1. Rappels de 3e : image, antécédent, tableau de valeurs, graphique

Ex. 1 ★☆☆ **Images et antécédents par le calcul**

(a) $f(0{,}5) = 0{,}5^2 + 2 \times 0{,}5 - 7 = 0{,}25 + 1 - 7 = -5{,}75$.

(b) Tom a calculé $-3^2 = -9$. Il faut des parenthèses : $(-3)^2 = 9$.
Donc $f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) - 7 = 9 - 6 - 7 = -4$.

(c) $g(2) = 4 \times 2 - 9 = -1$. L'image de 2 est -1.

(d) On résout $g(x) = 2$, soit $4x - 9 = 2$: $4x = 11$, donc $x = \frac{11}{4} = 2{,}75$. L'antécédent de 2 est 2,75. Il ne faut pas le confondre avec l'image de 2, qui vaut -1.

(e) On résout $4x - 9 = 7$: $4x = 16$, donc $x = 4$.
L'antécédent de 7 par g est 4.

Ex. 2 ★☆☆ **Lire un tableau de valeurs**

(a) Je cherche 2 sur la ligne des x et je lis en dessous : $h(2) = -3$.

(b) Je cherche 2 sur la ligne des $h(x)$ et je lis au-dessus : $h(0) = 2$, donc 0 est un antécédent de 2.

(c) 4 apparaît deux fois sur la deuxième ligne : $h(-3) = 4$ et $h(5) = 4$. Les antécédents de 4 lus dans le tableau sont -3 et 5.

(d) Non. Le tableau ne donne que quelques valeurs : on ne peut pas affirmer que 3 n'a pas d'antécédent.

(e) Faux. La formule marche pour $x = -1$ car $-1 + 1 = 0$, mais pas pour $x = 0$: $0 + 1 = 1$ et non 2. Une seule colonne fausse suffit.

Ex. 3 ★★☆ **Un programme de calcul et sa courbe**

(a) $(-3)^2 = 9$; $9 - 3 \times (-3) = 9 + 9 = 18$; $18 + 2 = 20$. Le programme donne 20.

(b) Le carré donne x^2, on soustrait $3x$ puis on ajoute 2 : $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

(c) $f(-2) = (-2)^2 - 3 \times (-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12$. C'est l'ordonnée de A, donc $A \in \mathcal{C}_f$.

(d) $f(4) = 4^2 - 3 \times 4 + 2 = 16 - 12 + 2 = 6$. Or $6 \neq 5$, donc $B \notin \mathcal{C}_f$.

(e) $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $f(2) = 4 - 6 + 2 = 0$.
Donc 1 et 2 sont deux antécédents de 0 par f.

Ex. 4 ★★☆ **La hauteur d'un ballon**

(a) Le point d'abscisse 1 est entre les graduations 5 et 6 : la hauteur vaut environ 5,5 à 6 m.

(b) Les points d'abscisses 2, 3 et 4 sont au-dessus de la ligne $y = 8$. Le ballon est à plus de 8 m à $t = 2$, $t = 3$ et $t = 4$ s.

(c) $h(1) = -0{,}8 \times 1^2 + 5 \times 1 + 1{,}5 = 5{,}7$. La hauteur exacte est 5,7 m, ce qui confirme la lecture approchée.

(d) L'abscisse vient en premier : 6,5 est l'image de 5, et 5 est un antécédent de 6,5. Vérification : $h(5) = -0{,}8 \times 5^2 + 5 \times 5 + 1{,}5 = -20 + 25 + 1{,}5 = 6{,}5$.

Ex. 5 ★★★ **Un tableau, une formule et trois affirmations**

(a) Non. $p(0) = -3$ veut dire que -3 est l'image de 0 (et que 0 est un antécédent de -3). Pour trouver les antécédents de 0, je cherche 0 dans la deuxième ligne : il y apparaît deux fois, sous -1 et sous 3. Les antécédents de 0 lus dans le tableau sont donc -1 et 3.

(b) Non. Une seule colonne fausse suffit : pour $x = 4$, $4 - 3 = 1$ alors que le tableau donne $p(4) = 5$. La formule $p(x) = x - 3$ ne convient donc pas à ce tableau.

(c) $p(-2) = (-2)^2 - 2 \times (-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$. C'est bien la valeur du tableau. Attention : $(-2)^2 = 4$, pas -4.

(d) $p(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 3 = 9 + 6 - 3 = 12$ et $p(5) = 5^2 - 2 \times 5 - 3 = 25 - 10 - 3 = 12$. Hugo a tort : 12 a au moins deux antécédents, -3 et 5. Un tableau ne donne que quelques valeurs.

(e) $(x - 4)(x + 2) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$ et $p(x) - 5 = x^2 - 2x - 3 - 5 = x^2 - 2x - 8$: l'égalité est vraie. $p(x) = 5$ équivaut à $(x - 4)(x + 2) = 0$. C'est un produit nul, donc $x - 4 = 0$ ou $x + 2 = 0$, c'est-à-dire $x = 4$ ou $x = -2$. Les antécédents de 5 sont -2 et 4 : il n'y en a pas d'autre.

Ex. 6 ★★★ **Du programme de calcul aux points de la courbe**

(a) $g(x) = x(3 - 2x) + 4 = 3x - 2x^2 + 4$, donc $g(x) = -2x^2 + 3x + 4$.

(b) $g(-2) = -2 \times (-2)^2 + 3 \times (-2) + 4 = -2 \times 4 - 6 + 4 = -10$. L'image de l'abscisse de A est égale à son ordonnée, donc A appartient à $\mathcal{C}_g$.

Ex. 6 **(suite)**

(c) Non. A sur $\mathcal{C}_g$ veut dire $g(-2) = -10$, pas $g(-10) = -2$: l'abscisse vient en premier. Calcul : $g(-10) = -2 \times (-10)^2 + 3 \times (-10) + 4 = -200 - 30 + 4 = -226$, et $-226 \neq -2$.
Donc B n'appartient pas à $\mathcal{C}_g$.

(d) $g(x) = 4$ équivaut à $x(3 - 2x) + 4 = 4$, soit $x(3 - 2x) = 0$. C'est un produit nul : $x = 0$ ou $3 - 2x = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Vérification : $g(0) = 4$ et $g(1{,}5) = -2 \times 2{,}25 + 4{,}5 + 4 = 4$. Les points cherchés sont $(0\,;4)$ et $(1{,}5\,;4)$.

Ex. 7 ★★★ **Le bénéfice d'une céramiste**

(a) Le point d'abscisse 3 est entre les lignes 5 et 10, plus près de 10 : $B(3) \approx 9$. Calcul : $B(3) = -3^2 + 14 \times 3 - 24 = -9 + 42 - 24 = 9$. Pour 30 bols, le bénéfice de Maëlle est de 900 €.

(b) Non. Sur le nuage, deux points sont à la hauteur 16 : celui d'abscisse 4 et celui d'abscisse 10. Calcul : $B(4) = -16 + 56 - 24 = 16$ et $B(10) = -100 + 140 - 24 = 16$. Donc 16 a au moins deux antécédents, 4 et 10.

(c) $(x - 3{,}5)(x - 10{,}5) = x^2 - 10{,}5x - 3{,}5x + 36{,}75 = x^2 - 14x + 36{,}75$, donc $-(x - 3{,}5)(x - 10{,}5) = -x^2 + 14x - 36{,}75$. Et $B(x) - 12{,}75 = -x^2 + 14x - 24 - 12{,}75 = -x^2 + 14x - 36{,}75$: l'égalité est vraie.

(d) $B(x) = 12{,}75$ équivaut à $(x - 3{,}5)(x - 10{,}5) = 0$, donc $x = 3{,}5$ ou $x = 10{,}5$, et ces deux valeurs sont dans $[0\,;12]$. Les antécédents de 12,75 sont 3,5 et 10,5 : Maëlle gagne 1 275 € si elle fabrique 35 ou 105 bols.

(e) $B(15) = -15^2 + 14 \times 15 - 24 = -225 + 210 - 24 = -39$: le calcul est juste. Mais $15 \notin [0\,;12]$: Maëlle fabrique au plus 120 bols. La formule ne s'utilise que pour $x \in [0\,;12]$, donc $B(15)$ ne donne aucun bénéfice réel dans cette situation.

