49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels de 3e : image, antécédent, tableau de valeurs, graphique

À retenir : $f(a) = b$: b est l'image de a et a est un antécédent de b. Le point $(a\,;b)$ est sur $\mathcal{C}_f$ si $f(a) = b$. Pour trouver un antécédent de k, on résout $f(x) = k$. Attention : $(-3)^2 = 9$. Un tableau ne donne pas forcément tous les antécédents.

Ex. 1 ★☆☆ **Images et antécédents par le calcul** — On donne $f(x) = x^2 + 2x - 7$ et $g(x) = 4x - 9$.

(a) Calcule l'image de 0,5 par f.

(b) Tom écrit : « $f(-3) = -3^2 + 2 \times (-3) - 7 = -22$ ». Trouve son erreur et calcule $f(-3)$.

(c) Calcule l'image de 2 par g.

(d) Calcule l'antécédent de 2 par g.

(e) Détermine l'antécédent de 7 par g.

Ex. 2 ★☆☆ **Lire un tableau de valeurs** — Voici un tableau de valeurs d'une fonction h.

x	-3	-1	0	2	5	6
h(x)	4	0	2	-3	4	1

(a) Donne l'image de 2 par h.

(b) Donne un antécédent de 2 par h lu dans le tableau.

(c) Donne tous les antécédents de 4 lus dans le tableau.

(d) Lou dit : « 3 n'apparaît pas sur la deuxième ligne, donc 3 n'a aucun antécédent par h. » A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Vrai ou faux : la formule $h(x) = x + 1$ convient pour ce tableau. Justifie.

Ex. 3 ★★☆ **Un programme de calcul et sa courbe** — Programme : choisir un nombre ; l'élever au carré ; soustraire le triple du nombre de départ ; ajouter 2. On note $f(x)$ le résultat obtenu avec le nombre x, et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

(a) Applique le programme au nombre -3.

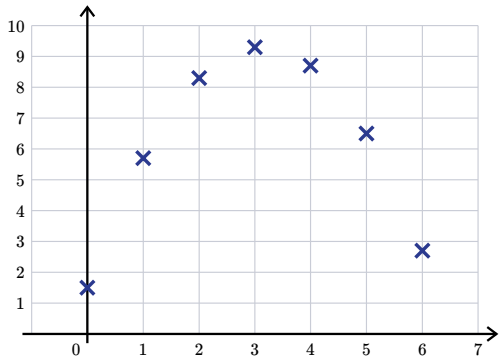
(b) Exprime $f(x)$ en fonction de x.

(c) Le point $A(-2\,;12)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifie par un calcul.

(d) Le point $B(4\,;5)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifie par un calcul.

(e) Montre que 1 et 2 sont deux antécédents de 0 par f.

Ex. 4 ★★☆ **La hauteur d'un ballon** — Inès lance un ballon. Le nuage donne sa hauteur (en m) toutes les secondes, de $t = 0$ à $t = 6$.



La hauteur est donnée par $h(t) = -0{,}8t^2 + 5t + 1{,}5$.

(a) Lis sur le nuage une valeur approchée de la hauteur au bout de 1 s.

(b) D'après le nuage, à quels instants mesurés le ballon est-il à plus de 8 m ?

(c) Calcule la valeur exacte de $h(1)$ et compare-la à ta lecture.

(d) Nina dit : « Le point $(5\,;6{,}5)$ montre que 5 est l'image de 6,5. » Corrige sa phrase et vérifie ce point par le calcul.

Ex. 5 ★★★ **Un tableau, une formule et trois affirmations** — Voici un tableau de valeurs d'une fonction p définie sur $\mathbb{R}$.

x	-2	-1	0	1	3	4
p(x)	5	0	-3	-4	0	5

(a) Noé affirme : « $p(0) = -3$, donc l'antécédent de 0 est -3. » A-t-il raison ? Justifie en lisant le tableau.

(b) Léa propose la formule $p(x) = x - 3$, car « elle marche pour $x = 0$ et $x = 3$ ». Cette formule convient-elle au tableau ? Justifie.

(c) On admet que $p(x) = x^2 - 2x - 3$. Vérifie par un calcul détaillé que cette formule redonne la colonne $x = -2$.

(d) Hugo affirme : « 12 n'est pas sur la deuxième ligne, donc 12 n'a pas d'antécédent par p. » Calcule $p(-3)$ et $p(5)$, puis conclus.

(e) Montre que $p(x) - 5 = (x - 4)(x + 2)$, puis détermine tous les antécédents de 5 par p.

Ex. 6 ★★★ **Du programme de calcul aux points de la courbe** — Programme : choisir un nombre ; calculer 3 moins le double de ce nombre ; multiplier le résultat par le nombre de départ ; ajouter 4. On note $g(x)$ le résultat obtenu avec le nombre x, et $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g.

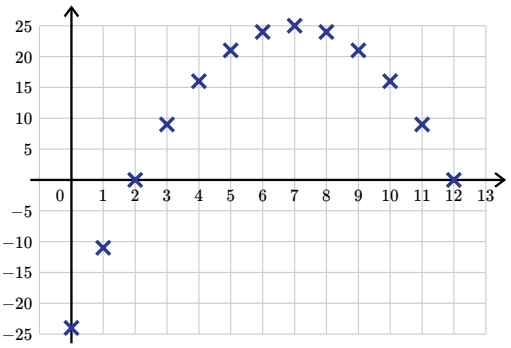
(a) Exprime $g(x)$ en fonction de x, puis montre que $g(x) = -2x^2 + 3x + 4$.

