1. Rappels de 4^e : une grandeur en fonction d'une autre, image, antécédent

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : image, antécédent et vocabulaire**

(a) $R = 3 \times (-2) - 7 = -6 - 7 = -13$.

(b) $R = 3 \times \frac{2}{3} - 7 = 2 - 7 = -5$.

(c) Je défais d'abord la dernière opération : $8 + 7 = 15$, puis $15 \div 3 = 5$. Vérification : $3 \times 5 - 7 = 8$ ✓. Il faut choisir 5.

(d) $-8{,}5 + 7 = -1{,}5$, puis $-1{,}5 \div 3 = -0{,}5$. Vérification : $3 \times (-0{,}5) - 7 = -8{,}5$ ✓. Il faut choisir $-0{,}5$.

(e) 11 est l'image de 6 et 6 est un antécédent de 11.

(f) Le nombre de départ est 0 et le résultat est -7 : -7 est l'image de 0, et 0 est un antécédent de -7.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : lire un nuage de points**

(a) Le temps t (la grandeur qu'on choisit) se lit en abscisse ; la hauteur h dépend du temps, elle se lit en ordonnée.

(b) Je pars de l'abscisse 3 : le point a pour ordonnée 11. La hauteur est de 11 cm.

(c) Je cherche le point d'ordonnée 5 : son abscisse est 1. C'est au bout de 1 min.

(d) L'abscisse 2 est le temps et l'ordonnée 8 la hauteur : au bout de 2 min, l'eau monte à 8 cm.

(e) Faux. Les points sont alignés, mais pas avec l'origine : à $t = 0$, la hauteur vaut déjà 2 cm, et non 0.

Ex. 3 ★★☆ **Du programme de calcul à la formule**

(a) $4 + 3 = 7$, puis $7 \times 2 = 14$, puis $14 - 5 = 9$. Le résultat est 9.

(b) $-7 + 3 = -4$, puis $(-4) \times 2 = -8$, puis $-8 - 5 = -13$. Le résultat est -13.

(c) Je refais le calcul de la première question en remplaçant 4 par x : $R = 2(x + 3) - 5 = 2x + 6 - 5 = 2x + 1$. La formule est $R = 2x + 1$.

(d) Programme : $0{,}5 + 3 = 3{,}5$, puis $3{,}5 \times 2 = 7$, puis $7 - 5 = 2$. Formule : $2 \times 0{,}5 + 1 = 2$. On trouve la même chose, donc la formule est confirmée.

Ex. 3 (suite)

(e) Je défais le programme en commençant par la dernière opération : $20 + 5 = 25$, puis $25 \div 2 = 12{,}5$, puis $12{,}5 - 3 = 9{,}5$. Vérification : $2 \times 9{,}5 + 1 = 20$ ✓. Il faut choisir 9,5.

Ex. 4 ★★☆ **Location de paddle**

(a) $6 \times 3 + 5 = 18 + 5 = 23$. Une location de 3 h coûte 23 €.

(b) Avec sa formule : $6 \times (3 + 5) = 6 \times 8 = 48$ €, au lieu de 23 €. Malo multiplie aussi les frais par 6 : on multiplie la durée par 6, puis on ajoute 5. La bonne formule est $P = 6d + 5$.

(c) Je défais d'abord la dernière opération : $50 - 5 = 45$, puis $45 \div 6 = 7{,}5$. Vérification : $6 \times 7{,}5 + 5 = 50$ ✓. On peut louer le paddle 7,5 h, soit 7 h 30 min.

(d) $6 \times 6 + 5 = 41$ € et $41 > 40$. Lina ne peut pas louer le paddle pendant 6 h : il lui manque 1 €.

Ex. 5 ★★★ **Deux tarifs pour la salle d'escalade**

(a) Tarif A : $7 \times 5 = 35$ €. Tarif B : $4 \times 5 + 24 = 44$ €. On remplace 5 par n : $P_A = 7n$ et $P_B = 4n + 24$.

(b) On multiplie d'abord par 4, puis on ajoute 24 : en B2, on saisit `=4*A2+24` (et non `=4*(A2+24)`). Si A2 contient 12 : $4 \times 12 + 24 = 48 + 24 = 72$. B2 affiche 72.

(c) On défait à l'envers en commençant par la dernière opération, l'addition de 24 : $88 - 24 = 64$, puis $64 \div 4 = 16$. Vérification : $4 \times 16 + 24 = 88$ ✓. Inès a fait 16 séances.

(d) Tarif A : $7 \times 9 = 63$ et $63 \neq 60$, donc le point $(9\,;60)$ ne fait pas partie des points du tarif A. Tarif B : $4 \times 9 + 24 = 36 + 24 = 60$ ✓, donc le point $(9\,;60)$ fait partie des points du tarif B.

(e) Chaque séance coûte $7 - 4 = 3$ € de plus avec le tarif A, et le tarif B a 24 € d'avance : $24 \div 3 = 8$ séances. Vérification : $7 \times 8 = 56$ et $4 \times 8 + 24 = 56$ ✓. Pour 8 séances, les deux tarifs coûtent 56 €.

Ex. 6 ★★★ **Un programme de calcul surprenant**

(a) Pour 3 : $3 + 6 = 9$, puis $9 \times 3 = 27$, puis $27 - 3^2 = 27 - 9 = 18$. Pour -2 : $-2 + 6 = 4$, puis $4 \times (-2) = -8$, puis $-8 - (-2)^2 = -8 - 4 = -12$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Non. Le nombre de départ 3 donne le résultat 18 : 18 est l'image de 3, et 3 est un antécédent de 18. Tom a inversé les deux mots.

(c) $R = (x+6) \times x - x^2 = x^2 + 6x - x^2 = 6x$. Contrôle avec $x = 3$: $6 \times 3 = 18$ ✓, comme à la première question.

(d) $R = 6x$, donc on divise par 6. $-15 \div 6 = -2{,}5$: il faut choisir $-2{,}5$. Vérification : $3{,}5 \times (-2{,}5) - 6{,}25 = -8{,}75 - 6{,}25 = -15$ ✓. Puis $\frac{2}{3} \div 6 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$: il faut choisir $\frac{1}{9}$.

(e) Oui. Pour tout nombre choisi, $R = 6x$: le résultat est toujours 6 fois le nombre choisi. Dans un repère, les points $(x\,;R)$ sont alignés avec l'origine. Le résultat est proportionnel au nombre choisi.

Ex. 7 ★★★ **La cuve qui se vide**

(a) Le temps t est la grandeur de départ : il se lit en abscisse. Le volume V dépend du temps : il se lit en ordonnée. Nora a inversé les axes. Le bon point est $(5\,;390)$.

(b) En 5 min, le volume passe de 450 L à 390 L : 60 L s'écoulent, soit $60 \div 5 = 12$ L par minute.
Donc $V = 450 - 12t$. Contrôle avec $t = 20$: $450 - 12 \times 20 = 450 - 240 = 210$ ✓.

