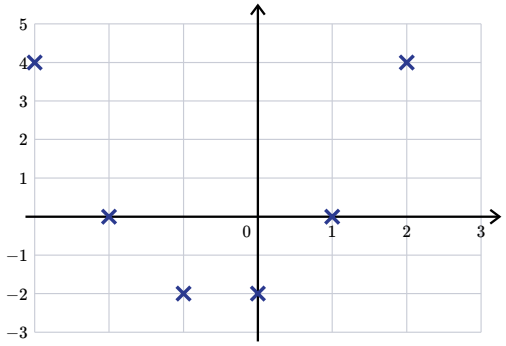
On ne relie pas les points : le nombre de parties est un nombre entier, on ne joue pas 2,5 parties.

Ex. 33 ★★★ **Les axes de Malo**

(a) Pour -3 : $(-3)^2 + (-3) - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$. Pour -1 : $(-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$. Les deux images trouvées par Malo sont justes : l'image de -3 est 4, l'image de -1 est -2.

(b) Malo a placé le point (image ; nombre de départ) : il a inversé les axes. L'abscisse est le nombre de départ et l'ordonnée est son image. Les bons points sont donc $(-3; 4)$ et $(2; 4)$.

(c) Je place les points (nombre de départ ; image) :



Les points $(-1; -2)$ et $(0; -2)$ ont une ordonnée négative : je les place sous l'axe des abscisses, 2 unités plus bas.

(d) L'image de $-0{,}5$ est $(-0{,}5)^2 + (-0{,}5) - 2 = 0{,}25 - 0{,}5 - 2 = -2{,}25$. Elle ne vaut pas -2, donc B n'appartient pas à la représentation. Le point $(-0{,}5; -2{,}25)$ est sous B : la courbe descend plus bas que -2 entre -1 et 0. Le nombre de départ peut prendre toutes les valeurs : je relie les points par une courbe régulière, pas par un segment.

Ex. 33 **(suite)**

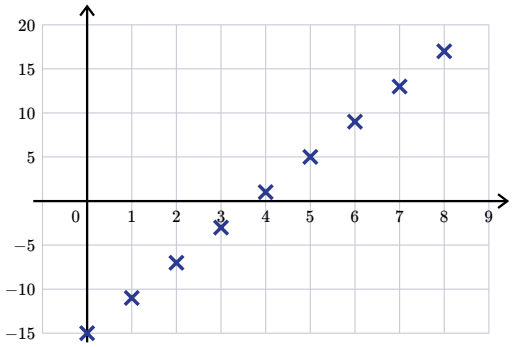
(e) Je pars de 2 sur l'axe des ordonnées et je vais horizontalement. Je rencontre la courbe deux fois : une fois entre -3 et -2, une fois entre 1 et 2. Je lis les abscisses : environ $-2{,}6$ et environ 1,6 (on accepte $-2{,}5$ et 1,5). Le nombre 2 a deux antécédents, environ $-2{,}6$ et 1,6
(valeurs approchées).

Ex. 34 ★★★ **Les bracelets de Noé**

(a) Les ventes rapportent $4 \times n$ euros, puis on enlève les 15 € du matériel : $B = 4n - 15$. Contrôle : pour 2 bracelets, Noé encaisse $4 \times 2 = 8$ € et $8 - 15 = -7$ €. La formule donne $4 \times 2 - 15 = -7$ ✓

(b) $4 \times 5 - 15 = 5$; $4 \times 0 - 15 = -15$; $4 \times 8 - 15 = 17$; $4 \times 3 - 15 = -3$. Ligne du bas : 5, -15, 17, -3.

(c) D'après le tableau, les bénéfices vont de -15 à 17. Avec un pas de 1, il faudrait 33 graduations : le graphique serait trop haut. Avec un pas de 10, on placerait mal les points. Je prends un pas de 5. Je calcule les autres images : -11 pour 1, 1 pour 4, 9 pour 6 et 13 pour 7 (-7 pour 2 est déjà connu).



Pour $n = 0$ à 3, le bénéfice est négatif : ces points sont sous l'axe des abscisses.

