Corrigé – Fonctions racine carrée et cube

Mathématiques – Seconde

Racine carrée et cube · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Calculer ★

Calcule sans calculatrice. Pour une racine, vérifie que le résultat est positif et que son carré redonne le nombre.

a) $\sqrt{0{,}81}$

$= 0{,}9$

Contrôle : $0{,}9 \geqslant 0$ et $(0{,}9)^2 = 0{,}81$.

b) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$

$= \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$

$= \dfrac{4}{5}$

Contrôle : $\dfrac{4}{5} \geqslant 0$ et $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$.

c) $\sqrt{1{,}21}$

$= 1{,}1$

Contrôle : $1{,}1 \geqslant 0$ et $(1{,}1)^2 = 1{,}21$.

d) $(-3)^3$

$= (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= 9 \times (-3)$

$= -27$

e) $0{,}4^3$

$= 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4$

$= 0{,}16 \times 0{,}4$

$= 0{,}064$

f) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$

$= -\dfrac{2^3}{3^3}$

$= -\dfrac{8}{27}$

g) $(-0{,}1)^3$

$= (-0{,}1) \times (-0{,}1) \times (-0{,}1)$

$= 0{,}01 \times (-0{,}1)$

$= -0{,}001$

h) On résout $\sqrt{x} = 7$.
$7 \geqslant 0$: on élève au carré, $x = 7^2 = 49$.
Contrôle : $\sqrt{49} = 7$.

i) On résout $x^3 = -1\,000$.
$10^3 = 1\,000$, donc $(-10)^3 = -1\,000$: $x = -10$.
La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: un seul antécédent.

Exercice 2 – Existe ou n'existe pas ★

Pour quelles valeurs de x l'expression existe-t-elle ? Pour les trois dernières, dis si le nombre existe et, s'il existe, calcule-le.

a) Une racine carrée n'existe que pour un nombre positif ou nul : il faut $x - 3 \geqslant 0$.
$x - 3 \geqslant 0$
$\iff x \geqslant 3$

L'expression existe pour $x \in [3\,;\,+\infty[$.

b) Une racine carrée n'existe que pour un nombre positif ou nul : il faut $5 - x \geqslant 0$.
$5 - x \geqslant 0$
$\iff -x \geqslant -5$
$\iff x \leqslant 5$ (on divise par -1 : le sens change)

L'expression existe pour $x \in]-\infty\,;\,5]$.

c) Une racine carrée n'existe que pour un nombre positif ou nul : il faut $2x + 7 \geqslant 0$.
$2x + 7 \geqslant 0$
$\iff 2x \geqslant -7$
$\iff x \geqslant -\dfrac{7}{2}$ (on divise par 2)

L'expression existe pour $x \in [-\dfrac{7}{2}\,;\,+\infty[$.

d) Une racine carrée n'existe que pour un nombre positif ou nul : il faut $-x \geqslant 0$.
$-x \geqslant 0$
$\iff x \leqslant 0$ (on divise par -1 : le sens change)

L'expression existe pour $x \in]-\infty\,;\,0]$.

e) N'existe pas : $-4 < 0$, et une racine carrée n'existe que pour un nombre positif ou nul.

f) On calcule d'abord sous la racine : $(-4)^2 = 16 \geqslant 0$.
Le nombre existe : $\sqrt{16} = 4$.

g) N'existe pas : $\pi \approx 3{,}14 > 3$, donc $3 - \pi < 0$.

Exercice 3 – Comparer sans calculer ★

Compare les deux nombres en citant le sens de variation de la fonction racine carrée ou de la fonction cube.

a) On range les deux nombres : $0 \leqslant 7{,}9 < 8$.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.
Donc $\sqrt{7{,}9} < \sqrt{8}$.

b) On range les deux nombres : $0 \leqslant 0{,}49 < 0{,}5$.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.
Donc $\sqrt{0{,}49} < \sqrt{0{,}5}$.

c) On met au même dénominateur pour ranger : $\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{12} < \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.
On range les deux nombres : $0 \leqslant \dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.
Donc $\sqrt{\dfrac{2}{3}} < \sqrt{\dfrac{3}{4}}$.