(b) Le point $A(-2\,;-10)$ appartient-il à $\mathcal{C}_g$? Justifie par un calcul.

(c) Sami affirme : « Comme A est sur $\mathcal{C}_g$, le point $B(-10\,;-2)$ l'est aussi. » A-t-il raison ? Justifie par un calcul.

(d) Détermine les coordonnées des points de $\mathcal{C}_g$ d'ordonnée 4. Indice : pars de l'expression de $g(x)$ tirée du programme.

Ex. 7 ★★★ **Le bénéfice d'une céramiste** — Maëlle fabrique x dizaines de bols par mois, avec $x \in [0\,;12]$. Son bénéfice, en centaines d'euros, est $B(x) = -x^2 + 14x - 24$. Le nuage donne $B(x)$ pour x entier de 0 à 12.



(a) Lis sur le nuage une valeur approchée de $B(3)$, puis calcule $B(3)$ et interprète le résultat.

(b) Zoé lit sur le nuage : « Le seul antécédent de 16 est 4. » A-t-elle raison ? Justifie par une lecture, puis par un calcul.

(c) Le nuage ne permet pas de lire les antécédents de 12,75. Montre que $B(x) - 12{,}75 = -(x - 3{,}5)(x - 10{,}5)$.

(d) Déduis-en par le calcul les antécédents de 12,75 par B, puis interprète-les dans la situation.

(e) Yanis calcule $B(15) = -39$ pour prévoir le bénéfice de 150 bols. Vérifie son calcul, puis explique pourquoi ce résultat n'a pas de sens ici.

2. *Image, antécédent : le point appartient-il à la courbe ?*

À retenir : Image : je remplace x, elle est unique. Antécédents de k : je résous $f(x) = k$ et je les donne tous ($x^2 = 9$: -3 et 3). Il peut n'y en avoir aucun. $M(a\,;b) \in \mathcal{C}_f \iff a \in D_f$ et $f(a) = b$.

Ex. 8 ★☆☆ **Images et antécédents par le calcul** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5$.

(a) Calcule l'image de -3 par f.

(b) Calcule $f(0{,}5)$.

(c) Détermine tous les antécédents de 11 par f.

(d) Détermine les antécédents de -5 par f.

(e) Le nombre -9 a-t-il des antécédents par f ? Justifie.

Ex. 9 ★☆☆ **Le point est-il sur la courbe ?** — Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $h(x) = \dfrac{6}{x-2}$. On note $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

(a) Les points $A(5\,;2)$ et $B(-1\,;-3)$ appartiennent-ils à $\mathcal{C}_h$? Justifie par un calcul.

(b) Explique pourquoi aucun point de $\mathcal{C}_h$ n'a pour abscisse 2.

(c) Calcule l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_h$ d'abscisse 8.

(d) Donne les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_h$ avec l'axe des ordonnées.

(e) $\mathcal{C}_h$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifie.

(f) Lina voit le point $D(4\,;2{,}9)$ sur la courbe affichée par sa calculatrice. A-t-elle raison ? Justifie par un calcul.

(g) Vrai ou faux ? Un cercle peut être la courbe représentative d'une fonction. Justifie.

Ex. 10 ★★☆ **Corriger des erreurs sur les antécédents** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5x$.

(a) Noah écrit : « $3x^2 + 5x = 0$, je divise par x : $3x + 5 = 0$. Donc 0 a un seul antécédent. » Repère son erreur, puis donne tous les antécédents de 0.

(b) Pour trouver les antécédents de 2, Inès calcule $f(2) = 22$. Explique son erreur. Que signifie vraiment $f(2) = 22$?

(c) On admet que $3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2)$. Détermine tous les antécédents de 2 par f.

(d) Vrai ou faux ? « Le nombre -1 a deux images par f : -2 et -8. » Justifie par un calcul.

Ex. 11 ★★☆ **La hauteur d'un ballon** — Chloé lance un ballon depuis le sol. Sa hauteur en mètres, t secondes après le lancer, est $h(t) = -5t^2 + 15t$ pour $t \in [0\,;3]$. On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h.

(a) Calcule la hauteur du ballon au bout de 0,5 seconde.

(b) Le point $A(4\,;-20)$ appartient-il à $\mathcal{C}_h$? Justifie.

(c) Détermine les points d'intersection de $\mathcal{C}_h$ avec l'axe des abscisses. Interprète-les.

(d) On admet que $-5t^2 + 15t - 10 = -5(t-1)(t-2)$. À quels instants le ballon est-il à 10 m de hauteur ?

Ex. 12 ★★★ **Combien d'antécédents ?** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 - 9$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

(a) Montre que, pour tout réel x, $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

(b) Donne les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

(c) Détermine les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

(d) Mia affirme : « $f(4) = 16$, donc 4 est l'antécédent de 16 par f. » Corrige sa phrase en donnant tous les antécédents de 16.

(e) Le nombre -10 a-t-il des antécédents par f ? Justifie. Puis, selon la valeur du réel k, donne le nombre d'antécédents de k.