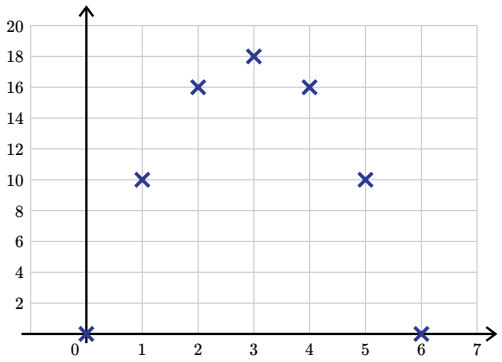
(d) Non. n est un nombre de bracelets, donc un nombre entier : on ne relie pas les points. Le calcul $4 \times 3{,}75 - 15 = 0$ ne veut rien dire ici, car on ne vend pas 3,75 bracelets. Avec 3 bracelets, Noé perd 3 € ; avec 4, il gagne 1 €. Il doit donc vendre au moins 4 bracelets pour ne pas perdre d'argent.

(e) On cherche l'antécédent de 25 : $4n - 15 = 25$, donc $4n = 40$ et $n = 10$. Vérification : $4 \times 10 - 15 = 25$ ✓ L'antécédent de 25 est 10 : Noé doit vendre 10 bracelets.

Ex. 35 ★★★ **La fusée à eau de Hugo**

(a) $12 \times 4 - 2 \times 4^2 = 48 - 32 = 16$; $12 \times 1 - 2 \times 1^2 = 12 - 2 = 10$; $12 \times 6 - 2 \times 6^2 = 72 - 72 = 0$; $12 \times 3 - 2 \times 3^2 = 36 - 18 = 18$. Ligne du bas : 16, 10, 0, 18.

(b) $12 \times 0 - 2 \times 0^2 = 0$; $12 \times 2 - 2 \times 2^2 = 24 - 8 = 16$; $12 \times 5 - 2 \times 5^2 = 60 - 50 = 10$. Je place les points (temps ; hauteur) :



Le temps prend toutes les valeurs entre 0 et 6 s : je trace une courbe régulière qui passe par ces points.

(c) L'image de 2,5 est $12 \times 2{,}5 - 2 \times 2{,}5^2 = 30 - 2 \times 6{,}25 = 30 - 12{,}5 = 17{,}5$. Elle ne vaut pas 17, donc P n'appartient pas à la représentation : le point de la courbe d'abscisse 2,5 est $(2{,}5\,;\,17{,}5)$.

(d) Je pars de 10 sur l'axe des ordonnées et je vais horizontalement. Je rencontre deux points, d'abscisses 1 et 5. Les antécédents de 10 sont 1 et 5 : la fusée est à 10 m de haut deux fois, 1 s après le lancement en montant, puis 5 s après en redescendant.

(e) Le point le plus haut de la représentation est $(3\,;\,18)$. La hauteur maximale est d'environ 18 m. La fusée l'atteint environ 3 s après le lancement. C'est une lecture graphique, donc une valeur approchée ; le calcul de l'image de 3 donne bien 18.

6. *Lire un graphique : images, antécédents, maximum*

Ex. 36 ★☆☆ **Lire sur des points**

(a) Je pars de -2 sur l'axe des abscisses, je monte jusqu'au point et je lis son ordonnée : l'image de -2 est 2.

(b) Je pars de 3 sur l'axe des abscisses et je descends jusqu'au point, qui est sous l'axe des abscisses. Son ordonnée est au milieu entre -2 et -4 : l'image de 3 est environ -3.

Ex. 36 **(suite)**

(c) Je pars de 5 sur l'axe des ordonnées, à mi-hauteur entre 4 et 6, et je vais horizontalement : je rencontre deux points, d'abscisses -1 et 1. Le nombre 5 a deux antécédents : -1 et 1.

(d) Non, Zoé a inversé. Le point d'abscisse 0 a pour ordonnée 6 : c'est l'image de 0 qui est 6, donc 0 est un antécédent de 6. Le nombre 6 n'est pas une abscisse de ce graphique (elles vont de -3 à 3) : on ne peut pas y lire l'image de 6.

(e) Non. Le point le plus haut a pour ordonnée 6, donc aucun point n'est à la hauteur 8 : sur ce graphique, 8 n'a aucun antécédent.