(c) Pour $t = 5$: $450 - 2 \times 5^2 = 450 - 50 = 400$, mais le tableau donne 390. Une colonne fausse suffit : la formule de Yanis est fausse.

(d) On cherche t tel que $450 - 12t = 102$. La dernière opération est la soustraction de $12t$: il s'est écoulé $450 - 102 = 348$ L, puis $348 \div 12 = 29$. Vérification : $450 - 12 \times 29 = 450 - 348 = 102$ ✓. Il reste 102 L au bout de 29 min.

(e) Non. Avec la formule : $450 - 12 \times 40 = -30$, un volume négatif, c'est impossible. La cuve est vide quand $12t = 450$, soit $t = 450 \div 12 = 37{,}5$. La cuve est vide au bout de 37,5 min, c'est-à-dire 37 min 30 s, avant 40 min.

2. *Notation f(x) : calculer une image*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : calculer des images**

(a) $f(3) = 3 \times 3^2 - 4 = 3 \times 9 - 4 = 23$ (et non $(3 \times 3)^2 - 4 = 77$: le carré se calcule avant la multiplication).

(b) $f(-2) = 3 \times (-2)^2 - 4 = 3 \times 4 - 4 = 8$ ($(-2)^2$ est positif).

(c) $f(0) = 3 \times 0^2 - 4 = -4$.

Ex. 8 **(suite)**

(d) $f(0{,}5) = 3 \times 0{,}5^2 - 4 = 3 \times 0{,}25 - 4 = 0{,}75 - 4 = -3{,}25$.

(e) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4 = 3 \times \frac{1}{9} - 4 = \frac{1}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{11}{3}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : vocabulaire et pièges**

(a) $m(-5) = 8$: l'image de -5 est 8.

(b) $m(7) = -1$: 7 est un antécédent de -1 (et non -1, qui est l'image de 7).

(c) $p(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) = 9 + 6 = 15$.

(d) Faux : $f(4)$ est le nombre obtenu en appliquant la fonction f à 4 ; f est la fonction, $f(4)$ est un nombre.

(e) Le nombre -3 : $-3 + 3 = 0$ et on ne peut pas diviser par 0, donc -3 n'a pas d'image.

(f) Non : $5^2 = 25$ et $(-5)^2 = 25$, on obtiendrait deux résultats pour 25 ; une fonction donne une seule image.

Ex. 10 ★★☆ **Un programme de calcul**

(a) On soustrait 3, puis on élève au carré, puis on ajoute 1 : $h(x) = (x-3)^2 + 1$.

(b) $h(5) = (5-3)^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ et $h(1) = (1-3)^2 + 1 = (-2)^2 + 1 = 5$. Les deux images valent 5.

(c) Non. Chaque nombre de départ a une seule image, donc h est bien une fonction. Ici, 5 a deux antécédents, 5 et 1 : c'est autorisé.

(d) $h(-2) = (-2-3)^2 + 1 = (-5)^2 + 1 = 25 + 1 = 26$. L'image de -2 par h est 26.

(e) $h\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 + 1 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4} = 3{,}25$.

Ex. 11 ★★☆ **La hauteur d'une balle**

(a) $h(1) = -5 \times 1^2 + 20 \times 1 = -5 + 20 = 15$. C'est la hauteur de la balle au bout de 1 s : 15 m.

(b) $h(0) = -5 \times 0^2 + 20 \times 0 = 0$. Au départ ($t = 0$), la balle est à 0 m : elle est lancée depuis le sol.

(c) Inès a multiplié avant d'élever au carré. Le carré passe avant : $h(2) = -5 \times 2^2 + 20 \times 2 = -5 \times 4 + 40 = 20$. Au bout de 2 s, la balle est à 20 m.

(d) $h(4) = -5 \times 4^2 + 20 \times 4 = -80 + 80 = 0$. Au bout de 4 s, la hauteur est 0 m : la balle retombe au sol.

Ex. 12 ★★★ **Le programme de Lina**

(a) $-2+5=3$; $3\times(-2)=-6$; $-6-6=-12$. Avec -2, le programme donne -12 : l'image de -2 par g est -12.

(b) $g(0)=0\times(0+5)-6=0-6=-6$ (et non 0).
$g(-0{,}4)=(-0{,}4)\times(-0{,}4+5)-6=(-0{,}4)\times 4{,}6-6=-1{,}84-6=-7{,}84$.
Donc $g(0)=-6$ et $g(-0{,}4)=-7{,}84$.

(c) $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+5\right)-6=\frac{1}{2}\times\frac{11}{2}-6=\frac{11}{4}-\frac{24}{4}=-\frac{13}{4}$. L'image de $\frac{1}{2}$ par g est $-\frac{13}{4}$.

(d) Le programme donne $g(x)=x\times(x+5)-6=x^2+5x-6$: la formule de Sami est juste. Mais il a oublié les parenthèses : $-4^2=-16$, alors que $(-4)^2=16$. Le bon calcul : $g(-4)=(-4)^2+5\times(-4)-6=16-20-6=-10$.
Donc $g(-4)=-10$.

Ex. 13 ★★★ **Une feuille de tableur**

(a) B1 contient x, donc B1*B1 vaut $x\times x=x^2$. La formule calcule $f(x)=2x^2-7$.

(b) C2 : $f(-1)=2\times(-1)^2-7=2-7=-5$. D2 : $f(0)=2\times 0^2-7=-7$. E2 : $f(1{,}5)=2\times 2{,}25-7=4{,}5-7=-2{,}5$. Les cellules affichent -5, -7 et $-2{,}5$.

(c) Lucas a fait la multiplication avant le carré : $(2\times 3)^2-7=36-7=29$. Or le carré se calcule d'abord : $f(3)=2\times 3^2-7=2\times 9-7=11$. La cellule F2 affiche 11.

(d) $f(-3)=2\times(-3)^2-7=18-7=11$: le calcul est juste. Mais Emma confond les mots : 11 est l'image de -3, et -3 est un antécédent de 11. D'après la question précédente, $f(3)=11$: 3 est un autre antécédent de 11.

(e) F3 affiche une erreur : pour $x=3$, on a $3-3=0$, et on ne peut pas diviser par 0 ; le nombre 3 n'a pas d'image par cette fonction. C3 : $\frac{10}{-1-3}=\frac{10}{-4}=-2{,}5$. C3 vaut $-2{,}5$.

Ex. 14 ★★★ **Justifier avec la notation f(x)**

(a) $f(-1{,}2)=4-(-1{,}2)^2=4-1{,}44=2{,}56$.
Donc $f(-1{,}2)=2{,}56$.

(b) Faux. $f(-5)=4-(-5)^2=4-25=-21$. On trouve 29 si l'on calcule $(-5)^2=-25$, ce qui est faux.
Donc $f(-5)=-21$.