Ex. 13 ★★★ **Points sur la courbe, points trompeurs** — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

(a) Paul affirme : « $A(3\,;7)$ appartient à $\mathcal{C}_g$, car $2 \times 3 + 1 = 7$ ». Explique ses deux erreurs.

(b) Une calculatrice affiche $g(6) \approx 4{,}33$. Le point $C(6\,;4{,}33)$ appartient-il à $\mathcal{C}_g$? Justifie par un calcul exact.

(c) Le point $P(-2\,;b)$ appartient à $\mathcal{C}_g$. Calcule b. Un autre point de $\mathcal{C}_g$ a-t-il pour ordonnée b ? Justifie.

(d) Détermine, s'ils existent, les points de $\mathcal{C}_g$ d'ordonnée 3, puis ceux d'ordonnée 2.

(e) Hugo affirme : « la droite d'équation $x = 1$ coupe $\mathcal{C}_g$ en deux points ». Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Le bénéfice d'une fromagerie** — Une fromagerie produit x tonnes de fromage par mois, avec $x \in [0\,;10]$. Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = -2x^2 + 16x - 24$.

(a) Calcule $B(0)$ et interprète-le. Quelle autre production donne le même bénéfice ? Justifie.

(b) On admet que $B(x) = -2(x-2)(x-6)$. Pour quelles productions le bénéfice est-il nul ?

(c) On admet aussi que $B(x) = -2(x-4)^2 + 8$. Le bénéfice peut-il atteindre 10 000 € ? Et 8 000 € ? Justifie.

(d) Pour quelles productions la fromagerie perd-elle 64 000 € ?

3. *Ensemble de définition*

À retenir : Je cherche les valeurs interdites sur l'expression de départ : dénominateur $\neq 0$, expression sous la racine $\geqslant 0$ (et > 0 si la racine est au dénominateur). Ensuite je réunis les conditions. Exemple : $\frac{1}{x^2-9}$ donne $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;3\}$.

Ex. 15 ★★☆ **Automatismes : quotients et polynômes** — Pour chaque fonction, cherche les valeurs interdites s'il y en a, puis écris son ensemble de définition.

(a) $f(x) = \frac{7}{x+6}$: donne la valeur interdite, puis écris D_f.

(b) $g(x) = \frac{x}{2x-10}$: écris D_g de deux façons, avec $\setminus$ puis avec des intervalles.

(c) $h(x) = \frac{3x+1}{x^2-4}$: combien y a-t-il de valeurs interdites ? Donne D_h.

(d) $k(x) = \frac{5}{x^2+1}$: k a-t-elle une valeur interdite ? Justifie, puis donne D_k.

(e) $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8$: donne D_p.

(f) $q(x) = \frac{1}{x(x+3)}$: donne les valeurs interdites, puis D_q.

Ex. 16 ★★☆ **Automatismes : avec une racine carrée** — Écris la condition à respecter, résous-la, puis réponds.

(a) Donne l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x+5}$.

(b) Donne l'ensemble de définition de $g(x) = \sqrt{6-2x}$.

(c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$: la borne 1 appartient-elle à D_h ? Justifie, puis donne D_h.

(d) Quel est le plus petit nombre qui a une image par $k(x) = \sqrt{2x-7}$? Donne ensuite D_k.

(e) Pour $m(x) = \frac{4}{\sqrt{10-5x}}$, le nombre 2 a-t-il une image ? Justifie, puis donne D_m.

(f) Le nombre -3 appartient-il à l'ensemble de définition de $r(x) = \sqrt{1-x}$? Justifie par un calcul.

Ex. 17 ★★☆ **Repère l'erreur** — Chaque élève donne un ensemble de définition. Vrai ou faux ? Justifie, et corrige si besoin.

(a) Lina : pour $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}$, « $f(x) = x - 5$, donc $D_f = \mathbb{R}$ ».

(b) Hugo : pour $g(x) = \sqrt{x+8}$, « $D_g =]-8\,;+\infty]$ ».

(c) Maëlle : pour $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x+4}}$, « $D_h = [-4\,;+\infty[$ ».

(d) Noé : pour $k(x) = \frac{4}{x^2-36}$, « $D_k =]-\infty\,;-6[\cup]-6\,;6[\cup]6\,;+\infty[$ ».

Ex. 18 ★★☆ **Réunir les conditions, penser à la situation** — Dans chaque question, écris toutes les conditions avant de conclure.

(a) $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x}$: écris les deux conditions, puis donne D_f avec des intervalles.

(b) $g(x) = \frac{3}{x-4} + \sqrt{10-2x}$: écris les deux conditions, puis donne D_g avec des intervalles.

(c) Jade lance un ballon depuis le sol. Sa hauteur, en m, après x secondes est $h(x) = -5x^2 + 20x$, jusqu'à ce qu'il retombe. Résous $h(x) = 0$, puis donne l'ensemble de définition adapté à la situation.

Ex. 18 (suite)

(d) Rayan découpe un carré de côté x cm à chaque coin d'un carton de 30 cm sur 20 cm pour faire une boîte sans couvercle. Quelles valeurs x peut-il prendre ? Justifie.

Ex. 19 ★★★ Racine, quotient : le sens des inégalités — On considère $g(x) = \sqrt{8-2x}$, $h(x) = \frac{3}{\sqrt{8-2x}}$ et $k(x) = \sqrt{8-2x} + \frac{5}{x^2-49}$.