d) $\pi \approx 3{,}1416 > 3{,}14$.
On range les deux nombres : $0 \leqslant 3{,}14 < \pi$.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.
Donc $\sqrt{3{,}14} < \sqrt{\pi}$.

e) On range les deux nombres : $-5{,}1 < -5{,}01$.
La fonction cube est croissante sur tout $\mathbb{R}$: elle conserve l'ordre, même pour des négatifs.
Donc $(-5{,}1)^3 < (-5{,}01)^3$.

f) On range les deux nombres : $1{,}02 < 1{,}2$.
La fonction cube est croissante sur tout $\mathbb{R}$: elle conserve l'ordre, même pour des négatifs.
Donc $(1{,}02)^3 < (1{,}2)^3$.

g) On range les deux nombres : $-0{,}5 < 0{,}1$.
La fonction cube est croissante sur tout $\mathbb{R}$: elle conserve l'ordre, même pour des négatifs.
Donc $(-0{,}5)^3 < (0{,}1)^3$.

h) On range les deux nombres : $-3 < -2$.
La fonction cube est croissante sur tout $\mathbb{R}$: elle conserve l'ordre, même pour des négatifs.
Donc $(-3)^3 < (-2)^3$.

Exercice 4 – Équations ★★

Résous dans $[0\,;\,+\infty[$ les équations avec $\sqrt{x}$, dans $\mathbb{R}$ celles avec x^3.

a) $5 \geqslant 0$: on élève au carré, $x = 5^2 = 25$.
Contrôle : $\sqrt{25} = 5$.
$S = \{25\}$

b) $2{,}4 \geqslant 0$: on élève au carré, $x = 2{,}4^2 = 5{,}76$.
$S = \{5{,}76\}$

c) Une racine carrée est toujours positive ou nulle : elle ne vaut jamais -3.
Aucune solution.
$S = \varnothing$

d) $0 \geqslant 0$: on élève au carré, $x = 0^2 = 0$.
$S = \{0\}$

e) On cherche le nombre dont le cube vaut -125.
$5^3 = 125$, donc $(-5)^3 = -125$.
La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: une seule solution (pas de « $\pm$ »).
$S = \{-5\}$

f) $0{,}3^3 = 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}027$: une seule solution, $0{,}3$.
$S = \{0{,}3\}$

g) $3^3 = 27$ et $4^3 = 64$, donc $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^3 = -\dfrac{27}{64}$: une seule solution.
$S = \left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$

h) $2\sqrt{x} = 7$
$\iff \sqrt{x} = \dfrac{7}{2}$ (on divise par 2)
$3{,}5 \geqslant 0$: on élève au carré, $x = 3{,}5^2 = 12{,}25$.
$S = \{12{,}25\}$

Exercice 5 – Inéquations ★★

Résous en t'aidant de la courbe de la fonction racine carrée et du sens de variation des fonctions.

a) $\sqrt{x}$ existe pour $x \geqslant 0$.
$\sqrt{x} = 3$ pour $x = 3^2 = 9$.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: $\sqrt{x} < \sqrt{9} \iff x < 9$.
Avec la condition $x \geqslant 0$: $0 \leqslant x < 9$.
La borne 0 *ne s'oublie pas.*
$S = [0\,;\,9[$

b) On trace la droite $y = 2$: elle coupe la courbe en $x = 4$, car $\sqrt{4} = 2$.
La courbe est sur ou au-dessus de la droite à partir de $x = 4$; « ou égal » : 4 est compris.
$S = [4\,;\,+\infty[$

c) $\sqrt{x} = 1{,}5$ pour $x = 1{,}5^2 = 2{,}25$.
La racine carrée est croissante : $\sqrt{x} \leqslant 1{,}5 \iff x \leqslant 2{,}25$.
Avec la condition $x \geqslant 0$: $0 \leqslant x \leqslant 2{,}25$.
$S = [0\,;\,2{,}25]$

d) Une racine est positive ou nulle, donc toujours > -1 : tous les x **où elle existe**, c'est-à-dire $x \geqslant 0$.
$S = [0\,;\,+\infty[$

e) $1 = 1^3$.