Ex. 37 ★☆☆ **La température d'une journée**

(a) Je pars de 9 sur l'axe des abscisses, je monte jusqu'au point et je lis son ordonnée, entre 6 et 8 : il fait environ 7 °C à 9 h.

(b) Le point le plus haut a pour ordonnée environ 15 : la température maximale est d'environ 15 °C. Elle est atteinte à 13 h
(l'abscisse de ce point).

(c) Non. Hugo a lu le dernier point, pas le plus bas. Le point le plus bas est le premier : abscisse 8, ordonnée 4. La température minimale est d'environ 4 °C, atteinte à 8 h.

(d) Je pars de 11 sur l'axe des ordonnées, entre 10 et 12, et je vais horizontalement : je rencontre deux points, d'abscisses 10 et 15. Maëlle a relevé environ 11 °C à 10 h et à 15 h.

Ex. 38 ★★☆ **Deux bougies**

(a) Les deux points sont à la même hauteur pour l'abscisse 4 ; je lis 12 sur l'axe des ordonnées. Par le calcul : $24 - 3 \times 4 = 12$ et $16 - 4 = 12$. Au bout de 4 h, les deux bougies mesurent 12 cm.

(b) Pour 0, 1, 2 et 3 h, le point rouge est au-dessus du point bleu : la bougie rouge est plus haute avant 4 h. Après 4 h, c'est la bleue qui est plus haute.

(c) Le point le plus bas du premier graphique est sur l'axe des abscisses, au niveau de la graduation 0 : son ordonnée est 0. Le minimum est 0 (la valeur). Il est atteint pour le nombre de départ 1
(l'abscisse du point).

Ex. 38 **(suite)**

(d) Faux. Je pars de 6 sur l'axe des ordonnées et je vais horizontalement : aucun point du premier graphique n'est à cette hauteur (les ordonnées sont 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9). Sur ce graphique, 6 n'a aucun antécédent.

Ex. 39 ★★☆ **Formule et graphique**

(a) Sami a inversé les axes. Le point d'abscisse 4 a pour ordonnée 5 : l'image de 4 est 5 (et 4 est un antécédent de 5). Par le calcul : $4^2 - 4 \times 4 + 5 = 16 - 16 + 5 = 5$ ✓

(b) Le point le plus bas a pour ordonnée 1 et pour abscisse 2 : le minimum est 1, atteint pour $x = 2$. Par le calcul : $2^2 - 4 \times 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$ ✓

(c) Je pars de 10 sur l'axe des ordonnées et je vais horizontalement : je rencontre deux points, d'abscisses -1 et 5. Les antécédents de 10 sont -1 et 5.
Vérification : $(-1)^2 - 4 \times (-1) + 5 = 1 + 4 + 5 = 10$ ✓

(d) $2{,}5^2 - 4 \times 2{,}5 + 5 = 6{,}25 - 10 + 5 = 1{,}25$. L'image de 2,5 est 1,25. Il n'y a pas de point d'abscisse 2,5, et une lecture ne donne qu'une valeur approchée : la formule donne la valeur exacte.

Ex. 40 ★★★ **La fusée à eau**

(a) Je pars de 4 sur l'axe des abscisses, je monte jusqu'au point et je lis l'ordonnée : 40. L'image de 4 est 40 : au bout de 4 s, la fusée est à 40 m de haut. Par le calcul : $30 \times 4 - 5 \times 4^2 = 120 - 80 = 40$ ✓

(b) Nina a donné l'abscisse au lieu de l'ordonnée. Le point le plus haut est $(3; 45)$: le maximum est 45 m, atteint au bout de 3 s. Par le calcul : $30 \times 3 - 5 \times 3^2 = 90 - 45 = 45$ ✓

(c) Je pars de 25 sur l'axe des ordonnées et je vais horizontalement : je rencontre deux points, d'abscisses 1 et 5. Les antécédents de 25 sont 1 et 5 : la fusée est à 25 m de haut à 1 s (en montant) et à 5 s (en descendant). Vérification : $30 \times 1 - 5 \times 1^2 = 25$ et $30 \times 5 - 5 \times 5^2 = 150 - 125 = 25$ ✓