(a) Écris la condition pour que $g(x)$ existe. Résous-la en justifiant chaque étape, puis donne D_g.

(b) Explique pourquoi D_h n'est pas égal à D_g, puis donne D_h.

(c) Écris toutes les conditions pour que $k(x)$ existe, résous-les, puis donne D_k avec des intervalles.

(d) Le nombre 4 a-t-il une image par h ? Et par k ? Justifie, puis calcule l'image quand elle existe.

Ex. 20 ★★★ Problème : le coût moyen d'un atelier — Un atelier fabrique x centaines de lampes par jour, avec $0 \leqslant x \leqslant 10$. Le coût total, en centaines d'euros, est $C(x) = x^2 + 2x + 16$. Le coût moyen d'une centaine de lampes est $M(x) = \frac{x^2+2x+16}{x}$, en centaines d'euros.

(a) Sur quel ensemble la formule $x^2 + 2x + 16$ est-elle définie ? Quel est l'ensemble de définition de C dans cette situation ? Justifie.

(b) Donne l'ensemble de définition de M dans cette situation. Justifie chaque crochet.

(c) Calcule $M(4)$ et $M(10)$. Interprète $M(4)$ par une phrase, en euros par lampe.

(d) Montre que, pour tout x de D_M, $M(x) - 10 = \frac{(x-4)^2}{x}$.

(e) Déduis-en le coût moyen minimum et la production correspondante. Où utilises-tu $x > 0$?

Ex. 21 ★★★ Simplifier n'efface pas une valeur interdite — On pose $p(x) = \frac{3x-6}{x^2+2x+2}$, $q(x) = \frac{x+4}{x^2-16}$ et $r(x) = \frac{1}{x-4}$. On note $\mathcal{C}_q$ la courbe représentative de q.

(a) Vérifie que $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$. Déduis-en que le dénominateur de p ne s'annule jamais, puis donne D_p.

(b) Détermine les valeurs interdites de q, puis donne D_q.

(c) Factorise $x^2 - 16$, puis montre que $q(x) = r(x)$ pour tout x de D_q.

(d) Le point $A(-4\,;-0{,}125)$ appartient-il à $\mathcal{C}_q$? Et le point $B(5\,;1)$? Justifie par un calcul.

(e) Inès affirme : « q et r sont la même fonction. » A-t-elle raison ? Justifie.

4. *Résoudre graphiquement $f(x) = k$, $f(x) < k$, $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$*

À retenir : $f(x) = k$: abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ sur la droite $y = k$; $f(x) = g(x)$: abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Avec $<$ ou $>$, bornes exclues ; avec $\leqslant$ ou $\geqslant$, incluses. Ex. : sous $y = 1$ entre 2 et 6 : $S =]2\,;6[$.

Ex. 22 ★★★ Lire les solutions de f(x) = k et f(x) < k — La fonction f est définie sur $[-3\,;5]$:

x	-3		1		5
f(x)	6	↘	-2	↗	6

$\mathcal{C}_f$ coupe la droite $y = 0$ aux points d'abscisses -1 et 3, et la droite $y = 2{,}5$ aux points d'abscisses -2 et 4. Résous graphiquement sur $[-3\,;5]$:

(a) $f(x) = 0$. (b) $f(x) < 0$. (c) $f(x) \geqslant 2{,}5$.

(d) $f(x) = 6$. (e) $f(x) = -3$. (f) $f(x) \leqslant -2$.

Ex. 23 ★★★ Vrai ou faux : deux courbes qui se coupent — Les fonctions f et g sont définies sur $[-4\,;4]$. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points seulement : $A(-2\,;5)$ et $B(3\,;0)$. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-2\,;3[$ et au-dessous sur le reste de l'intervalle. $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -3 et 3. Vrai ou faux ? Justifie.

(a) « Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont 5 et 0. »

(b) « Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont -3 et 3. »

(c) « L'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $]-2\,;3[$. »

(d) « L'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant g(x)$ est $[-2\,;3]$. »

(e) « 0 est solution de $f(x) < g(x)$. »

Ex. 24 ★★★ Confirmer par le calcul ce que montre l'écran — Sur $[-3\,;5]$, on pose $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = x + 1$. Sur l'écran de sa calculatrice, Lina voit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se couper en deux points, d'abscisses environ -1 et 4. Entre ces deux points, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$.

(a) Calcule $f(4)$ et $g(4)$. Que peux-tu en déduire pour $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

(b) Démontre que $f(x) - g(x) = (x+1)(x-4)$.

(c) Résous $f(x) = g(x)$ par le calcul.

(d) Donne l'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ sur $[-3\,;5]$, puis vérifie avec $x = 0$.

Ex. 25 ★★★ Température sur une journée — La fonction T donne la température (en °C) à Ambert en fonction de l'heure x, pour $x \in [0\,;24]$:

x	0		14		24
T(x)	6	↗	18	↘	10

(a) Combien de solutions l'équation $T(x) = 12$ a-t-elle sur $[0\,;24]$? Justifie avec le tableau.

(b) Même question pour l'équation $T(x) = 8$.

Ex. 25 **(suite)**

(c) Résous $T(x) \geqslant 18$. Interprète le résultat.