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: elle conserve l'ordre.

$x^3 < 1^3 \iff x < 1$.

$S =]-\infty\,;\,1[$

f) $-8 = (-2)^3$.

La fonction cube est croissante : elle conserve l'ordre.

$x^3 \geqslant (-2)^3 \iff x \geqslant -2$.

$S = [-2\,;\,+\infty[$

Exercice 6 – Variations et encadrements ★★

$r(x) = \sqrt{x}$ et $c(x) = x^3$. Dresse les deux tableaux de variations, puis encadre l'expression demandée.

a) La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: une seule flèche, qui monte.

Images aux bornes : $r(1) = 1$ et $r(16) = 4$.

x	1		16
r	1	↗	4

La fonction est croissante : le minimum est à gauche, 1 (en 1), le maximum à droite, 4 (en 16).

b) La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: une seule flèche, qui monte.

Images aux bornes : $c(-2) = -8$ et $c(3) = 27$.

x	-2		3
c	-8	↗	27

La fonction est croissante : le minimum est à gauche, -8 (en -2), le maximum à droite, 27 (en 3).

c) Les bornes sont positives.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.

$\sqrt{0{,}01} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{0{,}25}$, soit $0{,}1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 0{,}5$ (car $0{,}1^2 = 0{,}01$ et $0{,}5^2 = 0{,}25$).

d) La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: elle conserve l'ordre, même pour des négatifs.

$(-3)^3 \leqslant x^3 \leqslant (-1)^3$, soit $-27 \leqslant x^3 \leqslant -1$.

e) La racine carrée est croissante : $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{16}$, soit $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 4$.

On multiplie par $2 > 0$, l'ordre ne change pas :

$2 \leqslant 2\sqrt{x} \leqslant 8$

On retire 1 à chaque membre :

$1 \leqslant 2\sqrt{x} - 1 \leqslant 7$

f) La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: $(-1)^3 \leqslant x^3 \leqslant 2^3$, soit $-1 \leqslant x^3 \leqslant 8$.

On ajoute 1 à chaque membre :

$0 \leqslant x^3 + 1 \leqslant 9$

Exercice 7 – Ranger x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ ★★★

1. $0 < a < 1$.
   On multiplie les deux membres de $a < 1$ par $a > 0$ (l'ordre ne change pas) : $a \times a < 1 \times a$, soit $a^2 < a$.
   De même, on multiplie $a^2 < a$ par $a > 0$: $a^3 < a^2$.
   $\sqrt{a}$ est aussi dans $]0\,;\,1[$: le même raisonnement donne $\left(\sqrt{a}\right)^2 < \sqrt{a}$, c'est-à-dire $a < \sqrt{a}$.
   Conclusion : $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a}$.

2. $b > 1$: cette fois les inégalités s'inversent.
   On multiplie $b > 1$ par $b > 0$: $b^2 > b$; puis $b^3 > b^2$.
   Et $\sqrt{3} > 1$ donne $\left(\sqrt{3}\right)^2 > \sqrt{3}$, soit $3 > \sqrt{3}$.
   Conclusion : $\sqrt{3} < 3 < 3^2 < 3^3$, soit $\sqrt{3} < 3 < 9 < 27$.

3. On développe : $x^2(x-1) = x^2 \times x - x^2 \times 1 = x^3 - x^2$.
   Pour $x > 0$, $x^2 > 0$: la différence $x^3 - x^2$ a le signe de $x - 1$, négatif avant 1, positif après.
   Quand $x^3 - x^2 < 0$, on a $x^3 < x^2$: la courbe du cube est sous celle du carré.
   Sur $]0\,;\,1[$, la courbe du cube est **sous** celle du carré ; sur $]1\,;\,+\infty[$, elle est **au-dessus** ; elles se coupent en 0 et en 1.

4. Faux.
   Un seul contre-exemple suffit : $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ (car $0{,}5^2 = 0{,}25$), et $0{,}5 > 0{,}25$.
   C'est vrai seulement pour un nombre plus grand que 1.