(d) Vrai. La fusée part du sol à 0 s (point $(0; 0)$), atteint son maximum de 45 m à 3 s, puis revient au sol à 6 s (point $(6; 0)$) : 3 s pour monter et $6 - 3 = 3$ s pour redescendre. Vérification : $30 \times 6 - 5 \times 6^2 = 180 - 180 = 0$ ✓

Ex. 41 ★★★ **Deux formules, deux représentations**

(a) Avec $y = x^2 - 3$: $4^2 - 3 = 16 - 3 = 13$. Avec $y = 2x$: $2 \times 4 = 8$. Le point d'abscisse 4 a pour ordonnée 8 sur la représentation 1 et 13 sur la représentation 2. Donc la représentation 1 correspond à $y = 2x$ et la représentation 2 à $y = x^2 - 3$.

(b) Non. Sur la représentation 2, je pars de 1 sur l'axe des ordonnées et je vais horizontalement : je rencontre deux points, d'abscisses -2 et 2. Le nombre 1 a deux antécédents, -2 et 2. Vérification : $(-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$ et $2^2 - 3 = 1$ ✓

(c) Non. Sur la représentation 1, aucun point n'a pour ordonnée 5 : les points voisins sont à 4 et 6. Par le calcul, je résous $2x = 5$, donc $x = 5 \div 2 = 2{,}5$. L'antécédent de 5 est 2,5. Il n'est pas sur le graphique, car on n'a placé que des nombres de départ entiers.

(d) Les deux représentations ont un point commun aux abscisses -1 et 3. Pour -1 : $(-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$ et $2 \times (-1) = -2$ ✓. Pour 3 : $3^2 - 3 = 6$ et $2 \times 3 = 6$ ✓. Les deux formules donnent le même nombre pour -1 (le nombre -2) et pour 3 (le nombre 6).

(e) Je compare les ordonnées pour chaque abscisse : pour 0, $0 > -3$; pour 1, $2 > -2$; pour 2, $4 > 1$. Pour les nombres de départ 0, 1 et 2 (entre -1 et 3), le point de $y = 2x$ est au-dessus. Pour -2 et 4, c'est le point de $y = x^2 - 3$ qui est au-dessus.

Ex. 42 ★★★ **L'enclos de Mehdi**

(a) Le périmètre est 20 m, donc deux côtés voisins mesurent ensemble $20 \div 2 = 10$ m. L'autre côté mesure $10 - x$ m et l'aire est $A = x \times (10 - x)$.

(b) Je pars de 16 sur l'axe des ordonnées et je vais horizontalement : je rencontre deux points, d'abscisses 2 et 8. Les antécédents de 16 sont 2 et 8. Vérification : $2 \times (10 - 2) = 2 \times 8 = 16$ et $8 \times (10 - 8) = 16$ ✓. L'enclos mesure 2 m sur 8 m.

(c) L'horizontale d'ordonnée 20 passe entre les points $(2; 16)$ et $(3; 21)$, plus près de 21, puis entre $(7; 21)$ et $(8; 16)$. On lit environ 2,8 et 7,2 : ce sont des valeurs approchées. Contrôle : $2{,}8 \times (10 - 2{,}8) = 2{,}8 \times 7{,}2 = 20{,}16$, proche de 20 ✓

Ex. 42 (suite)

(d) Faux. Le point le plus haut est $(5; 25)$: le maximum de l'aire est 25 m², atteint pour $x = 5$ (un carré de 5 m de côté : $5 \times 5 = 25$). Aucun point n'atteint l'ordonnée 30 : le nombre 30 n'a aucun antécédent, et l'enclos ne peut pas mesurer 30 m².

7. *Problèmes*

Ex. 43 ★☆☆ **Location de kayak : image ou antécédent ?**

(a) La grandeur de départ est la durée t, en heures. La grandeur obtenue est le prix P, en euros.

(b) $6 \times 3 + 4 = 22$: 3 est un antécédent de 22.

(c) $6 \times 5 + 4 = 34$: pour une location de 5 h, on paie 34 €.

(d) $6 \times 1 + 4 = 10$: le nombre de départ 1 donne 10. La phrase juste est « 10 est l'image de 1 ».

