49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Fonction carré : calculs, courbe, comparer et encadrer

À retenir : Positifs : même ordre ; négatifs : ordre inversé ($-6 < -5$ donc $(-6)^2 > (-5)^2$). Intervalle contenant 0 : je coupe en 0, le minimum de x^2 est 0. Attention : $-4^2 = -16$ mais $(-4)^2 = 16$; $x^2 = 25$ a deux solutions, 5 et -5.

Ex. 1 ★☆☆ **Images, antécédents et points de la parabole** — f est la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

a. Calcule l'image de -6 par f.

b. Calcule -15^2, puis $(-15)^2$.

c. Calcule $0{,}4^2$, puis compare ce résultat à 0,4.

d. Sachant que $13^2 = 169$, donne sans calcul l'image de -13 par f. Justifie.

e. Détermine tous les antécédents de 49 par f.

f. Le nombre -9 a-t-il un antécédent par f ? Justifie.

g. Le point $A(-1{,}2\,;-1{,}44)$ appartient-il à la courbe représentative de f ? Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Comparer deux carrés sans calculatrice** — Sans calculatrice, compare les deux nombres. Justifie avec les variations de la fonction carré.

a. $4{,}15^2$ et $4{,}51^2$

b. $(-6{,}3)^2$ et $(-6{,}03)^2$

c. $\left(-\frac{7}{3}\right)^2$ et $\left(-\frac{9}{4}\right)^2$

d. $(-1{,}9)^2$ et $2{,}1^2$

e. $(-\pi)^2$ et $3{,}2^2$

Ex. 3 ★★☆ **Encadrer x^2 à partir d'un encadrement de x** — Sans calculatrice, réponds en justifiant avec les variations de la fonction carré.

a. On sait que $1{,}2 \leqslant x \leqslant 3$. Encadre x^2.

b. On sait que $-11 < x < -3$. Encadre x^2.

c. On sait que $-4 \leqslant x \leqslant 1$. Lina écrit : « donc $1 \leqslant x^2 \leqslant 16$ ». Corrige son erreur et donne l'encadrement correct de x^2.

d. On sait que $-0{,}7 \leqslant x \leqslant 0{,}5$. Encadre x^2.

Ex. 4 ★★☆ **Démontrer la décroissance sur $]-\infty\,;0]$** — Soient a et b deux réels tels que $a < b \leqslant 0$.

a. Factorise $a^2 - b^2$.

b. Détermine le signe de $a - b$, puis celui de $a + b$. Justifie.

c. Déduis-en le signe de $a^2 - b^2$, puis compare a^2 et b^2.

d. Conclus sur le sens de variation de la fonction carré sur $]-\infty\,;0]$.

e. Noé affirme : « $-8 < -7$, donc $(-8)^2 < (-7)^2$ ». A-t-il raison ? Justifie avec la question précédente.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux : la copie de Malik** — Voici des affirmations écrites par Malik dans un DS. Dis si chacune est vraie ou fausse, et justifie sans calculatrice (contre-exemple ou variations de la fonction carré). Si elle est fausse, corrige-la.

a. « Si $a < b$, alors $a^2 < b^2$. »

b. « Deux réels qui ont le même carré sont égaux. »

c. « Si $x \leqslant -3{,}5$, alors $x^2 \geqslant 12{,}25$. »

d. « Pour tout réel x, $x^2 \geqslant x$. »

Ex. 6 ★★★ **Symétrie de la parabole et position de points** — Dans un repère, $\mathcal{P}$ est la parabole qui représente la fonction carré $f : x \mapsto x^2$. Un point $M(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{P}$ si $y = x^2$. Il est au-dessus de $\mathcal{P}$ si $y > x^2$, au-dessous si $y < x^2$.

a. Soit a un réel et $M(a\,;a^2)$ un point de $\mathcal{P}$. Démontre que $M'(-a\,;a^2)$ appartient aussi à $\mathcal{P}$. Déduis-en une symétrie de $\mathcal{P}$.

b. Le point $B(2{,}5\,;6)$ est-il sur $\mathcal{P}$, au-dessus ou au-dessous ? Justifie.

c. Déduis-en, sans nouveau calcul, la position du point $B'(-2{,}5\,;6)$ par rapport à $\mathcal{P}$.

d. Deux points de $\mathcal{P}$ ont des abscisses opposées et sont distants de 3. Détermine leurs coordonnées.