2. *Image, antécédent : le point appartient-il à la courbe ?*

Ex. 8 ★☆☆ **Images et antécédents par le calcul**

(a) $f(-3) = (-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$. L'image de -3 est 4.

(b) $f(0{,}5) = 0{,}5^2 - 5 = 0{,}25 - 5 = -4{,}75$.

(c) On résout $x^2 - 5 = 11$, soit $x^2 = 16$: $x = -4$ ou $x = 4$. Le nombre 11 a deux antécédents, -4 et 4.

(d) On résout $x^2 - 5 = -5$, soit $x^2 = 0$: $x = 0$. Le nombre -5 a un seul antécédent, 0.

Ex. 8 **(suite)**

(e) On résout $x^2 - 5 = -9$, soit $x^2 = -4$. Un carré est toujours positif ou nul : pas de solution. Le nombre -9 n'a aucun antécédent par f.

Ex. 9 ★☆☆ **Le point est-il sur la courbe ?**

(a) $5 \in D_h$ et $h(5) = \frac{6}{3} = 2$: $A \in \mathcal{C}_h$. $h(-1) = \frac{6}{-3} = -2 \neq -3$: $B \notin \mathcal{C}_h$.

(b) Pour $x = 2$, le dénominateur vaut $2 - 2 = 0$: $2 \notin D_h$, donc $h(2)$ n'existe pas et aucun point d'abscisse 2 n'est sur $\mathcal{C}_h$.

(c) L'ordonnée est $h(8) = \frac{6}{8-2} = \frac{6}{6} = 1$.

(d) $h(0) = \frac{6}{0-2} = -3$: le point d'intersection est $(0\,;-3)$.

(e) On résout $h(x) = 0$, soit $\frac{6}{x-2} = 0$. Le numérateur 6 n'est jamais nul, donc pas de solution : $\mathcal{C}_h$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

(f) $h(4) = \frac{6}{4-2} = 3 \neq 2{,}9$: $D \notin \mathcal{C}_h$. Lina a tort, un point lu sur un écran ne prouve rien.

(g) Faux : une droite verticale qui passe à l'intérieur du cercle le coupe en deux points. Une même abscisse aurait alors deux images, alors qu'une image est unique.

Ex. 10 ★★☆ **Corriger des erreurs sur les antécédents**

(a) Noah n'a pas le droit de diviser par x, qui peut valoir 0. On factorise : $x(3x + 5) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = -\frac{5}{3}$. Le nombre 0 a deux antécédents, 0 et $-\frac{5}{3}$.

(b) Inès calcule une image au lieu de résoudre $f(x) = 2$. L'égalité $f(2) = 22$ signifie que l'image de 2 est 22 : c'est 2 qui est un antécédent de 22.

(c) On résout $3x^2 + 5x = 2$, soit $3x^2 + 5x - 2 = 0$, soit $(3x - 1)(x + 2) = 0$.
Donc $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -2$. Le nombre 2 a deux antécédents, $\frac{1}{3}$ et -2.

(d) Faux : $f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) = 3 - 5 = -2$. L'image est unique, c'est -2. On trouve -8 en écrivant $-1^2 = -1$ au lieu de $(-1)^2 = 1$: il faut les parenthèses.

Ex. 11 ★★☆ **La hauteur d'un ballon**

(a) $h(0{,}5) = -5 \times 0{,}5^2 + 15 \times 0{,}5 = -1{,}25 + 7{,}5 = 6{,}25$. Au bout de 0,5 s, le ballon est à 6,25 m.

(b) On a bien $h(4) = -5 \times 16 + 60 = -20$, mais $4 \notin [0\,;3]$: 4 n'est pas dans l'ensemble de définition.
Donc $A \notin \mathcal{C}_h$.

Ex. 11 **(suite)**

(c) On résout $-5t^2+15t=0$, soit $-5t(t-3)=0$: $t=0$ ou $t=3$. Les points sont $(0\,;0)$ et $(3\,;0)$: le ballon part du sol et retombe au sol au bout de 3 s.

(d) On résout $-5t^2+15t=10$, soit $-5t^2+15t-10=0$, soit $-5(t-1)(t-2)=0$.
Donc $t=1$ ou $t=2$, qui sont bien dans $[0\,;3]$. Le ballon est à 10 m au bout de 1 s, puis de 2 s.

Ex. 12 ★★★ **Combien d'antécédents ?**

(a) $f(x)=(x+1)^2-9=x^2+2x+1-9=x^2+2x-8$ pour tout réel x.

(b) Le point d'intersection avec l'axe des ordonnées a pour abscisse 0 : $f(0)=(0+1)^2-9=-8$. C'est le point $(0\,;-8)$.

(c) On résout $f(x)=0$, soit $(x+1)^2=9$.
Donc $x+1=3$ ou $x+1=-3$, soit $x=2$ ou $x=-4$.
Les points d'intersection sont $(2\,;0)$ et $(-4\,;0)$.

(d) $f(4)=(4+1)^2-9=16$: 4 est un antécédent de 16, mais pas forcément le seul. On résout $(x+1)^2=25$: $x+1=5$ ou $x+1=-5$, soit $x=4$ ou $x=-6$. Le nombre 16 a deux antécédents : -6 et 4.

(e) $f(x)=-10$ donne $(x+1)^2=-1$: impossible, car un carré est positif ou nul.
Donc -10 n'a pas d'antécédent. En général, $f(x)=k$ équivaut à $(x+1)^2=k+9$. Si $k<-9$: aucun antécédent. Si $k=-9$: un seul antécédent, -1. Si $k>-9$: deux antécédents, $-1-\sqrt{k+9}$ et $-1+\sqrt{k+9}$.

Ex. 13 ★★★ **Points sur la courbe, points trompeurs**

(a) Première erreur : Paul n'a calculé que le numérateur. Seconde erreur : pour $x=3$, le dénominateur vaut $3-3=0$, donc $3\notin D_g$ et $g(3)$ n'existe pas. Aucun point d'abscisse 3 n'est sur $\mathcal{C}_g$: $A\notin\mathcal{C}_g$.

(b) $g(6)=\frac{2\times6+1}{6-3}=\frac{13}{3}$. Or $4{,}33\times3=12{,}99\neq13$, donc $4{,}33\neq\frac{13}{3}$: $C\notin\mathcal{C}_g$. Une valeur arrondie affichée ne prouve rien.

(c) $b=g(-2)=\frac{2\times(-2)+1}{(-2)-3}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$. On résout $g(x)=\frac{3}{5}$ avec $x\neq3$: $5(2x+1)=3(x-3)$, soit $10x+5=3x-9$, donc $x=-2$. Aucun autre point n'a pour ordonnée $\frac{3}{5}$.

(d) $g(x)=3$ avec $x\neq3$: $2x+1=3x-9$, donc $x=10$; le point est $(10\,;3)$. $g(x)=2$: $2x+1=2x-6$, soit $1=-6$: impossible. Aucun point de $\mathcal{C}_g$ n'a pour ordonnée 2.

Ex. 13 **(suite)**

(e) Faux. $1\in D_g$ et 1 a une seule image : $g(1)=\frac{2\times1+1}{1-3}=-1{,}5$. La droite $x=1$ coupe $\mathcal{C}_g$ en un seul point, $(1\,;-1{,}5)$. Une courbe de fonction ne coupe jamais une droite verticale en deux points
(un cercle n'est donc pas une courbe de fonction).

Ex. 14 ★★★ **Le bénéfice d'une fromagerie**

(a) $B(0)=-24$: sans production, la fromagerie perd 24 000 €. On résout $B(x)=-24$: $-2x^2+16x=0$, soit $-2x(x-8)=0$, donc $x=0$ ou $x=8$, deux valeurs de $[0\,;10]$. Une production de 8 tonnes donne aussi une perte de 24 000 €.

(b) On résout $-2(x-2)(x-6)=0$: $x=2$ ou $x=6$, deux valeurs de $[0\,;10]$. Le bénéfice est nul pour une production de 2 tonnes ou de 6 tonnes.