(d) Ben lit sur l'écran de sa calculatrice que $T(x) = 15$ pour $x \approx 7$ et $x \approx 19$. Donne les heures où il fait au moins 15 °C. Pourquoi ta réponse est-elle approchée ?

Ex. 26 ★★★ **Hauteur d'un ballon** — Sur la plage, Noah lance un ballon verticalement depuis le sol. Sa hauteur (en m) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t$, pour $t \in [0\,;4]$. Voici son tableau de variations :

t	0		2		4
h(t)	0	↗	20	↘	0

(a) Démontre que $h(t) - 15 = -5(t-1)(t-3)$ pour tout $t \in [0\,;4]$.

(b) Résous par le calcul l'équation $h(t) = 15$, puis interprète le résultat dans la situation.

(c) À l'aide du tableau de variations, résous $h(t) \geqslant 15$. Pendant combien de secondes le ballon est-il à 15 m ou plus ?

(d) Résous $h(t) < 15$. Justifie le choix du crochet aux bornes 0 et 4.

(e) Résous l'équation $h(t) = 20$, puis l'inéquation $h(t) > 20$.

Ex. 27 ★★★ **Lecture approchée, solution exacte** — Sur $[0\,;4]$, on pose $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$ et $g(x) = 2x + 1$. Sur l'écran de sa calculatrice, Yanis voit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se couper en deux points, d'abscisses environ 0,3 et 3.

(a) Calcule $f(0{,}3)$ et $g(0{,}3)$. Le nombre 0,3 est-il une solution exacte de $f(x) = g(x)$? Justifie.

(b) Démontre que $f(x) - g(x) = (3x-1)(x-3)$.

(c) Résous par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$ sur $[0\,;4]$.

(d) Pour résoudre $f(x) = g(x)$, Inès résout $f(x) = 0$ et trouve $\frac{2}{3}$ et 2. Vérifie que ce sont des zéros de f, puis explique son erreur.

(e) Calcule $f(1)$ et $g(1)$. Déduis-en la position des courbes, puis résous $f(x) < g(x)$.

Ex. 28 ★★★ **Tout lire sur un tableau de variations** — La fonction f est définie sur $[-4\,;5]$ par son tableau de variations :

x	-4		-1		2		5
f(x)	3	↘	-2	↗	4	↘	1

La droite d'équation $y = 1$ coupe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -3, 0 et 5, et seulement en ces points.

(a) Combien de solutions l'équation $f(x) = 3$ a-t-elle sur $[-4\,;5]$? Justifie avec le tableau.

(b) Pour l'équation $f(x) = 1$, Tom écrit $S = \{1\}$. Corrige son erreur.

Ex. 28 **(suite)**

(c) Résous l'inéquation $f(x) < 1$. Justifie avec les variations de f.

(d) Résous $f(x) \geqslant 1$, puis $f(x) > 1$. Explique pourquoi la borne 5 change de statut.

(e) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $[-4\,;5]$.

5. *Sens de variation, tableau de variations, comparer deux images*

À retenir : Croissante sur I : $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ pour TOUS a, b de I. Tableau : 1re ligne = abscisses, 2e ligne = images. Comparer : même intervalle de monotonie ; ordre conservé si croissante, inversé si décroissante ($0 \leqslant 1{,}3 < 1{,}6$ donc $1{,}3^2 < 1{,}6^2$).

Ex. 29 ★★★ **Lire un tableau de variations** — Une fonction f définie sur $[-2\,;7]$ a le tableau de variations suivant. Sur chaque flèche, f est strictement monotone.

x	-2		3		7
f(x)	4	↘	-5	↗	1

(a) Sur quel intervalle f est-elle décroissante ?

(b) Quel est le minimum de f sur $[-2\,;7]$? En quelle valeur de x est-il atteint ?

(c) Quel est le maximum de f sur $[-2\,;7]$?

(d) Tom lit : « f est croissante sur $[-5\,;1]$ ». Repère son erreur et corrige-la.

(e) Encadre $f(x)$ pour $x \in [3\,;7]$.

(f) Encadre $f(x)$ pour $x \in [-2\,;3]$.

(g) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle sur $[-2\,;7]$?

(h) Combien de solutions l'équation $f(x) = 2$ a-t-elle sur $[-2\,;7]$?

Ex. 30 ★★★ **Comparer deux images sans calcul** — On rappelle : $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$; $x \mapsto mx + p$ est croissante si $m > 0$, décroissante si $m < 0$. Réponds sans calculer les images.

(a) Compare $(-2{,}7)^2$ et $(-3{,}1)^2$.

(b) Compare $\dfrac{1}{0{,}7}$ et $\dfrac{1}{0{,}9}$.

(c) Soit $g(x) = -4x + 1$. Range dans l'ordre croissant $g(2{,}53)$, $g(2{,}35)$ et $g(-1{,}6)$.

(d) Complète par $<$ ou $>$ sans calculer : $\dfrac{1}{-4{,}5} \ldots \dfrac{1}{-3{,}8}$.

(e) Compare $(-1{,}2)^2$ et $0{,}9^2$.