Ex. 7 ★★★ **Retrouver le côté d'une salle carrée** — Une salle de danse carrée a pour côté c (en m) et pour aire $A = c^2$ (en m²), avec $20{,}25 \leqslant A \leqslant 30{,}25$. Sans calculatrice, justifie avec les variations de la fonction carré.

a. Encadre le côté c de la salle.

b. Zoé affirme : « le côté de cette salle mesure forcément au moins 5 m ». A-t-elle raison ? Justifie.

c. Une seconde salle carrée a un côté d (en m) tel que $5{,}6 \leqslant d \leqslant 6$. Sans calculer d'aire, justifie que son aire est plus grande que celle de la première.

Ex. 7 **(suite)**

(d) On mesure l'aire de la première salle : $A = 27{,}04$. Résous $x^2 = 27{,}04$ dans $\mathbb{R}$, puis donne le côté de la salle.

2. *Résoudre $x^2 = k$, $x^2 < k$ et $x^2 > k$*

À retenir : J'isole x^2. Si $k > 0$: $x^2 = k \iff x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$, et $x^2 < k \iff -\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$. Si $k = 0$: $x = 0$. Si $k < 0$: $x^2 = k$ n'a pas de solution. Ex. : $x^2 \geqslant 16$, $S =]-\infty\,;-4] \cup [4\,;+\infty[$.

Ex. 8 ★☆☆ **Résoudre $x^2 = k$** — Résous chaque équation. Donne les solutions sous forme exacte.

(a) $x^2 = 49$ (b) $x^2 = -16$ (c) $x^2 = 0$

(d) $x^2 = 13$ (e) $x^2 = \dfrac{9}{25}$

Ex. 9 ★☆☆ **Résoudre $x^2 < k$ et $x^2 > k$** — Résous chaque inéquation. Donne l'ensemble S des solutions sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

(a) $x^2 < 64$ (b) $x^2 \geqslant 36$ (c) $x^2 \leqslant 1{,}44$

(d) $x^2 > -3$ (e) $x^2 \leqslant 0$ (f) $x^2 < -1$

Ex. 10 ★★☆ **Corriger les erreurs d'élèves** — Quatre élèves ont résolu une équation ou une inéquation. Pour chacun, dis si sa résolution est juste ou fausse, justifie, puis corrige si besoin.

(a) Léa : « $x^2 = 81$, donc $x = 9$. »

(b) Noah : « $x^2 < 121$, donc $x < 11$ et $S =]-\infty\,;11[$. »

(c) Inès : « $x^2 = -36$, donc $x = -6$. »

(d) Malik : « $x^2 \geqslant 100$, donc $S = [10\,;+\infty[$. »

Ex. 11 ★★☆ **Isoler x^2 d'abord** — Pour les quatre premières questions, isole d'abord x^2, puis résous. Donne l'ensemble S des solutions.

(a) $4x^2 - 1 = 8$

(b) $2x^2 + 7 \leqslant 7$

(c) $4 - x^2 > 3$

(d) $3x^2 + 1 < -5$

(e) On trace la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 6{,}25$. Donne les abscisses des points de la parabole strictement au-dessus de la droite, puis S pour $x^2 > 6{,}25$.

Ex. 12 ★★★ **Discuter selon le signe de k** — Soit k un nombre réel. On note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et D_k la droite horizontale d'équation $y = k$.

(a) Résous les équations $x^2 = -6$, $x^2 = 0$ et $x^2 = 7$. Donne les solutions sous forme exacte.

(b) Déduis-en, selon le signe de k, le nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de D_k. Justifie.

(c) Détermine les valeurs de k pour lesquelles l'inéquation $x^2 \leqslant k$ a exactement une solution. Justifie.

Ex. 12 **(suite)**

(d) Détermine le nombre k pour lequel l'ensemble des solutions de $x^2 < k$ est $]-0{,}7\,;0{,}7[$. Justifie.