(c) $f(0)=4-0^2=4$ (et non 0) et $f(2)=4-2^2=4-4=0$. Comme $f(2)=0$, 2 est un antécédent de 0. En revanche, 0 a pour image 4 : ce n'est pas un antécédent de 0. Il ne faut pas confondre $f(0)$, l'image de 0, avec un nombre x tel que $f(x)=0$.

Ex. 14 (suite)

(d) $f\left(\frac{2}{3}\right)=4-\left(\frac{2}{3}\right)^2=4-\frac{4}{9}=\frac{36}{9}-\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$. L'image de $\frac{2}{3}$ par f est $\frac{32}{9}$.

(e) On cherche x tel que $4-x^2=-32$, c'est-à-dire $x^2=36$. Le nombre entier positif qui convient est 6, car $6^2=36$. Vérification : $f(6)=4-6^2=4-36=-32$.
Le nombre 6 a pour image -32.

3. *Chercher un antécédent par le calcul*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : antécédents avec une formule du premier degré**

(a) $7-3x=19$, donc $-3x=12$, donc $x=-4$.
Vérification : $f(-4)=7+12=19$ ✓. L'antécédent de 19 est -4.

(b) $f(0)=7-3\times 0=7$. Antécédent de 0 : $7-3x=0$, donc $3x=7$, donc $x=\frac{7}{3}$. Vérification : $f\left(\frac{7}{3}\right)=7-7=0$ ✓. Attention, $f(0)$ et « $f(x)=0$ » sont deux questions différentes.

(c) $7-3x=8{,}5$, donc $-3x=1{,}5$, donc $x=-0{,}5$.
Vérification : $f(-0{,}5)=7+1{,}5=8{,}5$ ✓.

(d) $7-3a=a$, donc $7=4a$, donc $a=\frac{7}{4}=1{,}75$.
Vérification : $f(1{,}75)=7-5{,}25=1{,}75$ ✓.

(e) Lina a calculé l'image de 4 et non un antécédent. Il faut résoudre $7-3x=4$, donc $-3x=-3$, donc $x=1$.
Vérification : $f(1)=7-3=4$ ✓. L'antécédent de 4 est 1.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : antécédents avec un carré**

(a) $h(-4)=(-4)^2-12=16-12=4$. L'image de -4 est 4
(et non $-16-12$).

(b) $x^2-12=52$, donc $x^2=64$: $x=8$ ou $x=-8$.
Vérification : $8^2-12=52$ et $(-8)^2-12=52$ ✓.

(c) $x^2-12=-12$, donc $x^2=0$: seul 0 convient. Le nombre -12 a un seul antécédent, 0.

(d) $x^2-12=-15$, donc $x^2=-3$. Un carré n'est jamais négatif : -15 n'a aucun antécédent.

(e) $x^2-12=-5$, donc $x^2=7$: $x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$, environ 2,65 et $-2{,}65$.

(f) Pas entièrement. $x^2-12=37$ donne $x^2=49$, donc $x=7$ ou $x=-7$. Tom en a oublié un : $(-7)^2-12=49-12=37$. Les antécédents de 37 sont 7 et -7.

Ex. 17 ★★☆ **Un produit et ses antécédents de 0**

(a) $p(0) = (0+3) \times (2 \times 0 - 5) = 3 \times (-5) = -15$ et $p(-4) = (-4+3) \times (2 \times (-4) - 5) = (-1) \times (-13) = 13$.
Donc $p(0) = -15$ et $p(-4) = 13$.

(b) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x + 3 = 0$ ou $2x - 5 = 0$, donc $x = -3$ ou $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$. Kenza s'est trompée de signes et a oublié de diviser par 2. Les antécédents de 0 sont -3 et 2,5.

(c) $p(-3) = 0 \times (-11) = 0$ ✓ et $p(2{,}5) = 5{,}5 \times 0 = 0$ ✓. Les deux nombres ont bien pour image 0.

(d) $p(1) = (1+3) \times (2 \times 1 - 5) = 4 \times (-3) = -12$. Comme $p(1) = -12$, le point $A(1\,;-12)$ est sur la courbe de p.

Ex. 18 ★★☆ **Location de vélos : deux tarifs**

(a) $A(3) = 4 \times 3 + 10 = 22$ et $B(3) = 6{,}5 \times 3 = 19{,}5$. Pour 3 heures, on paie 22 € avec le tarif A et 19,50 € avec le tarif B.

(b) Mehdi a calculé une image alors que 37 est un prix, donc un résultat : il faut chercher son antécédent. $4x + 10 = 37$, donc $4x = 27$, donc $x = 6{,}75$. Vérification : $A(6{,}75) = 27 + 10 = 37$ ✓. Inès a loué le vélo 6,75 heures, soit 6 h 45 min.

(c) On résout $A(x) = B(x)$: $4x + 10 = 6{,}5x$, donc $10 = 2{,}5x$, donc $x = 4$. Vérification : $A(4) = 26$ et $B(4) = 26$ ✓. Pour 4 heures, les deux tarifs coûtent 26 €.

(d) Tarif A : $4x + 10 = 39$, donc $4x = 29$, donc $x = 7{,}25$. Tarif B : $6{,}5x = 39$, donc $x = 6$. Comme $7{,}25 > 6$, le tarif A permet à Noé de louer plus longtemps : 7 h 15 min.

Ex. 19 ★★★ **Un programme de calcul avec un carré**

(a) $f(-2) = (-2-3)^2 - 16 = (-5)^2 - 16 = 25 - 16 = 9$. Attention : $(-5)^2 = 25$, pas -25. Si l'on choisit -2, on obtient bien 9.

(b) $f(x) = (x-3)^2 - 16 = x^2 - 6x + 9 - 16 = x^2 - 6x - 7$. D'autre part, $(x-7)(x+1) = x^2 + x - 7x - 7 = x^2 - 6x - 7$. Les deux expressions sont égales, donc $f(x) = (x-7)(x+1)$.

(c) On résout $(x-7)(x+1) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x - 7 = 0$ ou $x + 1 = 0$, donc $x = 7$ ou $x = -1$. Vérification : $f(7) = 4^2 - 16 = 0$ et $f(-1) = (-4)^2 - 16 = 0$ ✓. Il faut choisir 7 ou -1 : 0 a deux antécédents.

Ex. 19 (suite)

(d) On résout $(x-3)^2 - 16 = -16$, donc $(x-3)^2 = 0$. Seul 0 a pour carré 0, donc $x - 3 = 0$ et $x = 3$. Vérification : $f(3) = 0^2 - 16 = -16$ ✓. Seul le nombre 3 donne -16.

(e) Il faudrait $(x-3)^2 - 16 = -20$, donc $(x-3)^2 = -4$. Or un carré n'est jamais négatif : cette équation n'a aucune solution. Yanis a tort : -20 n'a aucun antécédent par f.