(c) $B(x)=10$ donne $(x-4)^2=-1$: impossible, car un carré est positif ou nul. Le bénéfice n'atteint jamais 10 000 €. $B(x)=8$ donne $(x-4)^2=0$, soit $x=4$. Le bénéfice vaut 8 000 € pour 4 tonnes uniquement.

(d) On résout $B(x)=-64$: $-2(x-4)^2+8=-64$, soit $(x-4)^2=36$.
Donc $x-4=6$ ou $x-4=-6$, soit $x=10$ ou $x=-2$.
Or $-2\notin[0\,;10]$: seule une production de 10 tonnes donne une perte de 64 000 €.

3. *Ensemble de définition*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : quotients et polynômes**

(a) $x+6=0$ équivaut à $x=-6$. La valeur interdite est -6, donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-6\}$.

(b) $2x-10=0$ équivaut à $x=5$.
Donc $D_g=\mathbb{R}\setminus\{5\}=]-\infty\,;5[\cup]5\,;+\infty[$.

(c) $x^2-4=0$ équivaut à $x^2=4$, soit $x=-2$ ou $x=2$. Il y a deux valeurs interdites : $D_h=\mathbb{R}\setminus\{-2\,;2\}$.

(d) Non. Pour tout réel x, $x^2\geqslant0$, donc $x^2+1\geqslant1>0$: le dénominateur ne s'annule jamais. $D_k=\mathbb{R}$.

(e) p est un polynôme, sans quotient ni racine : on peut calculer $p(x)$ pour tout réel. $D_p=\mathbb{R}$.

(f) $x(x+3)=0$ équivaut à $x=0$ ou $x+3=0$, soit $x=0$ ou $x=-3$.
Donc $D_q=\mathbb{R}\setminus\{-3\,;0\}$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : avec une racine carrée**

(a) Il faut $x+5 \geqslant 0$, soit $x \geqslant -5$. $D_f = [-5\,;+\infty[$.

(b) Il faut $6-2x \geqslant 0$, soit $-2x \geqslant -6$. Je divise par -2, qui est négatif, donc le sens change : $x \leqslant 3$. $D_g =]-\infty\,;3]$ (on garde 3 car $\sqrt{0}=0$).

(c) Non. La racine est au dénominateur : il faut $x-1>0$, soit $x>1$. Pour $x=1$, le dénominateur vaudrait $\sqrt{0}=0$, ce qui est interdit. $D_h =]1\,;+\infty[$.

(d) Il faut $2x-7 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 3{,}5$. Le plus petit nombre est 3,5, car $k(3{,}5)=\sqrt{0}=0$ existe. $D_k = [3{,}5\,;+\infty[$.

(e) Non : $10-5\times 2=0$, et on ne divise pas par $\sqrt{0}=0$. Il faut $10-5x>0$, soit $-5x>-10$, donc $x<2$ (je divise par -5, qui est négatif : le sens change).
$D_m =]-\infty\,;2[$.

(f) $1-(-3)=4$ et $4 \geqslant 0$, donc on peut calculer $r(-3)=\sqrt{4}=2$. Oui, -3 appartient à D_r.

Ex. 17 ★★☆ **Repère l'erreur**

(a) Lina a tort. Elle a simplifié avant de chercher les valeurs interdites. Sur l'expression de départ, $x+5=0$ pour $x=-5$, et $f(-5)$ n'existe pas. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-5\}$, et l'égalité $f(x)=x-5$ n'est vraie que pour $x \neq -5$.

(b) Hugo a tort, il y a deux erreurs de crochets. Il faut $x+8 \geqslant 0$, soit $x \geqslant -8$: -8 est inclus car $\sqrt{0}=0$. Le crochet est toujours ouvert en $+\infty$. $D_g = [-8\,;+\infty[$.

(c) Maëlle a tort. La racine est au dénominateur. Pour $x=-4$, on a $\sqrt{0}=0$ au dénominateur, ce qui est interdit. Il faut $x+4>0$, donc $D_h =]-4\,;+\infty[$.

(d) Noé a raison. $x^2-36=0$ équivaut à $x=-6$ ou $x=6$. Il exclut bien ces deux valeurs, et ses crochets sont dans le bon sens. C'est $\mathbb{R}\setminus\{-6\,;6\}$.

Ex. 18 ★★☆ **Réunir les conditions, penser à la situation**

(a) Il faut $x+2 \geqslant 0$, soit $x \geqslant -2$, et $x \neq 0$.
Donc $D_f = [-2\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

(b) Il faut $x-4 \neq 0$, soit $x \neq 4$, et $10-2x \geqslant 0$, soit $x \leqslant 5$ (le sens change quand je divise par -2).
Donc $D_g =]-\infty\,;4[\cup]4\,;5]$.

(c) $h(x)=x(-5x+20)=0$ équivaut à $x=0$ ou $x=4$. Le ballon part du sol en $x=0$ et y retombe en $x=4$. La formule a un sens pour tout réel, mais dans la situation $D_h = [0\,;4]$.

Ex. 18 (suite)

(d) x est une longueur, donc $x>0$. Il faut aussi qu'il reste un fond : $20-2x>0$, soit $x<10$, et $30-2x>0$, soit $x<15$.
Donc x doit appartenir à $]0\,;10[$.

Ex. 19 ★★★ **Racine, quotient : le sens des inégalités**

(a) Il faut $8-2x \geqslant 0$, soit $-2x \geqslant -8$. On divise par -2, qui est négatif : le sens change, donc $x \leqslant 4$. La borne 4 est incluse car $\sqrt{0}=0$ existe. $D_g =]-\infty\,;4]$.

(b) Dans h, la racine est au dénominateur : elle doit exister et ne pas être nulle. Il faut donc $8-2x>0$ (inégalité stricte), soit $x<4$. La borne 4 est exclue :
$D_h =]-\infty\,;4[$, alors que $4 \in D_g$.

(c) Condition 1 : $8-2x \geqslant 0$, soit $x \leqslant 4$. Condition 2 : $x^2-49 \neq 0$. Or $x^2=49$ équivaut à $x=-7$ ou $x=7$. Comme $7>4$, 7 est déjà exclu par la condition 1 : on retire seulement -7 de $]-\infty\,;4]$.
Donc $D_k =]-\infty\,;-7[\cup]-7\,;4]$.

(d) Par h : non, car $4 \notin D_h$ ($8-2\times 4=0$ et on ne divise pas par $\sqrt{0}=0$). Par k : oui, car $4 \in D_k$. $k(4)=\sqrt{8-2\times 4}+\frac{5}{4^2-49}=0+\frac{5}{-33}=-\frac{5}{33}$.

Ex. 20 ★★★ **Problème : le coût moyen d'un atelier**

(a) $x^2+2x+16$ est un polynôme, sans quotient ni racine : la formule est définie sur $\mathbb{R}$. Mais l'atelier fabrique entre 0 et 10 centaines de lampes, donc $D_C = [0\,;10]$.

(b) Il faut $x \neq 0$ (dénominateur) et $0 \leqslant x \leqslant 10$ (situation). Crochet ouvert en 0 car 0 est une valeur interdite, crochet fermé en 10 car 10 est autorisé. $D_M =]0\,;10]$.

(c) $M(4)=\frac{4^2+2\times 4+16}{4}=\frac{40}{4}=10$ et $M(10)=\frac{100+20+16}{10}=\frac{136}{10}=13{,}6$. Pour 400 lampes par jour, une centaine de lampes coûte en moyenne 10 centaines d'euros, soit 1 000 € : chaque lampe coûte en moyenne 10 €.

(d) Pour $x \in]0\,;10]$: $M(x)-10=\frac{x^2+2x+16}{x}-\frac{10x}{x}=\frac{x^2-8x+16}{x}$. Or $(x-4)^2=x^2-8x+16$, donc $M(x)-10=\frac{(x-4)^2}{x}$.

(e) Pour $x \in]0\,;10]$, $(x-4)^2 \geqslant 0$ et $x>0$, donc le quotient est positif ou nul : $M(x) \geqslant 10$. De plus $M(4)=10$ et $4 \in D_M$. Le coût moyen minimum est 10 centaines d'euros par centaine de lampes (soit 10 € par lampe), atteint pour 400 lampes par jour. Le signe de x sert à affirmer que le quotient est positif : si x était négatif, ce serait faux.