Ex. 31 ★★☆ **Température sur une journée** — Lou relève la température $T(h)$, en °C, à l'heure h, entre 6 h et 22 h. La température monte de 6 h à 15 h, puis descend de 15 h à 22 h. On a $T(6) = 4$, $T(15) = 17$ et $T(22) = 9$.

a. Dresse le tableau de variations de T sur $[6\,;22]$.

b. Quelle est la température maximale ? À quelle heure est-elle atteinte ?

c. Encadre $T(h)$ pour $h \in [15\,;22]$.

d. Combien de fois la température vaut-elle exactement 12 °C entre 6 h et 22 h ? Justifie.

e. Peut-on comparer $T(10)$ et $T(20)$ à l'aide du tableau ? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **Vrai ou faux sur le sens de variation** — On rappelle : la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

a. Soit $u(x) = x^2 - 3x + 1$ sur $[0\,;5]$. Kenza calcule $u(0) = 1$, $u(4) = 5$ et $u(5) = 11$, puis conclut : « u est croissante sur $[0\,;5]$ ». Vrai ou faux ? Justifie.

b. « Si $f(1) < f(2)$, alors f ne peut pas être décroissante sur $[0\,;3]$. » Vrai ou faux ? Justifie.

c. « Une fonction constante sur $[1\,;4]$ est croissante sur $[1\,;4]$. » Vrai ou faux ? Justifie.

d. Dresse le tableau de variations de la fonction inverse sur $[-2\,;0[\cup]0\,;3]$.

Ex. 33 ★★★ **Démontrer un sens de variation** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 5$.

a. Montre que, pour tous réels a et b, $f(b) - f(a) = (b - a)(b + a - 8)$.

b. Soit a et b deux réels de $[4\,;+\infty[$ avec $a < b$. Étudie le signe de $f(b) - f(a)$, puis conclus sur le sens de variation de f sur $[4\,;+\infty[$.

c. Étudie de même le sens de variation de f sur $]-\infty\,;4]$.

d. Dresse le tableau de variations de f sur $[1\,;9]$.

e. Peut-on comparer $f(3{,}3)$ et $f(4{,}7)$ à l'aide du sens de variation ? Compare-les en utilisant la question 1.

Ex. 34 ★★★ **Une valeur interdite dans le tableau** — Soit $f(x) = \frac{6}{x}$ sur $D_f = [-3\,;0[\cup]0\,;3]$. On admet le tableau de variations ci-dessous. La double barre marque la valeur interdite 0.

x	-3		0		3
f(x)	-2	↘	‖	↘	2

a. Max affirme : « f est décroissante sur D_f et $-0{,}5 < 0{,}5$, donc $f(-0{,}5) > f(0{,}5)$ ». A-t-il raison ? Justifie par un calcul.

b. Compare $f(-2{,}5)$ et $f(-0{,}4)$ sans les calculer. Justifie.

c. Encadre $f(x)$ pour $x \in [1\,;3]$.

Ex. 34 (suite)

d. Montre que l'équation $f(x) = 4$ n'a aucune solution sur $[-3\,;0[$.

e. Résous l'équation $f(x) = 4$ par le calcul sur $]0\,;3]$.

Ex. 35 ★★★ **Altitude d'un randonneur** — Pendant une randonnée, Ilyes est à l'altitude $A(t)$, en mètres, t heures après le départ, avec $t \in [0\,;6]$. Sur chaque flèche, A est strictement monotone.

t	0		2		5		6
A(t)	800	↗	1400	↘	600	↗	900

a. Noé affirme : « Ilyes passe plus de temps à monter qu'à descendre ». Vrai ou faux ? Justifie.

b. Compare $A(3)$ et $A(4{,}5)$ sans calcul. Justifie.

c. Encadre $A(t)$ pour $t \in [2\,;6]$. Justifie.

d. Combien de fois Ilyes est-il à 850 m d'altitude ? Justifie flèche par flèche.

e. Lina affirme : « À 1 h, Ilyes est plus haut qu'à 5 h ». Vrai ou faux ? Justifie.

6. *Maximum et minimum*

À retenir : Le maximum M de f sur I est une image : $f(c) = M$ et $f(x) \leqslant M$ pour tout x de I. Le nombre c est l'abscisse où il est atteint. Il dépend de I et peut être atteint à une borne. Exemple : $7 - (x-2)^2 \leqslant 7$ et l'expression vaut 7 en $x = 2$.

Ex. 36 ★☆☆ **Lire un extrémum dans un tableau de variations** — Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-3\,;5]$.

x	-3		1		5
f(x)	2	↘	-4	↗	6

a. Quel est le maximum de f sur $[-3\,;5]$? En quelle valeur de x est-il atteint ?

b. Lina affirme : « Sur $[-3\,;1]$, le maximum de f est -3. » Corrige son erreur.

c. Complète : « Sur $[-3\,;5]$, f admet un minimum égal à … , atteint en … ».

d. Encadre $f(x)$ pour tout x de $[-3\,;5]$.

Ex. 37 ★☆☆ **Extrémum d'une forme « carré + nombre »** — On donne quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-4)^2 + 3$, $g(x) = 5 - (x+2)^2$, $h(x) = -2(x-1)^2 - 6$ et $k(x) = 3(x+0{,}5)^2$.

a. Donne le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et la valeur de x où il est atteint.

b. Vrai ou faux : « g admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à -2 ». Justifie.

Ex. 37 (suite)

(c) Complète : « h admet sur $\mathbb{R}$ un … égal à … , atteint en … ».