Ex. 20 ★★★ **Une plaque carrée découpée**

(a) L'aire de la plaque est $x \times x = x^2$, et celle du carré découpé est $3 \times 3 = 9$. L'aire restante est donc $g(x) = x^2 - 9$.

(b) $x^2 - 9 = 72$, donc $x^2 = 81$, soit $x = 9$ ou $x = -9$. Vérification : $g(9) = 81 - 9 = 72$ et $g(-9) = (-9)^2 - 9 = 72$ ✓. Jade a tort : 72 a deux antécédents, 9 et -9. Une longueur est positive : la plaque a un côté de 9 cm.

(c) $g(-4) = (-4)^2 - 9 = 16 - 9 = 7$. Comme $g(-4) = 7$, le point $B(-4\,;7)$ est sur la courbe de g. Il ne correspond à aucune plaque, car un côté ne peut pas mesurer -4 cm.

(d) $x^2 - 9 = 11$, donc $x^2 = 20$, soit $x = \sqrt{20}$ ou $x = -\sqrt{20}$. Une longueur est positive : on garde $\sqrt{20}$. Vérification : $g(\sqrt{20}) = 20 - 9 = 11$ ✓. Le côté mesure $\sqrt{20}$ cm, soit environ 4,47 cm.

(e) Faux. $x^2 - 9 = -9$ donne $x^2 = 0$: seul 0 convient, car $g(0) = -9$ ✓. -9 a un seul antécédent. $x^2 - 9 = -10$ donne $x^2 = -1$: c'est impossible, car un carré n'est jamais négatif. -10 n'a aucun antécédent.

Ex. 21 ★★★ **Deux colonnes de tableur**

(a) $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = 7 - 2x$. En C2 : $g(-2{,}5) = 7 - 2 \times (-2{,}5) = 7 + 5 = 12$. Le tableur affiche 12.

(b) Non : $f(2{,}67) = 3 \times 2{,}67 - 5 = 3{,}01$, et non 3. On résout $3x - 5 = 3$, donc $3x = 8$, donc $x = \frac{8}{3}$. Vérification : $f\left(\frac{8}{3}\right) = 8 - 5 = 3$ ✓. L'antécédent de 3 est $\frac{8}{3}$ (environ 2,67) : il faut taper =8/3.

(c) $3a - 5 = a$, donc $2a = 5$, donc $a = 2{,}5$. Vérification : $f(2{,}5) = 7{,}5 - 5 = 2{,}5$ ✓. Le nombre cherché est 2,5.

(d) On résout $f(x) = g(x)$: $3x - 5 = 7 - 2x$, donc $5x = 12$, donc $x = \frac{12}{5} = 2{,}4$. Vérification : $f(2{,}4) = 7{,}2 - 5 = 2{,}2$ et $g(2{,}4) = 7 - 4{,}8 = 2{,}2$ ✓. Pour $x = 2{,}4$, les deux colonnes affichent 2,2.

(e) Faux. $7 - 2x = 10$ donne $-2x = 3$, donc $x = -1{,}5$: cette équation du premier degré a une seule solution. Vérification : $g(-1{,}5) = 7 + 3 = 10$ ✓. Le nombre 10 a un seul antécédent par g : $-1{,}5$.

4. Tableau de valeurs, tableur et points de la courbe

Ex. 22 ★☆☆ Lire un tableau dans les deux sens

(a) Dans la colonne $x = 0$, je lis -5 sur la deuxième ligne : $g(0) = -5$.

(b) Je parcours toute la deuxième ligne : 1 y apparaît deux fois, sous -3 et sous 2. Les antécédents de 1 lus dans le tableau sont -3 et 2.

(c) L'abscisse est le nombre de départ et l'ordonnée est son image : $(-3\,;1)$, $(-1\,;-5)$, $(0\,;-5)$ et $(2\,;1)$.

(d) Non. Le tableau ne donne que quatre valeurs de x, et 3 peut être l'image d'un nombre qui n'y figure pas. On ne peut pas affirmer que 3 n'a pas d'antécédent.

(e) Dans la colonne de 2, le nombre de départ est 2 et son image est 1. Il faut donc écrire $g(2) = 1$: Noé a inversé l'image et l'antécédent.

Ex. 23 ★☆☆ Points de la courbe : on calcule

(a) $f(2) = 3 - 2 \times 2^2 = 3 - 8 = -5$. C'est bien l'ordonnée de A, donc A est sur la courbe.

(b) $f(-3) = 3 - 2 \times (-3)^2 = 3 - 18 = -15$, et $-15 \neq 15$. Donc B n'est pas sur la courbe.

(c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 2 \times \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. L'ordonnée est $\frac{5}{2}$.

(d) Non. $f(0) = 3$ veut dire que le point $(0\,;3)$ est sur la courbe. Pour $E(3\,;0)$, on calcule $f(3) = 3 - 2 \times 9 = -15 \neq 0$, donc E n'est pas sur la courbe.

(e) $3 - 2x^2 = 1$ donne $2x^2 = 2$, donc $x^2 = 1$: $x = 1$ ou $x = -1$. Les points sont $(-1\,;1)$ et $(1\,;1)$. Ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Ex. 24 ★★☆ Au tableur

(a) La cellule A1 contient le texte «x» et pas un nombre. La formule doit utiliser la cellule du nombre de départ, B1. La bonne formule est =2*B1*B1-3*B1.

(b) Quand on recopie vers la droite, B devient C, puis D, puis E. La cellule E2 contient donc =2*E1*E1-3*E1, qui calcule $h(3)$.

(c) $h(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) = 8 + 6 = 14$; $h(-1) = 2 + 3 = 5$; $h(0) = 0$; $h(3) = 18 - 9 = 9$. La ligne 2 affiche 14, 5, 0 et 9.

(d) $h(x) = x(2x - 3)$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $2x - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$. Les antécédents de 0 sont 0 et $\frac{3}{2}$.

Ex. 25 ★★☆ L'enclos de Basile

(a) Les deux côtés perpendiculaires au mur utilisent $2x$ m de grillage. Il reste $20 - 2x$ m pour le côté parallèle au mur. L'aire vaut largeur × longueur, donc $A(x) = x(20 - 2x)$.

(b) $A(5) = 5 \times (20 - 10) = 50$ et $A(8) = 8 \times (20 - 16) = 32$. Le tableau se complète avec 50 et 32.

(c) Non. Deux colonnes qui conviennent ne prouvent rien. Pour $x = 5$: $8 \times 5 + 16 = 56$, alors que $A(5) = 50$. Cette seule colonne suffit à montrer que la formule de Mila ne convient pas.

(d) Je parcours toute la deuxième ligne : 32 apparaît sous 2 et sous 8. Une largeur de 2 m ou de 8 m donne une aire de 32 m².