(e) Détermine toutes les valeurs de k pour lesquelles l'ensemble des solutions de $x^2 \geqslant k$ est $\mathbb{R}$. Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Problème : l'aire d'un cadre** — Un cadre est un carré de côté $2x$ cm dont on a retiré, au centre, un carré de côté x cm, avec $x > 0$. On peint tout le cadre sauf l'attache, qui occupe 2 cm² : l'aire peinte est égale à l'aire du cadre moins 2 cm².

(a) Exprime l'aire du cadre en fonction de x, puis l'aire peinte.

(b) On veut une aire peinte de 10 cm². Écris l'équation, résous-la dans $\mathbb{R}$, puis donne la valeur de x.

(c) On veut une aire peinte d'au plus 73 cm². Écris l'inéquation, résous-la dans $\mathbb{R}$, puis donne les valeurs de x possibles.

(d) On veut une aire peinte strictement supérieure à 34 cm². Résous l'inéquation dans $\mathbb{R}$ (forme exacte), puis conclus pour x.

(e) Ben veut une aire peinte comprise entre 10 cm² et 73 cm², bornes incluses. Déduis-en toutes les valeurs de x possibles.

Ex. 14 ★★★ **Démontrer la résolution de $x^2 < 9$** — On veut résoudre $x^2 < 9$ et $x^2 \geqslant 9$ en s'appuyant uniquement sur les variations de la fonction carré.

(a) Rappelle le sens de variation de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$. En écrivant $9 = 3^2$, détermine les solutions positives de $x^2 < 9$.

(b) Rappelle le sens de variation de la fonction carré sur $]-\infty\,;0]$. En écrivant $9 = (-3)^2$, détermine les solutions négatives de $x^2 < 9$.

(c) Déduis-en l'ensemble S des solutions de $x^2 < 9$. Donne ensuite un contre-exemple qui montre que « $x < 3$ » ne convient pas.

(d) Par la même méthode, en séparant $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$, résous $x^2 \geqslant 9$.

(e) Traduis les résultats des questions 3 et 4 à l'aide de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = 9$.

3. *Fonction inverse : calculs, courbe, comparer et encadrer*

À retenir : $\dfrac{1}{x}$ a le signe de x, et 0 n'a pas d'image. Pour deux nombres de même signe, l'ordre s'inverse : $3 \leqslant x \leqslant 6$ donne $\frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$. S'ils sont de signes contraires, c'est le négatif qui a le plus petit inverse.

Ex. 15 ★☆☆ **Images et antécédent par la fonction inverse** — On note g la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Calcule $g(-8)$.

(b) Inès affirme : « l'image de $\frac{2}{7}$ par g est $-\frac{2}{7}$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Sans calcul, dis si $g(0{,}04)$ est plus grand ou plus petit que 1. Calcule-le ensuite.

(d) Donne le signe de $g\left(-\frac{1}{3}\right)$, puis calcule cette image.

(e) Calcule $g(0)$ si c'est possible. Justifie.

(f) Détermine l'antécédent de 1,6 par g.

Ex. 16 ★☆☆ **Comparer des inverses sans calculatrice** — Sans calculatrice, compare les deux nombres. Justifie avec le signe des nombres ou les variations de la fonction inverse.

(a) $\frac{1}{3{,}7}$ et $\frac{1}{3{,}07}$

(b) $\frac{1}{-0{,}6}$ et $\frac{1}{-0{,}9}$

(c) $\frac{1}{-7}$ et $\frac{1}{0{,}2}$

(d) $\frac{1}{\pi}$ et 0,25

(e) Range dans l'ordre croissant : $\frac{1}{-3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{-1{,}5}$.

Ex. 17 ★★☆ **Encadrer l'inverse d'un nombre** — Dans chaque question, on donne un encadrement du réel x. Utilise les variations de la fonction inverse, sans calculatrice.

(a) On sait que $2 \leqslant x \leqslant 12{,}5$. Encadre $\frac{1}{x}$.

(b) On sait que $-20 \leqslant x \leqslant -0{,}5$. Encadre $\frac{1}{x}$.