Ex. 21 ★★★ **Simplifier n'efface pas une valeur interdite**

(a) $(x+1)^2+1 = x^2+2x+1+1 = x^2+2x+2$. Pour tout réel x, $(x+1)^2 \geqslant 0$, donc $x^2+2x+2 \geqslant 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais. $D_p = \mathbb{R}$.

(b) $x^2-16=0$ équivaut à $x^2=16$, soit $x=-4$ ou $x=4$. Il y a deux valeurs interdites : $D_q = \mathbb{R} \setminus \{-4\,;4\}$.

(c) $x^2-16 = (x-4)(x+4)$. Pour $x \in D_q$, $x+4 \neq 0$, donc on peut simplifier par $x+4$: $q(x) = \frac{x+4}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{x-4} = r(x)$.

(d) $A : -4 \notin D_q$ (valeur interdite), donc -4 n'a pas d'image par q et $A \notin \mathcal{C}_q$, même si $r(-4) = \frac{1}{-8} = -0{,}125$. $B : 5 \in D_q$ et $q(5) = \frac{5+4}{5^2-16} = \frac{9}{9} = 1$, donc $B \in \mathcal{C}_q$.

(e) Non. $D_r = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ alors que $D_q = \mathbb{R} \setminus \{-4\,;4\}$: les ensembles de définition sont différents. Par exemple, -4 a une image par r ($-0{,}125$) mais pas par q. Les deux fonctions ne sont égales que sur D_q : on cherche les valeurs interdites sur l'expression de départ.

4. *Résoudre graphiquement $f(x)=k$, $f(x)<k$, $f(x)=g(x)$, $f(x)<g(x)$*

Ex. 22 ★★★ **Lire les solutions de f(x) = k et f(x) < k**

(a) On lit les abscisses des points d'intersection avec la droite $y=0$ (pas « 0 ») : $S = \{-1\,;3\}$.

(b) $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de la droite $y=0$ entre -1 et 3. L'inégalité est stricte, donc les bornes sont exclues : $S =]-1\,;3[$.

(c) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $y=2{,}5$ ou dessus sur $[-3\,;-2]$ et sur $[4\,;5]$. Les bornes -3 et 5 sont incluses car $f(-3)=6 \geqslant 2{,}5$ et $f(5)=6 \geqslant 2{,}5$: $S = [-3\,;-2] \cup [4\,;5]$.

(d) D'après le tableau, 6 est atteint seulement aux bornes : $f(-3)=6$ et $f(5)=6$. Partout ailleurs, $f(x)<6$: $S = \{-3\,;5\}$.

(e) Le minimum de f sur $[-3\,;5]$ vaut -2, donc $f(x)$ ne vaut jamais -3. La droite $y=-3$ ne coupe pas $\mathcal{C}_f$: $S = \varnothing$.

(f) Le minimum vaut -2 et il est atteint seulement en $x=1$. Partout ailleurs, $f(x) > -2$. La solution est isolée : $S = \{1\}$.

Ex. 23 ★★★ **Vrai ou faux : deux courbes qui se coupent**

(a) Faux. 5 et 0 sont les ordonnées de A et de B. Les solutions sont leurs abscisses : $S = \{-2\,;3\}$.

(b) Faux. -3 et 3 sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses : ce sont les solutions de $f(x)=0$. Pour $f(x)=g(x)$, on cherche les intersections des deux courbes : $S = \{-2\,;3\}$.

(c) Faux. Sur $]-2\,;3[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$. $f(x) < g(x)$ correspond à $\mathcal{C}_f$ strictement au-dessous : $S = [-4\,;-2[\cup]3\,;4]$. Les bornes -4 et 4 sont incluses car $\mathcal{C}_f$ y est au-dessous.

(d) Vrai. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-2\,;3[$. Avec $\geqslant$, on ajoute les abscisses des points d'intersection -2 et 3 : $S = [-2\,;3]$.

(e) Faux. $0 \in]-2\,;3[$, donc en 0, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$: $f(0) > g(0)$.

Ex. 24 ★★★ **Confirmer par le calcul ce que montre l'écran**

(a) $f(4) = 4^2 - 2\times 4 - 3 = 16-8-3 = 5$ et $g(4) = 4+1 = 5$. Les deux images sont égales, donc le point $(4\,;5)$ appartient aux deux courbes : c'est un point d'intersection exact.

(b) $f(x)-g(x) = x^2-2x-3-x-1 = x^2-3x-4$. Et $(x+1)(x-4) = x^2-4x+x-4 = x^2-3x-4$. Les deux expressions sont égales.

(c) $f(x)=g(x)$ équivaut à $f(x)-g(x)=0$, soit $(x+1)(x-4)=0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x=-1$ ou $x=4$. Les deux nombres sont dans $[-3\,;5]$, donc $S = \{-1\,;4\}$. Le calcul confirme la lecture graphique.

(d) $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de $\mathcal{C}_g$ entre -1 et 4. L'inégalité est stricte, donc les bornes sont exclues : $S =]-1\,;4[$. Vérification : $f(0) = -3$ et $g(0) = 1$, donc $f(0) < g(0)$. C'est cohérent, puisque $0 \in]-1\,;4[$.

Ex. 25 ★★★ **Température sur une journée**

(a) Sur $[0\,;14]$, T est croissante de 6 à 18. Comme 12 est compris entre 6 et 18, l'équation a une solution sur cet intervalle. Sur $[14\,;24]$, T est décroissante de 18 à 10. Comme 12 est compris entre 10 et 18, elle a encore une solution. L'équation $T(x)=12$ a donc 2 solutions.

(b) Sur $[0\,;14]$, 8 est compris entre 6 et 18 : il y a une solution. Sur $[14\,;24]$, on a $T(x) \geqslant 10 > 8$: il n'y a pas de solution. L'équation $T(x)=8$ a donc 1 seule solution.

Ex. 25 **(suite)**

(c) Le maximum de T vaut 18 et il est atteint seulement en $x = 14$. On a donc $S = \{14\}$, une solution isolée. La température n'atteint 18 °C qu'à 14 h.

(d) T est croissante sur $[0\,;14]$ et $T(7) \approx 15$: $T(x) \geqslant 15$ pour $x \in [7\,;14]$ environ. T est décroissante sur $[14\,;24]$ et $T(19) \approx 15$: $T(x) \geqslant 15$ pour $x \in [14\,;19]$ environ. L'inégalité est large, donc les bornes sont incluses : $S \approx [7\,;19]$. Il fait au moins 15 °C d'environ 7 h à 19 h. La réponse est approchée parce que 7 et 19 sont des valeurs lues, pas des valeurs calculées.

Ex. 26 ★★★ **Hauteur d'un ballon**

(a) $-5(t-1)(t-3) = -5(t^2 - 3t - t + 3) = -5(t^2 - 4t + 3) = -5t^2 + 20t - 15$. Et $h(t) - 15 = -5t^2 + 20t - 15$. Les deux expressions sont égales.

(b) $h(t) = 15$ équivaut à $h(t) - 15 = 0$, soit $-5(t-1)(t-3) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $t = 1$ ou $t = 3$. Les deux sont dans $[0\,;4]$: $S = \{1\,;3\}$. Le ballon est à 15 m après 1 s (en montant) et après 3 s (en descendant).

(c) h est croissante sur $[0\,;2]$ et $h(1) = 15$: pour $t \in [1\,;2]$, $h(t) \geqslant 15$. h est décroissante sur $[2\,;4]$ et $h(3) = 15$: pour $t \in [2\,;3]$, $h(t) \geqslant 15$. Ailleurs, $h(t) < 15$. Inégalité large, donc bornes incluses : $S = [1\,;3]$. Le ballon est à 15 m ou plus pendant $3 - 1 = 2$ secondes.

(d) C'est le reste de D_f, sans les intersections (inégalité stricte) : $S = [0\,;1[\cup]3\,;4]$. Les bornes 0 et 4 sont incluses car h y est définie et $h(0) = 0 < 15$, $h(4) = -5 \times 4^2 + 20 \times 4 = 0 < 15$.