(e) $A(6) = 6 \times (20 - 12) = 48$.
Donc 48 a au moins deux antécédents, 4 et 6, alors que le tableau n'en montrait qu'un : un tableau ne donne que quelques valeurs.

Ex. 26 ★★★ Le programme de calcul de Maëlle

(a) $(-4)^2 + 3 \times (-4) = 16 - 12 = 4$. En choisissant -4, on obtient 4.

(b) On élève x au carré, puis on ajoute le triple de x : $p(x) = x^2 + 3x$.

(c) La formule doit utiliser la cellule du nombre de départ, B1 (et non A1, qui contient du texte) : =B1*B1+3*B1. Recopiée vers la droite, elle devient =C1*C1+3*C1, etc.

(d) C2 : $(-3)^2 + 3 \times (-3) = 9 - 9 = 0$. D2 : $(-1)^2 + 3 \times (-1) = 1 - 3 = -2$. E2 : $2^2 + 3 \times 2 = 4 + 6 = 10$. Le tableur affiche 0, -2 et 10.

(e) On résout $p(x) = x$: $x^2 + 3x = x$, soit $x^2 + 2x = 0$, c'est-à-dire $x(x + 2) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x = -2$. Vérification : $p(0) = 0$ et $p(-2) = 4 - 6 = -2$. Il faut choisir 0 ou -2.

Ex. 27 ★★★ Retrouver la formule de k

(a) De haut en bas : sous -1, on lit 1, donc $k(-1) = 1$. De bas en haut, en parcourant toute la deuxième ligne : 7 apparaît sous -2 et sous 2. Les antécédents de 7 lus dans le tableau sont -2 et 2.

(b) $6 \times 1 - 5 = 1$ et $6 \times 2 - 5 = 7$ conviennent. Mais pour $x = -2$: $6 \times (-2) - 5 = -17$, et non 7. Une seule colonne fausse suffit : ce n'est pas la formule de k.

Ex. 27 **(suite)**

(c) Les colonnes conviennent : $2 \times (-2)^2 - 1 = 7$, $2 \times (-1)^2 - 1 = 1$, $2 \times 1^2 - 1 = 1$, $2 \times 2^2 - 1 = 7$. Mais le tableau ne donne que quatre valeurs : il ne dit rien de $k(0)$ ou de $k(5)$. Il ne prouve donc pas que c'est la formule de k. On peut seulement dire que cette formule est compatible avec le tableau.

(d) Faux. On résout $2x^2 - 1 = 17$, soit $2x^2 = 18$, puis $x^2 = 9$.
Donc $x = 3$ ou $x = -3$. Vérification : $2 \times 3^2 - 1 = 17$. Le nombre 17 a deux antécédents, -3 et 3, même s'il est absent du tableau.

(e) $k\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$: c'est l'ordonnée de R, donc R est sur la courbe. $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \neq 0$: S n'est pas sur la courbe.

Ex. 28 ★★★ **L'arche du jardin**

(a) Le point d'abscisse 3 a pour ordonnée 7 : $h(3) = 7$. À 3 dm à droite de l'axe, l'arche mesure 7 dm de haut.

(b) Théo s'est trompé de signe : $(-3)^2 = 9$, puis $16 - 9 = 7$. Donc $h(-3) = 7$. C'est aussi $h(3)$, car 3 et -3 ont le même carré : la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(c) Un carré est toujours positif ou nul : $x^2 \geq 0$, donc $h(x) = 16 - x^2 \leq 16$. De plus, $h(0) = 16 - 0^2 = 16$: c'est le point le plus haut du nuage, $(0\,;16)$. La hauteur maximale de l'arche est 16 dm, atteinte sur son axe.

(d) $h(-1{,}5) = 16 - (-1{,}5)^2 = 16 - 2{,}25 = 13{,}75$. C'est l'ordonnée de M, donc M est sur la courbe.

(e) Le point $(4\,;0)$ est dans le nuage : $h(4) = 0$. Par symétrie, $h(-4) = 16 - (-4)^2 = 0$. L'arche touche le sol à 4 dm à gauche et à 4 dm à droite de l'axe : elle mesure 8 dm de large au sol.

5. *Lire images et antécédents sur un graphique*

Ex. 29 ★☆☆ **Lire sur des points de la courbe**

(a) Je pars de 5 sur l'axe des abscisses et je lis l'ordonnée du point : $f(5) = 8$.

(b) Le point d'abscisse 2 a pour ordonnée -1 : $f(2) = -1$.

(c) Deux points ont pour ordonnée 3, ceux d'abscisses 0 et 4 : les antécédents de 3 sont 0 et 4.

(d) $f(1) = 0$ veut dire que 0 est l'image de 1, donc que 1 est un antécédent de 0. Aucun point tracé n'a pour ordonnée 1 : on ne lit pas d'antécédent de 1 ici.

Ex. 30 ★☆☆ **Une courbe décrite par une phrase**

(a) $C(-1\,;-3)$ est sur la courbe : $f(-1) = -3$.

(b) Le point de la courbe situé sur l'axe des ordonnées est $D(0\,;-3)$: $f(0) = -3$.

(c) On cherche les points de la courbe situés sur l'axe des abscisses : B et E. Les solutions sont -3 et 2.

(d) La droite $y = 7$ coupe la courbe en A et F : les antécédents de 7 sont -5 et 4.

(e) Le point le plus bas a une ordonnée d'environ $-3{,}1$, plus grande que -4. La droite $y = -4$ ne coupe pas la courbe : -4 n'a aucun antécédent.

(f) Le minimum de f vaut environ $-3{,}1$ (c'est une valeur de $f(x)$). Il est atteint pour $x \approx -0{,}5$.

Ex. 31 ★★☆ **Lecture approchée, calcul exact**

(a) $g(2) = 2^2 - 3 = 1$ et $g(1) = 1^2 - 3 = -2$.

(b) Non. Le point $(2\,;1)$ dit que $g(2) = 1$: 1 est l'image de 2, donc 2 est un antécédent de 1. De plus $g(1) = -2$, pas 2 : 1 n'est pas un antécédent de 2. Ilan a confondu image et antécédent.

(c) $g(2{,}2) = 2{,}2^2 - 3 = 4{,}84 - 3 = 1{,}84$, ce qui est différent de 2. La lecture de Maëlle est seulement approchée.

(d) $x^2 - 3 = 2$ donne $x^2 = 5$, donc $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$. Les antécédents de 2 sont $-\sqrt{5} \approx -2{,}24$ et $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

Ex. 32 ★★☆ **Température d'une journée**

(a) 10 h correspond à $x = 1$. Un carreau vertical vaut 2 °C et le point d'abscisse 1 a pour ordonnée 14 : $T(1) = 14$. Il fait 14 °C à 10 h.

(b) Les points d'ordonnée 20 ont pour abscisses 2 et 4 : les solutions sont 2 et 4. Il fait 20 °C à 11 h et à 13 h.