(c) Lou sait que $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Il écrit : « donc $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{2}$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(d) On sait que $0 < x < 1$. Démontre que $\frac{1}{x} > 1$.

Ex. 18 ★★★ **Démontrer les variations de la fonction inverse** — Soient a et b deux réels non nuls.

(a) Démontre que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.

(b) On suppose $a < b < 0$. Donne le signe de $b - a$ et celui de ab. Déduis-en que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

(c) On admet qu'elle est aussi strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. Complète son tableau de variations :

x	-∞	0	+∞
$\frac{1}{x}$			

(d) Vrai ou faux : « la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ ». Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Vrai ou faux sur la fonction inverse** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie avec le signe de $\frac{1}{x}$ ou les variations de la fonction inverse. Si elle est fausse, donne un contre-exemple ou corrige-la.

(a) « Il existe un réel x tel que $\frac{1}{x} = 0$. »

(b) « Si a et b sont deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, alors $a > b$. »

(c) « Si $x < -1$, alors $-1 < \frac{1}{x} < 0$. »

(d) « Si x est un réel non nul tel que $x < 2$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$. »

(e) « Si a et b sont deux réels non nuls tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$. »

Ex. 20 ★★★ **Trajet à vélo et fonction inverse** — Malo parcourt 24 km à vélo, à la vitesse constante de v km/h, avec $v > 0$. La durée de son trajet, en heures, est $t(v) = \frac{24}{v} = 24 \times \frac{1}{v}$.

(a) Calcule $t(16)$ et $t(20)$, en heures puis en minutes.

(b) Démontre que plus Malo roule vite, plus son trajet est court. Utilise les variations de la fonction inverse.

(c) Sa vitesse est comprise entre 12 et 18 km/h. Sans calculatrice, encadre la durée du trajet, en heures puis en minutes.

(d) Malo veut mettre strictement moins de 1 h 15 min, soit 1,25 h. Résous $\frac{24}{v} < 1{,}25$ pour $v > 0$, puis conclus.

Ex. 21 ★★★ **La copie de Soraya** — Soraya a rendu les réponses ci-dessous dans un contrôle sur la fonction inverse. Pour chacune, dis si elle a raison et justifie. Si elle se trompe, corrige.

(a) « $-0{,}4 < 2{,}5$, donc $\frac{1}{-0{,}4} > \frac{1}{2{,}5}$, car la fonction inverse est décroissante. »

(b) « On sait que $4 \leqslant x \leqslant 9$, donc $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{9}$. »

(c) « On sait que $-5 \leqslant x \leqslant -0{,}25$, donc $0{,}2 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 4$. »

(d) « Le point $A(-6{,}25\,;-0{,}16)$ est sur la courbe de la fonction inverse. Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc $B(6{,}25\,;-0{,}16)$ y est aussi. »

(e) « Le point $E(-3{,}2\,;0{,}3125)$ est sur la courbe de la fonction inverse, car $3{,}2 \times 0{,}3125 = 1$. »

4. *Résoudre $1/x = k$ et $1/x < k$*

À retenir : $\frac{1}{x} = k : x = \frac{1}{k}$ si $k \neq 0$, aucune solution si $k = 0$. Pour $\frac{1}{x} < k$: j'isole $\frac{1}{x}$, je sépare $x < 0$ et $x > 0$, sans multiplier par x. $0 \notin S$. Ex. : $\frac{1}{x} > 10$, $S =]0\,;0{,}1[$.

Ex. 22 ★☆☆ **Résoudre $\frac{1}{x} = k$** — Résous chaque équation dans $\mathbb{R}^*$. Donne la solution sous forme exacte.

(a) $\frac{1}{x} = 4$ (b) $\frac{1}{x} = -4$ (c) $\frac{1}{x} = 0$

(d) $\frac{1}{x} = \frac{5}{3}$ (e) $\frac{1}{x} = -0{,}8$ (f) $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$

Ex. 23 ★☆☆ **Inéquations avec l'inverse, sans calculatrice** — Résous chaque inéquation dans $\mathbb{R}^*$ en traitant séparément $x < 0$ et $x > 0$.