(e) Non. $6 \times 6 + 4 = 36 + 4 = 40$: c'est 40 qui est l'image de 6, donc 6 est un antécédent de 40. Sami a inversé l'image et l'antécédent. On paie 40 € pour 6 h.

Ex. 44 ★☆☆ **Une image dans son contexte**

(a) 2 h du matin, c'est 6 h après 20 h, donc $h = 6$. $T = 8 - 1{,}5 \times 6 = 8 - 9 = -1$. À 2 h du matin, il fait -1 °C.

(b) $P = 4 \times 7 + 6 = 28 + 6 = 34$. Le périmètre mesure 34 cm.

(c) $V = 5 \times 2{,}4^2 = 5 \times 5{,}76 = 28{,}8$. Le volume de l'aquarium est 28,8 dm³.

(d) $Q = 40 + 120 \times \frac{3}{4} = 40 + 90 = 130$. Au bout de $\frac{3}{4}$ h, la cuve contient 130 L.

(e) $F = 1{,}8 \times (-15) + 32 = -27 + 32 = 5$. Une température de -15 °C correspond à 5 °F.

Ex. 45 ★★☆ **Piscine : quel tarif choisir ?**

(a) $A = 4{,}5n$ et $B = 30 + 2n$.

(b) Pour $n = 10$: $A = 4{,}5 \times 10 = 45$ et $B = 30 + 2 \times 10 = 50$. Pour $n = 4$: $A = 18$ et $B = 38$. Pour $n = 15$: $A = 67{,}5$ et $B = 60$.

(c) $4{,}5n = 30 + 2n$, donc $2{,}5n = 30$, donc $n = 12$. Vérification : $4{,}5 \times 12 = 54$ et $30 + 2 \times 12 = 54$. Pour 12 entrées, les deux tarifs coûtent 54 € : 12 a la même image, 54, avec les deux formules.

(d) $A = 4{,}5 \times 20 = 90$ et $B = 30 + 2 \times 20 = 70$. Léo doit choisir le tarif B : il économise $90 - 70 = 20$ €.

Ex. 46 ★★☆ L'enclos le plus grand

(a) Largeur + longueur $= 20 \div 2 = 10$, donc la longueur est $10 - x$. $A = x(10 - x) = 10x - x^2$.

(b) x est une longueur, donc $x > 0$. La longueur $10 - x$ doit aussi être positive, donc $x < 10$. x est compris entre 0 et 10.

(c) $4 \times 6 = 24$; $1 \times 9 = 9$; $5 \times 5 = 25$; $2{,}5 \times 7{,}5 = 18{,}75$.

(d) La plus grande valeur du tableau est 25, pour $x = 5$. L'aire semble maximale pour une largeur de 5 m : le potager est un carré de 25 m².

(e) L'image de 4 est 24. $6 \times (10 - 6) = 6 \times 4 = 24 : 6$ a aussi pour image 24, donc 6 est un autre antécédent de 24. Un potager de 6 m sur 4 m a la même aire, 24 m², que celui de 4 m sur 6 m.

Ex. 47 ★★★ La boîte en carton la plus grande

(a) Sur chaque côté de 20 cm, on enlève deux carrés de côté x cm, donc le côté du fond mesure $20 - 2x$ cm. La hauteur de la boîte est x cm. Le volume est donc $V = x \times (20 - 2x)^2$ (en cm³).

(b) x est une longueur, donc $x > 0$. Les deux coins découpés sur un même côté mesurent ensemble $2x$ cm et ne peuvent pas dépasser 20 cm, donc $2x < 20$, c'est-à-dire $x < 10$. Pour $x = 10$: $V = 10 \times (20 - 2 \times 10)^2 = 10 \times 0^2 = 0$. Il ne reste plus de fond, donc pas de boîte.

(c) Pour $x = 4$: $4 \times (20 - 8)^2 = 4 \times 144 = 576$. Pour $x = 2{,}5$: $2{,}5 \times (20 - 5)^2 = 2{,}5 \times 225 = 562{,}5$. Pour $x = 3$: $3 \times (20 - 6)^2 = 3 \times 196 = 588$. La case pour $x = 1$ est déjà remplie : 324.