(c) Le point le plus haut a pour ordonnée 22 et pour abscisse 3. La température maximale relevée est 22 °C, à 12 h.

(d) Les solutions sont 1 et 5, soit 10 h et 14 h. À ces deux heures, la serre et l'extérieur ont la même température : $T(1) = T(5) = 14$ °C.

(e) Le point d'abscisse 6 est à 2 carreaux au-dessus de l'axe des abscisses, mais un carreau vaut 2 °C : $T(6) = 2 \times 2 = 4$. Noé a compté les carreaux au lieu de lire la graduation. À 15 h, il fait 4 °C.

Ex. 33 ★★★ **La fusée à eau**

(a) $h(0)$ est l'ordonnée du point d'abscisse 0 : $h(0) = 7$. La fusée part de 7 m de haut. $h(x) = 0$: je cherche les points de la courbe sur l'axe des abscisses. Il n'y en a qu'un, d'abscisse 7. La fusée touche le sol au bout de 7 s. Attention : $h(0)$ et « $h(x) = 0$ » sont deux questions différentes.

(b) Je résous $h(x) = 12$. L'horizontale d'ordonnée 12 coupe la courbe en deux points, d'abscisses 1 et 5. La fusée est à 12 m au bout de 1 s (en montant) et au bout de 5 s (en descendant).

(c) Le point le plus haut de la courbe est $(3\,;16)$. L'horizontale d'ordonnée 16 ne touche la courbe qu'en ce point : 16 a un seul antécédent, 3. L'horizontale d'ordonnée 17 passe au-dessus de toute la courbe : 17 n'a aucun antécédent.

(d) Je pars de 2 sur l'axe des ordonnées (et non de 2 sur l'axe des abscisses, qui donnerait $h(2) = 15$). L'horizontale d'ordonnée 2 ne coupe la courbe qu'une fois, entre $x = 6$ (où $h(6) = 7$) et $x = 7$ (où $h(7) = 0$). Au départ, la fusée est déjà à 7 m. Le nombre 2 a donc un seul antécédent, compris entre 6 et 7.

(e) $h(0{,}5) = -(0{,}5)^2 + 6 \times 0{,}5 + 7 = -0{,}25 + 3 + 7 = 9{,}75$. Comme $9{,}75 \neq 10$, le point E n'est pas sur la courbe : Zoé a tort. Au bout de 0,5 s, la fusée est à 9,75 m.

Ex. 34 ★★★ **Une courbe à décrypter**

(a) La courbe coupe la droite $y = 1$ en $x = 0$, donc $f(0) = 1$: c'est l'ordonnée du point de la courbe situé sur l'axe des ordonnées. Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points situés sur l'axe des abscisses : $-2{,}5$, 0,5 et 4. Il y en a trois.

(b) Non. La droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe en trois points, d'abscisses -2, 0 et 5. Le nombre 1 a donc trois antécédents : -2, 0 et 5. Léo n'a regardé que le point D.

(c) Le maximum est l'ordonnée de B : c'est 4 (pas -1, qui est l'abscisse où il est atteint). Le minimum est l'ordonnée de C : c'est -5. Comme 6 est plus grand que le maximum, l'horizontale d'ordonnée 6 ne coupe pas la courbe : 6 n'a aucun antécédent.

Ex. 34 **(suite)**

(d) De A à B, la courbe monte à partir de -2 : elle reste au-dessus de -3 et ne repasse plus par -2 après A. De B à C, elle descend de 4 à -5 : elle passe une fois par -3 et une fois par -2. De C à D, elle monte de -5 à 1 : de nouveau une fois par -3 et une fois par -2. L'équation $f(x) = -3$ a donc deux solutions. L'équation $f(x) = -2$ en a trois, dont -3 (point A).

Ex. 35 ★★★ **Deux cuves**

(a) $120 - 8x = 20 + 12x$ donne $100 = 20x$, d'où $x = 5$. Puis $A(5) = 120 - 8 \times 5 = 80$ et $B(5) = 20 + 12 \times 5 = 80$. Le point d'intersection est $(5\,;80)$: au bout de 5 min, les deux cuves contiennent chacune 80 L.

(b) Je résous $20 + 12x = 60$, soit $12x = 40$, d'où $x = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$. L'antécédent exact de 60 est $\frac{10}{3}$, soit environ 3,33 : la lecture de Maé était seulement approchée.

(c) La cuve est vide quand $A(x) = 0$: $120 - 8x = 0$, soit $8x = 120$, d'où $x = 15$. La cuve A est vide au bout de 15 min.

(d) $A(16) = 120 - 8 \times 16 = 120 - 128 = -8$. Une cuve ne peut pas contenir -8 L : la cuve A est vide au bout de 15 min, et la formule n'a plus de sens après ce moment.

6. *Lire un maximum ou un minimum, comparer deux fonctions*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : lire un maximum et un minimum**

(a) 3 est l'abscisse de D. Le maximum est une ordonnée : celle du point le plus haut. Le maximum de f est donc 5.

(b) Les points les plus hauts sont B et D, tous les deux d'ordonnée 5. Le maximum est atteint pour $x = -1$ et pour $x = 3$.

(c) Le point le plus bas est A, à l'extrémité gauche de la courbe, et pas C, qui n'est qu'un creux. Le minimum de f est -3, atteint pour $x = -4$.

(d) Non : le maximum de f est 5, donc la courbe ne monte jamais jusqu'à l'ordonnée 6. L'horizontale d'ordonnée 6 ne coupe pas la courbe.

Ex. 36 **(suite)**

(e) L'horizontale d'ordonnée 4 coupe chacune des quatre portions : de A à B (-3 puis 5), de B à C (5 puis 1), de C à D (1 puis 5), de D à E (5 puis 2). Le nombre 4 a donc 4 antécédents.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : le plus grand nombre du tableau n'est pas forcément le maximum**

(a) $f(-2) = 6 \times (-2) - (-2)^2 = -12 - 4 = -16$.

(b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$.

(c) $f(4) = 6 \times 4 - 4^2 = 24 - 16 = 8$. L'ordonnée de M est bien l'image de son abscisse : M est sur la courbe de f.

(d) Dans le tableau, $f(1) = 5$ et $f(5) = 5$: 1 et 5 sont deux antécédents de 5 par f.

(e) Faux : $f(3) = 6 \times 3 - 3^2 = 9$, et 9 est plus grand que 8. Le tableau ne donne que quelques valeurs, donc son plus grand nombre n'est pas forcément le maximum de f.

Ex. 38 ★★☆ **Deux tarifs de location de vélo**

(a) Le point où la courbe de f coupe l'axe des ordonnées a pour ordonnée $f(0) = 12$. Ce point n'est pas sur la courbe de g, car $g(0) = 4$. Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes, pas un point d'intersection avec un axe.