(d) Inès écrit : « $k(x) \geqslant -1$ pour tout x, donc le minimum de k est -1. » Corrige son erreur.

(e) Traduis par une égalité et une inégalité : « m admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à 9, atteint en -1 ».

Ex. 38 ★★☆ **Le bénéfice maximal d'une entreprise** — Une entreprise fabrique x centaines d'objets, avec $x \in [2\,;12]$. Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = -x^2 + 14x - 33$.

(a) Développe $-(x-7)^2 + 16$ et vérifie que tu obtiens $B(x)$.

(b) Calcule $B(7)$.

(c) Démontre que $B(x) - B(7) \leqslant 0$ pour tout x de $[2\,;12]$.

(d) Conclus : quel est le bénéfice maximal, et pour combien d'objets est-il atteint ?

(e) Yanis remarque que $B(x) \leqslant 20$ pour tout x de $[2\,;12]$. Peut-il dire que le maximum de B est 20 ? Justifie.

Ex. 39 ★★☆ **L'extrémum dépend de l'intervalle** — Rappel : la fonction carré $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

(a) Donne le maximum et le minimum de la fonction carré sur $[-3\,;2]$, et dis où chacun est atteint.

(b) Hugo affirme : « Sur $[-4\,;-1]$, le maximum de la fonction inverse est -1. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) La fonction carré admet-elle un maximum sur $]0\,;1[$? Justifie.

(d) Kenza affirme : « Le minimum de la fonction carré est toujours 0. » Donne le minimum de la fonction carré sur $[1\,;4]$ et corrige sa phrase.

Ex. 40 ★★★ **Démontrer un maximum, puis changer d'intervalle** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 8x - 10$.

(a) Calcule $f(4)$.

(b) Montre que, pour tout réel x, $f(x) - f(4) = -(x-4)^2$.

(c) Déduis-en que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$. Donne sa valeur et la valeur de x où il est atteint.

(d) Soit a et b deux réels avec $4 \leqslant a < b$. Montre que $f(b) - f(a) = (b-a)(8-a-b)$, puis déduis-en que f est décroissante sur $[4\,;+\infty[$.

(e) Tom affirme : « Sur $[5\,;8]$, le maximum de f est 6, comme sur $\mathbb{R}$. » Corrige-le en donnant le maximum et le minimum de f sur $[5\,;8]$.

Ex. 41 ★★★ **Le tableau de valeurs ne dit pas tout** — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 6x + 7$. Malik a calculé ce tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4
g(x)	7	3	3	7	15

et affirme : « Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est 3, atteint en 1 et en 2. »

(a) Calcule $g(1{,}5)$.

(b) Montre que, pour tout réel x, $g(x) - g(1{,}5) = 2(x - 1{,}5)^2$.

(c) Démontre que g admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Donne sa valeur et la valeur de x où il est atteint.

(d) L'affirmation de Malik est-elle juste ? Justifie et explique l'erreur.

(e) On admet que g est croissante sur $[2\,;4]$. Donne le minimum et le maximum de g sur $[2\,;4]$, en précisant où chacun est atteint.

Ex. 42 ★★★ **L'enclos de Noa contre un mur** — Noa a 40 m de grillage pour faire un enclos rectangulaire contre un mur. Le grillage forme trois côtés : deux côtés perpendiculaires au mur, de longueur x m chacun, et un côté parallèle au mur. On a $x \in]0\,;20[$.

(a) Exprime en fonction de x la longueur du côté parallèle au mur, puis l'aire $A(x)$ de l'enclos, en m².

(b) Vérifie que, pour tout réel x, $A(x) = 200 - 2(x-10)^2$.

(c) Démontre que l'aire admet un maximum sur $]0\,;20[$. Conclus : dimensions de l'enclos et aire maximale, avec l'unité.

(d) En fait, le mur ne mesure que 16 m. Il faut donc $40 - 2x \leqslant 16$. Montre qu'alors $x \in [12\,;20[$.

(e) On admet que A est strictement décroissante sur $[12\,;20[$. Donne l'aire maximale dans ce cas, puis justifie que A n'a pas de minimum sur cet intervalle.

7. *Problèmes d'optimisation*

À retenir : Je fixe x (unité, intervalle), j'exprime la grandeur, je prouve l'extrémum. Si le candidat est hors de l'intervalle, je regarde les bornes. Je conclus avec x ET l'extrémum, unité comprise : $9 - (x-2)^2 \leqslant 9$, donc maximum 9 atteint en $x = 2$.

Ex. 43 ★☆☆ **Poser le problème : variable, intervalle, grandeur** — Pour chaque situation, réponds à la question posée, sans chercher d'extrémum.

(a) Un point M se déplace sur un segment $[AB]$ de longueur 8 cm et on note $x = AM$. Donne l'unité et l'intervalle de x.

Ex. 43 **(suite)**

(b) Un club compte 200 adhérents à 30 € l'année. Chaque euro de baisse du prix attire 10 adhérents de plus. On note x la baisse du prix, en euros. Exprime la recette $R(x)$ du club.

(c) Pour ce club, dans quel intervalle varie x ? Justifie.

(d) Dans une feuille carrée de 14 cm de côté, on découpe un carré de côté x cm à chacun des quatre coins, puis on plie pour obtenir une boîte sans couvercle. Exprime son volume $V(x)$ en fonction de x.