(a) $\frac{1}{x} > 3$ (b) $\frac{1}{x} < 0$ (c) $\frac{1}{x} \leqslant -5$

(d) $\frac{1}{x} < 9$ (e) $\frac{1}{x} > 0$ (f) $\frac{1}{x} > -0{,}5$

Ex. 24 ★★☆ **L'erreur de Lina** — Pour résoudre $\frac{1}{x} < 2$, Lina écrit : « je multiplie par x : $1 < 2x$, donc $x > \frac{1}{2}$. $S = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$. »

(a) Calcule $\frac{1}{x}$ pour $x = -1$. Ce nombre est-il solution de $\frac{1}{x} < 2$? Déduis-en que Lina se trompe.

(b) Explique pourquoi le passage de $\frac{1}{x} < 2$ à $1 < 2x$ n'est pas justifié.

(c) Résous correctement $\frac{1}{x} < 2$ en séparant les cas $x < 0$ et $x > 0$.

(d) Malik affirme : « $\frac{1}{x} \geqslant 2$ a pour ensemble de solutions $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **Isoler $\frac{1}{x}$, puis résoudre** — Pour chaque équation ou inéquation, commence par isoler $\frac{1}{x}$, puis résous-la dans $\mathbb{R}^*$.

(a) Résous $5 - \frac{2}{x} = 1$. (b) Résous $\frac{3}{x} + 7 = 7$.

(c) Résous $4 - \frac{1}{x} > 10$. (d) Résous $\frac{2}{x} - 1 \leqslant 15$.

(e) Résous $2 - \frac{3}{x} < 2$.

Ex. 26 ★★★ **Démontrer la règle, puis l'appliquer** — Dans cet exercice, k est un réel et on étudie l'inéquation $\frac{1}{x} < k$ dans $\mathbb{R}^*$. On ne multiplie jamais par x sans connaître son signe.

(a) On suppose $k > 0$. Explique pourquoi tout réel $x < 0$ est solution de $\frac{1}{x} < k$.

(b) On suppose $k > 0$ et $x > 0$. Montre que $\frac{1}{x} - k = \frac{1 - kx}{x}$, puis déduis-en une condition sur x équivalente à $\frac{1}{x} < k$.

(c) Résous $\frac{1}{x} < 0{,}625$ dans $\mathbb{R}^*$.

(d) On suppose $k < 0$. Justifie qu'aucun $x > 0$ n'est solution. Pour $x < 0$, déduis de l'égalité précédente une condition sur x équivalente à $\frac{1}{x} < k$.

(e) Résous $\frac{1}{x} < -\frac{4}{7}$ dans $\mathbb{R}^*$.

Ex. 27 ★★★ **Le tour de piste de Noé** — Noé fait des tours d'une piste cyclable de 1 km. S'il roule à la vitesse constante v (en km/h, avec $v > 0$), un tour dure $t = \frac{1}{v}$ heure.

(a) Calcule la durée d'un tour lorsque Noé roule à 16 km/h. Donne-la en heure, puis en minutes et secondes.

(b) Résous l'inéquation $\frac{1}{x} \leqslant 0{,}04$ dans $\mathbb{R}^*$.

(c) Noé veut boucler un tour en 0,04 heure au plus. Déduis-en les vitesses qui conviennent. Explique pourquoi on ne garde qu'une partie de l'ensemble trouvé à la question précédente.

(d) Noé affirme qu'en roulant assez vite, il pourra faire un tour en une durée nulle. A-t-il raison ? Justifie en résolvant une équation.

(e) Noé fait deux tours, puis une pause de 0,02 h. L'ensemble dure 0,12 h, donc $\frac{2}{v} + 0{,}02 = 0{,}12$. Détermine v.

Ex. 28 ★★★ **Les deux branches de l'hyperbole** — On note $\mathcal{H}$ l'hyperbole qui représente la fonction inverse. Voici son tableau de variations. Pour un réel k, on trace la droite D_k d'équation $y = k$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

(a) Selon le signe de k, combien de points d'intersection D_k a-t-elle avec $\mathcal{H}$? Justifie à l'aide des deux branches de $\mathcal{H}$.