(b) $3x + 12 = 5x + 4$, donc $12 - 4 = 5x - 3x$, soit $8 = 2x$ et $x = 4$. L'équation a une seule solution : 4. Les deux courbes se coupent donc au point d'abscisse 4.

(c) $f(4) = 3 \times 4 + 12 = 24$ et $g(4) = 5 \times 4 + 4 = 24$. Pour 4 heures, on paie 24 euros avec chacun des deux tarifs.

(d) $f(6) = 3 \times 6 + 12 = 30$ et $g(6) = 5 \times 6 + 4 = 34$. Comme $g(6)$ est plus grand que $f(6)$, la courbe de g est au-dessus de celle de f pour $x = 6$. Le tarif B est plus cher : Noé doit choisir le tarif A et payer 30 euros.

Ex. 39 ★★☆ **Une courbe et une droite**

(a) Le point le plus bas du nuage est $(2\,;2)$. Le minimum de f est son ordonnée, 2, et il est atteint pour $x = 2$.

(b) Sur le nuage, $f(1) = 3$ et $f(4) = 6$. Par le calcul, $g(1) = 1 + 2 = 3$ et $g(4) = 4 + 2 = 6$.

(c) Pour $x = 1$ et pour $x = 4$, $f(x)$ et $g(x)$ sont égaux : les deux courbes se coupent aux points $(1\,;3)$ et $(4\,;6)$. Les solutions sont les abscisses 1 et 4, pas 3 et 6.
Vérification : $f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 6 = 3$ et $f(4) = 4^2 - 4 \times 4 + 6 = 6$.

Ex. 39 **(suite)**

(d) $f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 6 = 3$, et 3 est différent de 5 : P n'est pas sur la courbe de f. $g(3) = 3 + 2 = 5$: P est sur la droite de g. Ce n'est donc pas un point d'intersection des deux courbes.

Ex. 40 ★★★ **La balle de Yanis**

(a) $h(1{,}5) = -5 \times 1{,}5^2 + 15 \times 1{,}5 + 2 = -11{,}25 + 22{,}5 + 2 = 13{,}25$. Comme 13,25 est plus grand que 12, la balle monte plus haut que 12 m. Le plus grand nombre du tableau n'est pas forcément le maximum : le tableau ne donne que quelques points de la courbe. La hauteur maximale est 13,25 m.

(b) 1,5 est l'abscisse du point le plus haut : c'est l'instant où le maximum est atteint, pas le maximum. Le maximum est une valeur de $h(t)$, donc une ordonnée. Phrase correcte : « Le maximum de h est 13,25, atteint pour $t = 1{,}5$. »

(c) $5t(3 - t) = 15t - 5t^2$. On a $h(t) = 2$ quand $-5t^2 + 15t + 2 = 2$, c'est-à-dire $-5t^2 + 15t = 0$, soit $5t(3 - t) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $5t = 0$ ou $3 - t = 0$, donc $t = 0$ ou $t = 3$. Ce sont les deux seules solutions, déjà dans le tableau : la balle n'est à 2 m qu'au départ et au bout de 3 secondes.

(d) Le tableau donne $h(1) = 12$ et $h(2) = 12$: la droite coupe la courbe aux points d'abscisses 1 et 2 (et non en 12, qui est leur ordonnée). $h(2{,}5) = -5 \times 2{,}5^2 + 15 \times 2{,}5 + 2 = -31{,}25 + 37{,}5 + 2 = 8{,}25$. Comme 8,25 est plus petit que 12, la droite est au-dessus de la courbe : au bout de 2,5 s, la balle est plus basse que le drone.

Ex. 41 ★★★ **Une courbe, une droite, trois points communs**

(a) Le point le plus haut de la courbe est $D(3\,;4)$; $B(-2\,;3)$ est un sommet, mais plus bas. Le maximum de f est 4, atteint seulement pour $x = 3$.

(b) Faux. C est un creux de la courbe, mais la courbe finit en $E(4\,;-2)$, plus bas que C. Le point le plus bas est E, au bord de la courbe : le minimum de f est -2, atteint pour $x = 4$.

(c) Chaque point d'intersection est sur la droite, donc son ordonnée vaut $g(x) = x - 1$. $x - 1 = -1$ donne $x = 0$ (c'est le point C) ; $x - 1 = 1{,}5$ donne $x = 2{,}5$; $x - 1 = 2{,}5$ donne $x = 3{,}5$. Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses de ces points : 0, 2,5 et 3,5 (et non leurs ordonnées).

Ex. 41 **(suite)**

(d) Pour $x = -2$: $f(-2) = 3$ et $g(-2) = -2 - 1 = -3$, donc $f(-2)$ est plus grand que $g(-2)$: la courbe de f est au-dessus de la droite. Pour $x = 4$: $f(4) = -2$ et $g(4) = 4 - 1 = 3$, donc $g(4)$ est plus grand que $f(4)$: la droite est au-dessus de la courbe de f.

Ex. 42 ★★★ **Dans la serre, il fait plus chaud ?**

(a) Le point le plus haut du nuage est $(4\,;10)$. Le maximum de T est 10 : la température maximale dans la serre est 10 °C, atteinte pour $h = 4$, c'est-à-dire à 12 h.

(b) Les points les plus bas sont $(0\,;2)$ et $(8\,;2)$, aux deux bords de la courbe. Le minimum de T est 2, atteint pour $h = 0$ et pour $h = 8$ (à 8 h et à 16 h).

(c) $E(h) = h + 2$. On compare avec le nuage : $E(0) = 2 = T(0)$ et $E(6) = 8 = T(6)$; pour les autres valeurs, ce n'est pas égal (par exemple $E(4) = 6$ et $T(4) = 10$). Le calcul confirme : $T(6) = -0{,}5 \times 6^2 + 4 \times 6 + 2 = -18 + 24 + 2 = 8$. Les points d'intersection sont $(0\,;2)$ et $(6\,;8)$: les solutions de $T(h) = E(h)$ sont $h = 0$ et $h = 6$ (et non 2 et 8, qui sont des températures). Les températures sont égales à 8 h et à 14 h.

(d) En B2 : =-0,5*A2*A2+4*A2+2. La formule commence par = et utilise la cellule A2, qui contient h ; recopiée vers le bas, elle calcule $T(h)$ pour chaque ligne.

(e) $T(7) = -0{,}5 \times 7^2 + 4 \times 7 + 2 = -24{,}5 + 28 + 2 = 5{,}5$ et $E(7) = 7 + 2 = 9$. Comme $E(7)$ est plus grand que $T(7)$, c'est la courbe de E qui est au-dessus. À 15 h, il fait plus chaud dehors (9 °C) que dans la serre (5,5 °C).

7. *Exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : deux tarifs au tableur**

(a) En B2 : =6*B1+3, recopiée vers la droite.