Exercice 8 – Résoudre en plusieurs étapes ★★★

Résous. Pose d'abord la condition d'existence quand il y a une racine.

a) $\sqrt{x} + 3 = 1$
$\iff \sqrt{x} = -2$ (on retire 3 aux deux membres)
Une racine carrée n'est jamais négative : $\sqrt{x} = -2$ est impossible.
$S = \varnothing$

b) $3\sqrt{x} - 2 \leqslant 4$
$\iff 3\sqrt{x} \leqslant 6$ (on ajoute 2 aux deux membres)
$\iff \sqrt{x} \leqslant 2$ (on divise par $3 > 0$)
$\sqrt{x} = 2$ pour $x = 2^2 = 4$.
La racine est croissante : $\sqrt{x} \leqslant 2 \iff x \leqslant 4$.
Avec la condition $x \geqslant 0$: $0 \leqslant x \leqslant 4$.
$S = [0\,;\,4]$

c) $2x^3 + 16 = 0$
$\iff 2x^3 = -16$ (on retire 16)
$\iff x^3 = -8$ (on divise par 2)
$\iff x = -2$ (car $(-2)^3 = -8$; le cube est croissant, solution unique)
$S = \{-2\}$

d) $x^3 - 1 > 26$
$\iff x^3 > 27$ (on ajoute 1)
$\iff x > 3$ ($27 = 3^3$ et la fonction cube est croissante : elle conserve l'ordre)
$S =]3\,;\,+\infty[$

e) Condition : $x - 1 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 1$.
$3 \geqslant 0$: on élève au carré, $x - 1 = 3^2 = 9$, donc $x = 10$.
$10 \geqslant 1$: la condition est vérifiée.
$S = \{10\}$

f) Condition : $2x + 1 \geqslant 0$, soit $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.
La racine est croissante et $3 = \sqrt{9}$: $\sqrt{2x+1} < 3 \iff 2x + 1 < 9 \iff 2x < 8 \iff x < 4$.
Avec la condition : $-\dfrac{1}{2} \leqslant x < 4$.
$S = [-\dfrac{1}{2}\,;\,4[$

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $\sqrt{36} = 6$, *pas* -6 *: une racine n'est jamais négative.*
Une racine carrée est positive ou nulle : elle ne vaut jamais -6.
$S = \varnothing$.

b) $\sqrt{x}$ *n'existe que pour* $x \geqslant 0$.
On garde $x < 49$ et on ajoute la condition $x \geqslant 0$: $S = [0\,;\,49[$.

c) $(-3)^3 = -27$, *pas* 27 *: une seule solution.*
La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: un seul nombre a pour cube 27.
$S = \{3\}$.

d) *Un nombre négatif au cube reste négatif.*
$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) = 36 \times (-6) = -216$.

e) *Faux entre* 0 *et* 1.
$0{,}5^3 = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125$, et $0{,}125 < 0{,}5$: entre 0 et 1, le cube rend plus petit.

f) $0{,}02^2 = 0{,}0004$, *pas* $0{,}04$.
On contrôle toujours : le carré du résultat doit redonner le nombre.
$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, car $0{,}2^2 = 0{,}04$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. L'ensemble des solutions de $\sqrt{x} \leqslant 4$ est :

Réponse C : $[0\,;\,16]$
$4 \geqslant 0$, $4^2 = 16$, croissance de la racine carrée, et la condition $x \geqslant 0$.

2. L'équation $x^3 = -64$ a pour ensemble de solutions :

Réponse A : $\{-4\}$
$(-4)^3 = -64$ et la solution est unique.

3. L'équation $\sqrt{x} = -5$:

Réponse D : n'a aucune solution
Une racine carrée n'est jamais négative.

4. Pour $x = 0{,}36$:

Réponse B : $x^2 < x < \sqrt{x}$
$0{,}36^2 = 0{,}1296$ et $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$: entre 0 et 1, le carré rend plus petit, la racine plus grand.

5. $(-0{,}2)^3$ est égal à :

Réponse D : $-0{,}008$
$0{,}2^3 = 0{,}008$ et le cube d'un négatif est négatif.

6. Si $4 \leqslant x \leqslant 25$, alors :

Réponse A : $2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 5$
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$: $\sqrt{4} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{25}$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).