(e) D'après le tableau, le maximum de h est 20, atteint seulement en $t = 2$ (h est strictement croissante puis strictement décroissante). $h(t) = 20$: $S = \{2\}$ (solution isolée). $h(t) > 20$: aucune image ne dépasse 20, donc $S = \varnothing$.

Ex. 27 ★★★ **Lecture approchée, solution exacte**

(a) $f(0{,}3) = 3 \times 0{,}09 - 2{,}4 + 4 = 1{,}87$ et $g(0{,}3) = 0{,}6 + 1 = 1{,}6$. Ces deux nombres sont différents, donc 0,3 n'est pas solution exacte : la lecture graphique n'est qu'approchée.

(b) $(3x-1)(x-3) = 3x^2 - 9x - x + 3 = 3x^2 - 10x + 3$. Et $f(x) - g(x) = 3x^2 - 8x + 4 - 2x - 1 = 3x^2 - 10x + 3$. Les deux expressions sont égales.

Ex. 27 **(suite)**

(c) $f(x) = g(x)$ équivaut à $f(x) - g(x) = 0$, soit $(3x-1)(x-3) = 0$.
Donc $3x - 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$: $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 3$. Les deux sont dans $[0\,;4]$: $S = \left\{\frac{1}{3}\,;3\right\}$. La valeur exacte $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ explique la lecture « environ 0,3 ».
Vérification : $f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$ et $f(3) = g(3) = 7$.

(d) $f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \frac{4}{9} - \frac{16}{3} + 4 = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} + \frac{12}{3} = 0$ et $f(2) = 12 - 16 + 4 = 0$: ce sont bien des zéros de f. Mais ce sont les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses. Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. D'ailleurs $g(2) = 5 \neq 0 = f(2)$.

(e) $f(1) = 3 - 8 + 4 = -1$ et $g(1) = 3$: en $x = 1$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$. Les courbes ne se coupent qu'en $x = \frac{1}{3}$ et $x = 3$, donc $\mathcal{C}_f$ reste au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur tout $\left]\frac{1}{3}\,;3\right[$. De plus, $f(0) = 4 > g(0) = 1$ et $f(4) = 20 > g(4) = 9$: au-dessus ailleurs. Inégalité stricte, donc bornes exclues : $S = \left]\frac{1}{3}\,;3\right[$.

Ex. 28 ★★★ **Tout lire sur un tableau de variations**

(a) $f(-4) = 3$: $x = -4$ est solution (c'est une borne de l'intervalle). Sur $]-4\,;-1]$, f est strictement décroissante, donc $f(x) < 3$: pas d'autre solution. Sur $[-1\,;2]$, f croît de -2 à 4 et 3 est compris entre -2 et 4 : une solution. Sur $[2\,;5]$, f décroît de 4 à 1 et 3 est compris entre 1 et 4 : une solution. L'équation $f(x) = 3$ a donc 3 solutions.

(b) Tom a donné k au lieu des abscisses. Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite $y = 1$: $S = \{-3\,;0\,;5\}$.

(c) Sur $[-4\,;-1]$, f est décroissante avec $f(-3) = 1$: $f(x) < 1$ pour $x \in]-3\,;-1]$. Sur $[-1\,;2]$, f est croissante avec $f(0) = 1$: $f(x) < 1$ pour $x \in [-1\,;0[$. Sur $[2\,;5]$, le minimum est $f(5) = 1$, donc $f(x) \geqslant 1$. Bornes des intersections exclues : $S =]-3\,;0[$.

(d) $f(x) \geqslant 1$: $S = [-4\,;-3] \cup [0\,;5]$ (-4 est incluse car $f(-4) = 3 \geqslant 1$, et 5 car $f(5) = 1 \geqslant 1$). $f(x) > 1$: $S = [-4\,;-3[\cup]0\,;5[$. La borne 5 est exclue car $f(5) = 1$ ne vérifie pas $1 > 1$, alors que -4 reste incluse ($3 > 1$).

(e) Sur $[-4\,;-1]$, f décroît de 3 à -2 : elle prend une seule fois la valeur 0. Sur $[-1\,;2]$, f croît de -2 à 4 : une seule fois la valeur 0. Sur $[2\,;5]$, le minimum est $1 > 0$: aucune solution. Au total, $1 + 1 + 0 = 2$ solutions.

5. *Sens de variation, tableau de variations, comparer deux images*

Ex. 29 ★☆☆ Lire un tableau de variations

(a) La flèche descend de $x = -2$ à $x = 3$: f est décroissante sur $[-2\,;3]$.

(b) Le plus petit nombre de la 2e ligne est -5 : le minimum de f est -5, atteint en $x = 3$.

(c) Les images aux bouts des flèches sont 4, -5 et 1 : le maximum est 4, atteint en $x = -2$.

(d) Tom a pris les images -5 et 1 pour des abscisses. Les abscisses sont sur la 1re ligne : f est croissante sur $[3\,;7]$.

(e) Sur $[3\,;7]$, f est croissante, donc $f(3) \leqslant f(x) \leqslant f(7)$, soit $-5 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

(f) Sur $[-2\,;3]$, f est décroissante, donc $f(3) \leqslant f(x) \leqslant f(-2)$, soit $-5 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

(g) Sur $[-2\,;3]$, 0 est entre 4 et -5 : une solution. Sur $[3\,;7]$, 0 est entre -5 et 1 : une solution.
Donc 2 solutions.

(h) Sur $[-2\,;3]$, 2 est entre 4 et -5 : une solution. Sur $[3\,;7]$, $f(x) \leqslant 1 < 2$: aucune.
Donc 1 solution.

Ex. 30 ★☆☆ Comparer deux images sans calcul

(a) $-3{,}1 < -2{,}7 \leqslant 0$ et la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$: l'ordre est inversé, donc $(-3{,}1)^2 > (-2{,}7)^2$.

(b) $0 < 0{,}7 < 0{,}9$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$: l'ordre est inversé, donc $\frac{1}{0{,}7} > \frac{1}{0{,}9}$.

(c) $m = -4 < 0$: g est décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $-1{,}6 < 2{,}35 < 2{,}53$, l'ordre est inversé : $g(2{,}53) < g(2{,}35) < g(-1{,}6)$.

(d) $-4{,}5 < -3{,}8 < 0$ et la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$: l'ordre est inversé, donc $\frac{1}{-4{,}5} > \frac{1}{-3{,}8}$.

(e) On ne peut pas appliquer la règle directement. Mais $(-1{,}2)^2 = 1{,}2^2$. Comme $0 \leqslant 0{,}9 < 1{,}2$ et que la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$: $0{,}9^2 < 1{,}2^2$, donc $0{,}9^2 < (-1{,}2)^2$.

Ex. 31 ★★☆ Température sur une journée

(a) 1re ligne : les bornes 6 et 22 et l'heure 15 du changement de sens ; 2e ligne : les images.

h	**6**		**15**		**22**
T(h)	4	↗	17	↘	9

Ex. 31 (suite)

(b) Le plus grand nombre de la 2e ligne est 17 : la température maximale est 17 °C, atteinte à 15 h.

(c) Sur $[15\,;22]$, T est décroissante, donc $T(22) \leqslant T(h) \leqslant T(15) : 9 \leqslant T(h) \leqslant 17$.

(d) Sur $[6\,;15]$, 12 est entre 4 et 17 : une fois. Sur $[15\,;22]$, 12 est entre 17 et 9 : une fois. La température vaut 12 °C deux fois.

(e) Non : 10 et 20 sont de part et d'autre de 15, où le sens de variation change. On sait seulement que $4 \leqslant T(10) \leqslant 17$ et $9 \leqslant T(20) \leqslant 17$.

Ex. 32 ★★☆ Vrai ou faux sur le sens de variation

(a) Faux. Trois valeurs ne suffisent pas. Par exemple, $u(1) = 1 - 3 + 1 = -1$: on a $0 < 1$ mais $u(0) = 1 > u(1) = -1$, donc u n'est pas croissante sur $[0\,;5]$.