(b) En B3 : =3*B1+21, recopiée vers la droite.

(c) $3 \times 4 + 21 = 33$: la cellule B3 affiche 33.

(d) $6 \times 10 + 3 = 63$: 10 entrées coûtent 63 € avec la formule A.

(e) $6n + 3 = 3n + 21$ donne $3n = 18$, donc $n = 6$. Pour 6 entrées, les deux formules coûtent autant : $6 \times 6 + 3 = 39$ €.

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur un tableau**

(a) Faux : $k(-3) = 5$, donc -3 est un antécédent de 5, pas son image. 5 n'est pas sur la première ligne, on ne connaît pas son image.

(b) Faux : $k(0) = -4$ veut dire que -4 est l'image de 0. L'antécédent de 0 lu dans le tableau est 2, car $k(2) = 0$.

(c) Faux : un tableau ne donne que quelques valeurs. On ne peut pas affirmer que 1 n'a pas d'antécédent.

(d) Faux : pour $x = 3$, $3^2 - 4 = 5$, alors que le tableau donne $k(3) = 4$. Une colonne qui ne vérifie pas la formule suffit.

(e) Vrai : l'abscisse est 2 et l'ordonnée est 0, et le tableau donne bien $k(2) = 0$.

Ex. 45 ★★☆ **Deux programmes de calcul**

(a) $(-7 + 5)^2 - (-7)^2 = (-2)^2 - 49 = 4 - 49 = -45$. Le programme A donne -45.

(b) $f(x) = (x + 5)^2 - x^2 = x^2 + 10x + 25 - x^2 = 10x + 25$.

(c) Je résous $f(x) = 0$: $10x + 25 = 0$, donc $x = -2{,}5$. Vérification : $(2{,}5)^2 - (-2{,}5)^2 = 0$. Il faut choisir $-2{,}5$.

(d) Je résous $10x + 25 = 3x + 10$: $7x = -15$, donc $x = -\frac{15}{7}$. Alors $g\left(-\frac{15}{7}\right) = -\frac{45}{7} + \frac{70}{7} = \frac{25}{7}$. Il faut choisir $-\frac{15}{7}$: les deux programmes donnent $\frac{25}{7}$.

Ex. 46 ★★☆ **La hauteur d'une balle**

(a) Le point d'abscisse 2 a pour ordonnée 8 : au bout de 2 s, la balle est à 8 m de hauteur.

(b) Le point le plus haut est $(3\,;9)$: la hauteur maximale est 9 m, atteinte au bout de 3 s.

(c) Les points d'ordonnée 5 ont pour abscisses 1 et 5 : la balle est à 5 m au bout de 1 s et au bout de 5 s.

(d) $h(3) = 6 \times 3 - 3^2 = 18 - 9 = 9$: la balle est bien à 9 m au bout de 3 s.

(e) $h(4{,}5) = 6 \times 4{,}5 - 4{,}5^2 = 27 - 20{,}25 = 6{,}75$: le point $(4{,}5\,;6{,}75)$ est bien sur la courbe.

Ex. 47 ★★★ **L'enclos de Gaspard**

(a) $A(3) = 3 \times (20 - 2 \times 3) = 3 \times 14 = 42$. Pour une largeur de 3 m, l'aire de l'enclos est 42 m².

(b) La formule commence par = et utilise la cellule B1 : =B1*(20-2*B1). Recopiée vers la droite, elle devient =C1*(20-2*C1), et ainsi de suite.

Ex. 47 (suite)

(c) F1 contient 8 : $A(8) = 8 \times (20 - 2 \times 8) = 8 \times 4 = 32$. Le tableur affiche 32 en F2. L'aire vaut donc 32 m² pour une largeur de 8 m.

(d) Faux. On résout $x(20 - 2x) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $20 - 2x = 0$, c'est-à-dire $x = 10$. Le nombre 0 a donc deux antécédents, 0 et 10. Dans ces deux cas, il n'y a pas d'enclos.

(e) Faux. On a bien $A(4) = 4 \times 12 = 48$ et $A(6) = 6 \times 8 = 48$, mais $A(5) = 5 \times 10 = 50$, et $50 > 48$. Parmi les largeurs du tableur, la plus grande aire est 50 m², obtenue pour une largeur de 5 m.

Ex. 48 ★★★ La température dans une serre

(a) 11 h, c'est 3 heures après 8 h : on lit l'ordonnée du point d'abscisse 3, c'est-à-dire 17. À 11 h, il fait 17 °C dans la serre.

(b) On cherche tous les points d'ordonnée 14 : il y en a deux, d'abscisses 2 et 6. Les antécédents de 14 sont 2 et 6, ce qui correspond à 10 h et à 14 h. À ces deux heures, il fait 14 °C.

(c) Le point le plus haut a pour coordonnées $(4\,;18)$. La température maximale est de 18 °C, atteinte 4 heures après 8 h, donc à 12 h.

(d) $T(2) = 8 \times 2 - 2^2 + 2 = 16 - 4 + 2 = 14$ et $T(6) = 8 \times 6 - 6^2 + 2 = 48 - 36 + 2 = 14$. Le calcul confirme bien que 2 et 6 sont des antécédents de 14.

(e) La variable x compte les heures après 8 h : à 8 h, $x = 0$ et à 16 h, $x = 8$. On a $T(0) = 8 \times 0 - 0^2 + 2 = 2$ et $T(8) = 8 \times 8 - 8^2 + 2 = 2$. Les antécédents de 2 par T sont donc 0 et 8, et non 8 et 16. Ils correspondent bien à 8 h et à 16 h.

Ex. 49 ★★★ Le défi de Yanis

(a) $-8 + 3 = -5$, puis $(-5)^2 = 25$, et non -25. Avec -8, le programme A donne 25.

(b) Programme A : $f(x) = (x + 3)^2$. Programme B : $g(x) = x^2 + 15$.

(c) On résout $(x + 3)^2 = 49$. Les deux nombres dont le carré vaut 49 sont 7 et -7.
Donc $x + 3 = 7$, ce qui donne $x = 4$, ou $x + 3 = -7$, ce qui donne $x = -10$. Vérification : $f(4) = 7^2 = 49$ et $f(-10) = (-7)^2 = 49$. Le nombre 49 a deux antécédents par f : 4 et -10.

Ex. 49 (suite)

(d) On résout $x^2 + 15 = 10$, c'est-à-dire $x^2 = -5$. Un carré n'est jamais négatif : cette équation n'a pas de solution. Yanis a tort : 10 n'a aucun antécédent par g.

(e) On résout $(x + 3)^2 = x^2 + 15$. On développe : $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 15$, donc $6x + 9 = 15$, puis $6x = 6$ et $x = 1$. Vérification : $f(1) = 4^2 = 16$ et $g(1) = 1^2 + 15 = 16$. Il faut choisir 1 : les deux programmes donnent alors 16.