(e) Pour cette boîte, dans quel intervalle varie x ?

(f) Une entreprise vend x objets à 12 € pièce. Le coût de production, en euros, est $C(x) = x^2 + 2x + 9$. Exprime le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.

Ex. 44 ★☆☆ **Lire un tableau de variations : la valeur de x ou le maximum ?** — Une coopérative produit chaque semaine x tonnes de compote, avec $x \in [0\,;8]$. Son bénéfice, en centaines d'euros, vaut $B(x) = -x^2 + 6x - 2$. Voici le tableau de variations de B :

x	0		3		8
B(x)	-2	↗	7	↘	-18

(a) Quelle production faut-il prévoir pour obtenir le bénéfice maximal ?

(b) Quel est ce bénéfice maximal, en euros ?

(c) Léa affirme : « Plus la coopérative produit, plus son bénéfice augmente. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Quel est le bénéfice minimal sur $[0\,;8]$, et pour quelle production est-il atteint ?

(e) La production est maintenant limitée à l'intervalle $[4\,;8]$. Quel est alors le bénéfice maximal ? Justifie à l'aide du tableau.

Ex. 45 ★★☆ **L'enclos d'Inès : périmètre fixé** — Inès a 28 m de grillage pour clôturer les quatre côtés d'un enclos rectangulaire. On note x la longueur d'un côté de l'enclos et $\mathcal{A}(x)$ son aire.

(a) Donne l'unité de x. Exprime la longueur du côté voisin en fonction de x, puis précise l'intervalle de x.

(b) Montre que $\mathcal{A}(x) = 14x - x^2$.

(c) Complète le tableau de valeurs ci-dessous, puis conjecture le maximum de $\mathcal{A}$.

x	5	6	7	8	9
A(x)					

(d) Montre que $\mathcal{A}(7) - \mathcal{A}(x) = (x-7)^2$. Quelles dimensions donnent l'aire maximale ? Quelle est cette aire ?

Ex. 46 ★★☆ **Bénéfice d'un atelier : attention à l'intervalle** — Un atelier fabrique chaque jour x lampes, avec $x \in [0\,;10]$. Chaque lampe est vendue 40 €. Le coût de fabrication, en euros, vaut $C(x) = x^2 + 10x + 50$. On note $B(x)$ le bénéfice, en euros.

(a) Calcule le bénéfice réalisé pour 4 lampes fabriquées et vendues.

(b) Exprime $B(x)$ en fonction de x, sous forme développée.

(c) Théo calcule $B(15) = 175$ et conclut : « Le bénéfice maximal est de 175 €. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) On admet que B est croissante sur $[0\,;10]$. Combien de lampes faut-il fabriquer pour un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Ex. 47 ★★★ **La boîte sans couvercle de Maëlys** — Maëlys découpe un carré de côté x à chaque coin d'une feuille carrée de 18 cm de côté. Elle replie les bords pour obtenir une boîte sans couvercle, de hauteur x. On note $V(x)$ le volume de la boîte.

(a) Donne l'unité de x et justifie que $x \in]0\,;9[$. Exprime le côté du fond de la boîte, puis $V(x)$, en fonction de x.

(b) Complète le tableau de valeurs :

x	1	2	3	4	5
V(x)					

Quelle valeur de x semble donner le volume maximal ?

(c) Vérifie que $V(x) - 432 = 4(x-3)^2(x-12)$ pour tout réel x.

(d) Déduis-en que $V(x) \leqslant 432$ pour tout x de $]0\,;9[$. Donne les dimensions de la boîte de volume maximal et ce volume.

Ex. 48 ★★★ **Le ballon filmé par un drone** — Noé lance un ballon. Sa hauteur, en mètres, t secondes après le lancer, vaut $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$, avec $t \in [0\,;4]$. Un drone ne filme le ballon que pendant la première seconde et demie, c'est-à-dire pour $t \in [0\,;1{,}5]$.

(a) Vérifie que $h(t) = -5(t-2)^2 + 21$ pour tout réel t. Déduis-en la hauteur maximale du ballon sur $[0\,;4]$ et l'instant où elle est atteinte.

(b) Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b \leqslant 2$. Montre que $h(b) - h(a) = 5(b-a)(4-a-b)$, puis déduis-en le sens de variation de h sur $[0\,;2]$.

(c) Élise affirme : « Sur la vidéo, la hauteur maximale du ballon est 21 m. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Détermine la hauteur maximale du ballon sur la vidéo et l'instant où elle est atteinte.

Ex. 49 ★★★ **Le potager de Sacha contre un mur** — Sacha veut un potager rectangulaire adossé à un mur. Il dispose de 40 m de grillage pour les trois autres côtés (rien le long du mur). On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur, et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du potager.

(a) Exprime la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x. Précise l'intervalle des valeurs possibles de x, puis exprime $\mathcal{A}(x)$.

(b) Complète le tableau de valeurs :

x	8	9	10	11	12
A(x)					

Ce tableau prouve-t-il que l'aire maximale vaut 200 m² ? Explique.

(c) Démontre que $200 - \mathcal{A}(x) = 2(x-10)^2$, puis conclus sur l'aire maximale du potager.

(d) Tom affirme : « Avec une longueur de grillage fixée, l'aire est maximale pour un carré. » A-t-il raison ici ? Justifie, puis donne les dimensions du potager optimal.