(b) Vrai. Si f était décroissante sur $[0\,;3]$, comme $1 < 2$ avec 1 et 2 dans $[0\,;3]$, on aurait $f(1) \geqslant f(2)$. Cela contredit $f(1) < f(2)$.
Donc f n'est pas décroissante sur $[0\,;3]$.

(c) Vrai au sens large : pour $a < b$ dans $[1\,;4]$, $f(a) = f(b)$, donc $f(a) \leqslant f(b)$. Mais elle n'est pas strictement croissante, car on n'a jamais $f(a) < f(b)$.

(d) 0 est une valeur interdite : on met une double barre sous 0, et les flèches ne la traversent pas. On a $\frac{1}{-2} = -0{,}5$ et l'image de 3 est $\frac{1}{3}$.

x	**-2**		**0**		**3**
$\frac{1}{x}$	$-0{,}5$	↘	‖	↘	$\frac{1}{3}$

Ex. 33 ★★★ Démontrer un sens de variation

(a) $f(b) - f(a) = (b^2 - 8b + 5) - (a^2 - 8a + 5) = b^2 - a^2 - 8(b - a)$. Or $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. On obtient $f(b) - f(a) = (b - a)(b + a) - 8(b - a) = (b - a)(b + a - 8)$.

(b) On a $b - a > 0$ car $a < b$. De plus, $a \geqslant 4$ et $b > 4$, donc $a + b > 8$, c'est-à-dire $b + a - 8 > 0$. Le produit est strictement positif, donc $f(b) > f(a)$. C'est vrai pour **tous** les réels $a < b$ de $[4\,;+\infty[$, donc f est strictement croissante sur $[4\,;+\infty[$.

(c) Soit $a < b \leqslant 4$. On a $b - a > 0$. Comme $a < 4$ et $b \leqslant 4$, on a $a + b < 8$, donc $b + a - 8 < 0$. Le produit est strictement négatif, donc $f(b) < f(a)$ pour tous $a < b$ de $]-\infty\,;4]$.
Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;4]$.

Ex. 33 **(suite)**

(d) Le sens de variation change en 4. On calcule $f(1) = 1 - 8 + 5 = -2$, $f(4) = 16 - 32 + 5 = -11$ et $f(9) = 81 - 72 + 5 = 14$.

x	1		4		9
f(x)	-2	↘	-11	↗	14

(e) Non : $3{,}3 < 4 < 4{,}7$, les deux nombres sont de part et d'autre du changement de sens. La règle ne s'applique pas. Avec la question 1, pour $a = 3{,}3$ et $b = 4{,}7$: $f(4{,}7) - f(3{,}3) = (4{,}7 - 3{,}3)(4{,}7 + 3{,}3 - 8) = 1{,}4 \times 0 = 0$.
Donc $f(3{,}3) = f(4{,}7)$.

Ex. 34 ★★★ **Une valeur interdite dans le tableau**

(a) Non. $f(-0{,}5) = \frac{6}{-0{,}5} = -12$ et $f(0{,}5) = \frac{6}{0{,}5} = 12$, donc $f(-0{,}5) < f(0{,}5)$. f est décroissante sur $[-3\,;0[$ et sur $]0\,;3]$ séparément, mais pas sur la réunion. On ne compare pas deux images situées de part et d'autre de la double barre.

(b) $-2{,}5$ et $-0{,}4$ appartiennent au même intervalle $[-3\,;0[$, sur lequel f est décroissante. Comme $-2{,}5 < -0{,}4$, l'ordre est inversé : $f(-2{,}5) > f(-0{,}4)$.

(c) f est décroissante sur $[1\,;3]$, donc $f(3) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$. Avec $f(3) = \frac{6}{3} = 2$ et $f(1) = \frac{6}{1} = 6$: $2 \leqslant f(x) \leqslant 6$.

(d) Sur $[-3\,;0[$, f est décroissante, donc pour tout x de cet intervalle, $f(x) \leqslant f(-3) = -2$. Or $-2 < 4$, donc $f(x) \neq 4$. L'équation n'a aucune solution sur $[-3\,;0[$.

(e) Pour $x \neq 0$: $\frac{6}{x} = 4 \iff 6 = 4x \iff x = 1{,}5$. Comme $1{,}5 \in]0\,;3]$, on obtient $S = \{1{,}5\}$.

Ex. 35 ★★★ **Altitude d'un randonneur**

(a) Faux. Les durées se lisent sur la 1re ligne (valeurs de t). Montée : de 0 à 2 et de 5 à 6, soit $2 + 1 = 3$ h. Descente : de 2 à 5, soit 3 h. Ilyes monte autant de temps qu'il descend.

(b) 3 et 4,5 appartiennent au même intervalle $[2\,;5]$, sur lequel A est décroissante. Comme $3 < 4{,}5$, on obtient $A(3) > A(4{,}5)$.

(c) Sur $[2\,;5]$, A est décroissante, donc $600 \leqslant A(t) \leqslant 1400$. Sur $[5\,;6]$, A est croissante, donc $600 \leqslant A(t) \leqslant 900$. Pour tout $t \in [2\,;6]$: $600 \leqslant A(t) \leqslant 1400$.

Ex. 35 **(suite)**

(d) Sur $[0\,;2]$, A va de 800 à 1400 et $800 < 850 < 1400$: une solution. Sur $[2\,;5]$, A va de 1400 à 600 et 850 est entre les deux : une solution. Sur $[5\,;6]$, A va de 600 à 900 : une solution. Comme 850 n'est ni 1400 ni 600, aucune solution n'est comptée deux fois en $t = 2$ ou $t = 5$. Ilyes est donc 3 fois à 850 m.

(e) Vrai. 1 et 5 ne sont pas sur le même intervalle de monotonie : on ne peut pas appliquer la règle directement. Mais A est croissante sur $[0\,;2]$, donc $A(1) \geqslant A(0) = 800$. Or $A(5) = 600$, donc $A(1) \geqslant 800 > 600 = A(5)$. À 1 h, Ilyes est plus haut qu'à 5 h.

6. *Maximum et minimum*

Ex. 36 ★☆☆ **Lire un extrémum dans un tableau de variations**

(a) Sur la 2e ligne, bornes comprises, le plus grand nombre est 6. Le maximum de f sur $[-3\,;5]$ est donc 6. Il est atteint en 5, qui est une borne de l'intervalle.

(b) Sur $[-3\,;1]$, f est décroissante de 2 à -4. Le maximum est donc $f(-3) = 2$. Lina a donné l'abscisse -3 au lieu de l'image : le maximum est 2, atteint en -3.

(c) Sur $[-3\,;5]$, f admet un minimum égal à -4, atteint en 1.

(d) Le minimum est -4 et le maximum est 6, donc pour tout x de $[-3\,;5]$: $-4 \leqslant f(x) \leqslant 6$.

Ex. 37 ★☆☆ **Extrémum d'une forme « carré + nombre »**

(a) Un carré est positif ou nul : $(x-4)^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant 3$. Et $f(4) = 0 + 3 = 3$. Le minimum de f est 3, atteint en 4.

(b) Faux. $(x+2)^2 \geqslant 0$, donc $g(x) \leqslant 5$, et $g(-2) = 5$. Le maximum est 5, atteint en -2 : -2 est une abscisse, pas le maximum.

(c) $(x-1)^2 \geqslant 0$, donc $-2(x-1)^2 \leqslant 0$ et $h(x) \leqslant -6$. Et $h(1) = -6$. h admet un maximum égal à -6, atteint en 1.

(d) $k(x) \geqslant -1$ est vrai, mais aucun x ne donne $k(x) = -1$, car $k(x) \geqslant 0$. Comme $k(-0{,}5) = 0$, le minimum de k est 0, atteint en $-0{,}5$.

(e) $m(-1) = 9$ et, pour tout réel x, $m(x) \leqslant 9$.

Ex. 38 ★★☆ **Le bénéfice maximal d'une entreprise**

(a) $-(x-7)^2+16 = -(x^2-14x+49)+16 = -x^2+14x-49+16 = -x^2+14x-33 = B(x)$.

(b) $B(7) = -7^2+14\times 7-33 = -49+98-33 = 16$.