(d) Je compare tous les volumes : 324 ; 562,5 ; 576 ; 588 ; 384 ; 512 ; 500 ; 252. Le plus grand est 588. Parmi les valeurs testées, le volume maximum est donc 588 cm³, obtenu pour $x = 3$ cm.

(e) Lina a inversé les deux mots. 2 est la valeur de départ : c'est un antécédent de 512. 512 est le résultat : c'est l'image de 2. Conclusion correcte : dans ce tableau, le plus grand volume est 512 cm³ ($512 > 500 > 384 > 252$), obtenu en découpant des carrés de 2 cm de côté.

Ex. 48 ★★★ Trottinettes : Libre ou Pass ?

(a) La grandeur de départ est la durée t (en min). La grandeur obtenue est le prix L (en €). Contrôle : $0{,}25 \times 12 + 1 = 3 + 1 = 4$ ✓ et $0{,}25 \times 40 + 1 = 10 + 1 = 11$ ✓. La formule est en accord avec le tableau.

Ex. 48 (suite)

(b) $M = 4 + 0{,}1t$. Image de 45 : $4 + 0{,}1 \times 45 = 4 + 4{,}5 = 8{,}5$. Avec le tarif Pass, un trajet de 45 min coûte 8,50 €.

(c) Je résous $0{,}25t + 1 = 4 + 0{,}1t$. J'obtiens $0{,}15t = 3$, donc $t = 3 \div 0{,}15 = 20$. Vérification : $0{,}25 \times 20 + 1 = 6$ et $4 + 0{,}1 \times 20 = 6$ ✓. Pour un trajet de 20 min, les deux tarifs coûtent 6 €.

(d) Tarif Libre : $0{,}25t + 1 = 7$, donc $0{,}25t = 6$, donc $t = 24$. Vérification : $0{,}25 \times 24 + 1 = 7$ ✓. Tarif Pass : $4 + 0{,}1t = 7$, donc $0{,}1t = 3$, donc $t = 30$. Vérification : $4 + 0{,}1 \times 30 = 7$ ✓. Avec 7 €, Noa roule 24 min avec le tarif Libre et 30 min avec le Pass : le Pass permet de rouler le plus longtemps.

(e) Faux. Pour $t = 10$: $L = 0{,}25 \times 10 + 1 = 3{,}5$ et $M = 4 + 0{,}1 \times 10 = 5$. Pour 10 min, le Libre coûte 3,50 € et le Pass 5 € : c'est le tarif Libre qui est le plus avantageux.

Ex. 49 ★★★ La balle lancée vers le haut

(a) Image de 0,5 : $1 + 8 \times 0{,}5 - 2 \times 0{,}5^2 = 1 + 4 - 0{,}5 = 4{,}5$. Image de 2,5 : $1 + 8 \times 2{,}5 - 2 \times 2{,}5^2 = 1 + 20 - 12{,}5 = 8{,}5$. La balle est à 4,5 m de hauteur au bout de 0,5 s, et à 8,5 m au bout de 2,5 s.

(b) Je pars de l'ordonnée 7 sur l'axe vertical et je cherche les points à cette hauteur : leurs abscisses sont 1 et 3. Le nombre 7 a donc deux antécédents, 1 et 3. Vérification : $1 + 8 \times 1 - 2 \times 1^2 = 7$ ✓ et $1 + 8 \times 3 - 2 \times 3^2 = 1 + 24 - 18 = 7$ ✓. La balle est à 7 m une fois en montant (à 1 s) et une fois en redescendant (à 3 s).

(c) Pour $t = 2$: $1 + 16 - 8 = 9$. La hauteur maximale est donc 9 m, atteinte au bout de 2 s. Le nombre 9 a un seul antécédent, 2 : c'est le seul instant où la balle est à 9 m. Le nombre 10 n'a aucun antécédent, car la balle ne dépasse jamais 9 m.

(d) Elio a écrit -1^2 sans parenthèses. Or il faut $(-1)^2 = 1$. Calcul correct : $1 + 8 \times (-1) - 2 \times (-1)^2 = 1 - 8 - 2 = -9$. Ce résultat n'a pas de sens : $t = -1$ correspondrait à un instant avant le lancer, et une hauteur ne peut pas être négative. Ici, t doit aller de 0 jusqu'à l'instant où la balle touche le sol.