(c) $B(x)-16 = -(x-7)^2$. Un carré est positif ou nul, donc $-(x-7)^2 \leqslant 0$. Ainsi $B(x)-B(7)\leqslant 0$ pour tout x de $[2\,;12]$.

(d) $B(x)\leqslant 16$ pour tout x, et $B(7)=16$ avec $7\in[2\,;12]$. Le bénéfice maximal est de 16 000 €, atteint pour 700 objets.

(e) Non. Pour avoir $B(x)=20$, il faudrait $-(x-7)^2=4$, ce qui est impossible car $-(x-7)^2\leqslant 0$. La valeur 20 n'est jamais atteinte : le maximum est 16.

Ex. 39 ★★☆ **L'extrémum dépend de l'intervalle**

(a) Sur $[-3\,;0]$, la fonction carré décroît de $(-3)^2=9$ à 0. Sur $[0\,;2]$, elle croît de 0 à $2^2=4$. Le maximum est 9, atteint en -3 (une borne). Le minimum est 0, atteint en 0.

(b) Non. La fonction inverse est décroissante sur $[-4\,;-1]$, donc son maximum est atteint en -4 : il vaut $\frac{1}{-4}=-0{,}25$. La valeur -1 est le minimum, atteint en -1.

(c) Non. Prends un a quelconque dans $]0\,;1[$. Le nombre $b=\frac{a+1}{2}$ est dans $]a\,;1[$. La fonction carré est croissante, donc $b^2>a^2$: aucune image n'est la plus grande. La valeur 1 n'est pas atteinte, car $1\notin]0\,;1[$.

(d) La fonction carré est croissante sur $[1\,;4]$, qui est inclus dans $[0\,;+\infty[$. Son minimum est atteint à la borne 1 : il vaut $1^2=1$. Kenza a tort : 0 est le minimum sur $\mathbb{R}$. Sur $[1\,;4]$, le minimum est 1, atteint en 1.

Ex. 40 ★★★ **Démontrer un maximum, puis changer d'intervalle**

(a) $f(4) = -4^2+8\times 4-10 = -16+32-10 = 6$.

(b) $f(x)-6 = -x^2+8x-16 = -(x^2-8x+16) = -(x-4)^2$. On a donc bien $f(x)-f(4)=-(x-4)^2$ pour tout réel x.

(c) Un carré est positif ou nul, donc $-(x-4)^2\leqslant 0$. Ainsi $f(x)-6\leqslant 0$, c'est-à-dire $f(x)\leqslant 6$ pour tout réel x. Comme $f(4)=6$, f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à 6, atteint en 4.

Ex. 40 **(suite)**

(d) $f(b)-f(a) = -b^2+8b+a^2-8a = -(b^2-a^2)+8(b-a) = -(b-a)(b+a)+8(b-a) = (b-a)(8-a-b)$. Comme $a<b$, on a $b-a>0$. Comme $a\geqslant 4$ et $b>4$, on a $a+b>8$, donc $8-a-b<0$. Ainsi $f(b)-f(a)<0$: f est décroissante sur $[4\,;+\infty[$.

(e) $[5\,;8]$ est inclus dans $[4\,;+\infty[$, donc f est décroissante sur $[5\,;8]$. Le maximum est $f(5)=-5^2+8\times 5-10=5$, atteint en 5. Le minimum est $f(8)=-8^2+8\times 8-10=-10$, atteint en 8. Tom a tort : la valeur 6 est atteinte en 4, et $4\notin[5\,;8]$.

Ex. 41 ★★★ **Le tableau de valeurs ne dit pas tout**

(a) $g(1{,}5) = 2\times 1{,}5^2-6\times 1{,}5+7 = 4{,}5-9+7 = 2{,}5$.

(b) $g(x)-2{,}5 = 2x^2-6x+4{,}5 = 2(x^2-3x+2{,}25) = 2(x-1{,}5)^2$. On a donc bien $g(x)-g(1{,}5)=2(x-1{,}5)^2$ pour tout réel x.

(c) Un carré est positif ou nul, donc $2(x-1{,}5)^2\geqslant 0$. Ainsi $g(x)-2{,}5\geqslant 0$, c'est-à-dire $g(x)\geqslant 2{,}5$ pour tout réel x. Comme $g(1{,}5)=2{,}5$, g admet sur $\mathbb{R}$ un minimum égal à 2,5, atteint en 1,5.

(d) Non. Le tableau de valeurs ne donne l'image que de cinq nombres. Entre 1 et 2, g prend des valeurs plus petites que 3 : par exemple $g(1{,}5)=2{,}5<3$. Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est 2,5, atteint en 1,5.

(e) g est croissante sur $[2\,;4]$. Son minimum y est donc atteint à la borne de gauche : c'est $g(2)=3$, atteint en 2. Son maximum est atteint à la borne de droite : c'est $g(4)=15$, atteint en 4. Le minimum sur $[2\,;4]$ n'est pas le même que le minimum sur $\mathbb{R}$.

Ex. 42 ★★★ **L'enclos de Noa contre un mur**

(a) Le grillage mesure 40 m et les deux côtés perpendiculaires au mur en utilisent $2x$. Le côté parallèle au mur mesure donc $40-2x$ m. L'aire est $A(x)=x(40-2x)=40x-2x^2$ en m².

(b) $200-2(x-10)^2 = 200-2(x^2-20x+100) = 200-2x^2+40x-200 = 40x-2x^2 = A(x)$.

(c) $A(10)=10\times(40-20)=200$. Pour tout x, $A(x)-200=-2(x-10)^2\leqslant 0$, car un carré est positif ou nul. Donc $A(x)\leqslant 200$, et $A(10)=200$ avec $10\in]0\,;20[$. L'aire maximale est de 200 m². Elle est obtenue pour un enclos de 10 m sur 20 m
(le côté de 20 m est contre le mur).

(d) $40-2x\leqslant 16 \iff -2x\leqslant -24 \iff x\geqslant 12$. Avec $x<20$, on obtient $x\in[12\,;20[$.

Ex. 42 **(suite)**

(e) A est décroissante sur $[12\,;20[$. Son maximum est donc atteint à la borne 12 : $A(12) = 12 \times 16 = 192$. L'aire maximale est de 192 m², pour un enclos de 12 m sur 16 m. Pas de minimum : si x est dans $[12\,;20[$, le nombre $x' = \frac{x+20}{2}$ y est aussi et $x' > x$, donc $A(x') < A(x)$. Aucune valeur de A n'est donc la plus petite.

7. *Problèmes d'optimisation*

Ex. 43 ★☆☆ **Poser le problème : variable, intervalle, grandeur**

(a) x est une longueur en cm. Comme M est sur le segment $[AB]$, on a $0 \leqslant x \leqslant 8$, donc $x \in [0\,;8]$.

(b) Le prix devient $30 - x$ euros et le club compte $200 + 10x$ adhérents. Recette = prix × nombre d'adhérents : $R(x) = (30 - x)(200 + 10x) = -10x^2 + 100x + 6000$, en euros.

(c) La baisse est positive ou nulle : $x \geqslant 0$. Le prix $30 - x$ ne peut pas être négatif : $x \leqslant 30$.
Donc $x \in [0\,;30]$, avec x en euros.

(d) Le fond est un carré de côté $14 - 2x$ et la hauteur vaut x.
Donc $V(x) = x(14 - 2x)^2$, en cm³.

(e) Il faut $x > 0$ et $14 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < 7$.
Donc $x \in]0\,;7[$, avec x en cm.

(f) Bénéfice = recette − coût : $B(x) = 12x - (x^2 + 2x + 9) = -x^2 + 10x - 9$, en euros.

Ex. 44 ★☆☆ **Lire un tableau de variations : la valeur de x ou le maximum ?**

(a) D'après le tableau, B atteint son maximum en $x = 3$: il faut produire 3 tonnes par semaine.

(b) Le maximum vaut $B(3) = 7$ centaines d'euros. Le bénéfice maximal est donc de 700 €.

(c) Faux. D'après le tableau, B est décroissante sur $[3\,;8]$: au-delà de 3 tonnes, produire plus fait baisser le bénéfice.

(d) D'après le tableau, le minimum est atteint à une borne : on compare $B(0) = -2$ et $B(8) = -18$. Le minimum vaut -18, atteint en $x = 8$. Pour 8 tonnes, le bénéfice minimal est de $-1\,800$ €, c'est-à-dire une perte de 1 800 €.

Ex. 44 **(suite)**

(e) B est décroissante sur $[3\,;8]$, donc sur $[4\,;8]$. Le maximum est atteint à la borne $x = 4$: $B(4) = -16 + 24 - 2 = 6$. Le bénéfice maximal est alors de 600 €, pour 4 tonnes.

Ex. 45 ★★☆ **L'enclos d'Inès : périmètre fixé**

(a) x est en mètres. Le demi-périmètre vaut $28 \div 2 = 14$, donc le côté voisin mesure $14 - x$ mètres. Il faut $x > 0$ et $14 - x > 0$, donc $x \in]0\,;14[$.

(b) $\mathcal{A}(x) = x \times (14 - x) = 14x - x^2$.

(c) $\mathcal{A}(5) = 45$, $\mathcal{A}(6) = 48$, $\mathcal{A}(7) = 49$, $\mathcal{A}(8) = 48$, $\mathcal{A}(9) = 45$. Conjecture : le maximum vaut 49, atteint pour $x = 7$. Le tableau ne fait que le suggérer, il reste à le démontrer.

(d) $\mathcal{A}(7) = 49$, donc $\mathcal{A}(7) - \mathcal{A}(x) = 49 - 14x + x^2 = (x - 7)^2 \geqslant 0$. Ainsi $\mathcal{A}(x) \leqslant \mathcal{A}(7)$ pour tout x de $]0\,;14[$, et 7 appartient bien à cet intervalle. L'aire est maximale quand l'enclos est un carré de 7 m de côté : elle vaut alors 49 m².

Ex. 46 ★★☆ **Bénéfice d'un atelier : attention à l'intervalle**

(a) Recette : $40 \times 4 = 160$ €. Coût : $C(4) = 16 + 40 + 50 = 106$ €. Bénéfice : $160 - 106 = 54$ €.

(b) $B(x) = 40x - (x^2 + 10x + 50) = -x^2 + 30x - 50$.

(c) Non. Le calcul $B(15) = 175$ est juste, mais $15 \notin [0\,;10]$: l'atelier ne peut pas fabriquer 15 lampes par jour. Le maximum doit être cherché sur $[0\,;10]$.

(d) B est croissante sur $[0\,;10]$, donc son maximum est atteint à la borne $x = 10$: $B(10) = -100 + 300 - 50 = 150$. Pour un bénéfice maximal, l'atelier doit fabriquer 10 lampes par jour. Il gagne alors 150 €.

Ex. 47 ★★★ **La boîte sans couvercle de Maëlys**

(a) x est une longueur en cm. C'est la hauteur de la boîte, donc $x > 0$. Le côté du fond vaut $18 - 2x$: il doit être strictement positif, donc $x < 9$. Ainsi $x \in]0\,;9[$. Le fond est un carré de côté $18 - 2x$, donc $V(x) = x(18 - 2x)^2$, en cm³.

(b) $V(1) = 1 \times 16^2 = 256$; $V(2) = 2 \times 14^2 = 392$; $V(3) = 3 \times 12^2 = 432$; $V(4) = 4 \times 10^2 = 400$; $V(5) = 5 \times 8^2 = 320$. Le maximum semble atteint pour $x = 3$. Ce n'est qu'une conjecture : le tableau ne prouve rien entre deux valeurs.

Ex. 47 **(suite)**

(c) On développe : $V(x) = x(324 - 72x + 4x^2) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$, donc $V(x) - 432 = 4x^3 - 72x^2 + 324x - 432$. De l'autre côté, $(x-3)^2(x-12) = (x^2 - 6x + 9)(x-12) = x^3 - 18x^2 + 81x - 108$, donc $4(x-3)^2(x-12) = 4x^3 - 72x^2 + 324x - 432$. Les deux expressions sont bien égales.

(d) Pour $x \in]0\,;9[$: $(x-3)^2 \geqslant 0$ et $x - 12 < 0$, donc $4(x-3)^2(x-12) \leqslant 0$, c'est-à-dire $V(x) \leqslant 432 = V(3)$. Comme $3 \in]0\,;9[$, le maximum est atteint en $x = 3$. Conclusion : Maëlys doit découper des carrés de 3 cm de côté. La boîte a alors un fond carré de 12 cm de côté, une hauteur de 3 cm et un volume maximal de 432 cm³.

Ex. 48 ★★★ **Le ballon filmé par un drone**

(a) $-5(t-2)^2 + 21 = -5(t^2 - 4t + 4) + 21 = -5t^2 + 20t - 20 + 21 = -5t^2 + 20t + 1 = h(t)$. Comme $-5(t-2)^2 \leqslant 0$, on a $h(t) \leqslant 21$ pour tout t, et $h(2) = 21$ avec $2 \in [0\,;4]$. Le ballon atteint sa hauteur maximale de 21 m à l'instant $t = 2$ s.

(b) $h(b) - h(a) = -5(b^2 - a^2) + 20(b-a) = (b-a)\left(-5(b+a) + 20\right) = 5(b-a)(4-a-b)$. On a $b - a > 0$. Comme $a < 2$ et $b \leqslant 2$, on a $a + b < 4$, donc $4 - a - b > 0$. Ainsi $h(b) - h(a) > 0$, c'est-à-dire $h(a) < h(b)$: h est strictement croissante sur $[0\,;2]$.

(c) Faux. La hauteur de 21 m est atteinte à $t = 2$ s, mais $2 \notin [0\,;1{,}5]$: le drone ne filme plus à cet instant. Le maximum sur la vidéo se cherche sur $[0\,;1{,}5]$.

(d) $[0\,;1{,}5]$ est inclus dans $[0\,;2]$, où h est strictement croissante.
Donc pour tout t de $[0\,;1{,}5]$, $h(t) \leqslant h(1{,}5)$: le maximum est atteint à la borne $t = 1{,}5$. On calcule $h(1{,}5) = -5 \times 1{,}5^2 + 20 \times 1{,}5 + 1 = -11{,}25 + 30 + 1 = 19{,}75$. Sur la vidéo, la hauteur maximale du ballon est 19,75 m, atteinte à $t = 1{,}5$ s.

Ex. 49 ★★★ **Le potager de Sacha contre un mur**

(a) Le grillage couvre deux côtés de longueur x et un côté parallèle au mur. Ce côté mesure donc $40 - 2x$ mètres. Il faut $x > 0$ et $40 - 2x > 0$, soit $x < 20$: $x \in]0\,;20[$. On a alors $\mathcal{A}(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$, en m².

(b) $\mathcal{A}(8) = 8 \times 24 = 192$; $\mathcal{A}(9) = 9 \times 22 = 198$; $\mathcal{A}(10) = 10 \times 20 = 200$; $\mathcal{A}(11) = 11 \times 18 = 198$; $\mathcal{A}(12) = 12 \times 16 = 192$. Non : le tableau fait seulement conjecturer un maximum de 200 en $x = 10$. Entre deux valeurs calculées, l'aire pourrait être plus grande.

Ex. 49 **(suite)**

(c) $200 - \mathcal{A}(x) = 200 - 40x + 2x^2 = 2(x^2 - 20x + 100) = 2(x-10)^2$. Or $2(x-10)^2 \geqslant 0$, donc $\mathcal{A}(x) \leqslant 200 = \mathcal{A}(10)$ pour tout x de $]0\,;20[$, et $10 \in]0\,;20[$. L'aire maximale du potager est de 200 m², obtenue pour $x = 10$ m.

(d) Non. Sa règle vaut quand le grillage entoure les quatre côtés, mais ici le mur remplace un côté. Le potager optimal mesure 10 m sur $40 - 2 \times 10 = 20$ m : ce n'est pas un carré. Pour un potager carré, il faudrait $x = 40 - 2x$, soit $x = \frac{40}{3}$, et l'aire vaudrait $\left(\frac{40}{3}\right)^2 \approx 177{,}78$ m², ce qui est moins que 200 m². Conclusion : Sacha doit faire un potager de 10 m sur 20 m (le côté de 20 m le long du mur), d'une aire de 200 m².