(b) Pour $k = \frac{2}{3}$, donne les coordonnées du point commun à D_k et $\mathcal{H}$, puis les abscisses des points de $\mathcal{H}$ strictement sous D_k.

(c) Élise affirme : « 0 est solution de $\frac{1}{x} \geqslant -2{,}5$, car $0 \geqslant -2{,}5$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Résous $\frac{1}{x} \geqslant -2{,}5$ dans $\mathbb{R}^*$. Décris les parties de $\mathcal{H}$ situées sur ou au-dessus de $D_{-2{,}5}$.

5. *Fonction valeur absolue*

À retenir : $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$ (alors $-x > 0$). $|x - a|$ est la distance entre x et a. $|x| < k \iff -k < x < k$ si $k > 0$. Piège : $\sqrt{(-2)^2} = 2$, pas -2.

Ex. 29 ★☆☆ **Enlever les barres** — Sans calculatrice, écris chaque nombre sans barres de valeur absolue. Simplifie la racine carrée lorsque c'est possible.

(a) $|-7{,}2|$

(b) $|4 - 9{,}6|$

(c) $|\pi - 4|$

(d) $|\sqrt{2} - 1{,}5|$

(e) $\sqrt{(-6)^2}$

Ex. 29 **(suite)**

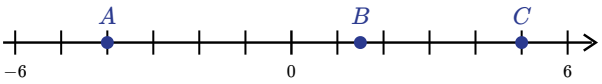
(f) Pour $x = -11$, écris $|x|$ sous la forme $-x$, puis calcule-le.

Ex. 30 ★☆☆ **Équations et inéquations avec $|x|$** — Résous dans $\mathbb{R}$. Donne l'ensemble S des solutions.

(a) $|x| = 4{,}5$ (b) $|x| = -2$ (c) $|x| = 0$

(d) $|x| < 6$ (e) $|x| \geqslant 2{,}5$ (f) $|x| > -3$

Ex. 31 ★★☆ **Distances sur une droite graduée** — Les points A, B et C ont pour abscisses respectives -4 ; 1,5 et 5.



(a) Calcule la distance AC à l'aide d'une valeur absolue.

(b) Léo affirme : « $|x + 2|$ est la distance entre x et 2. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Résous $|x - 1{,}5| = 3{,}5$. Interprète ce résultat à l'aide des points B et C.

(d) Résous $|x + 2| < 3$ en interprétant $|x + 2|$ comme une distance.

Ex. 32 ★★☆ **Vrai ou faux sur la valeur absolue** — Vrai ou faux ? Justifie. Pour « faux », un contre-exemple suffit.

(a) Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = x$.

(b) Pour tous réels a et b, $|a + b| = |a| + |b|$.

(c) Sur $]-\infty\,;0]$, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est la demi-droite d'équation $y = x$.

(d) La fonction valeur absolue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(e) Si $-5 \leqslant x \leqslant -2$, alors $2 \leqslant |x| \leqslant 5$.

Ex. 33 ★★★ **Démontrer les variations de la valeur absolue** — On étudie la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$. Justifie chaque réponse avec soin.

(a) Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$. Écris $|a|$ et $|b|$ sans barres, puis démontre que $|a| < |b|$.

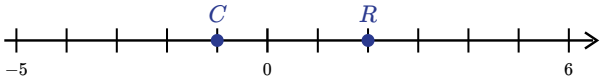
(b) Soient a et b deux réels tels que $a < b \leqslant 0$. Démontre que $|a| > |b|$. Déduis-en le tableau de variations de la fonction valeur absolue et son minimum.

(c) Sans calculatrice, compare $|-3{,}4|$ et $|-2{,}9|$ en utilisant les variations de la fonction valeur absolue.

(d) On sait que $-2{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}8$. Encadre $|x|$ le plus précisément possible.

(e) La courbe de la fonction valeur absolue passe-t-elle par $A(-2{,}6\,;-2{,}6)$? Par $B(-2{,}6\,;2{,}6)$? Sur quelle demi-droite se trouve chaque point de la courbe ?

Ex. 34 ★★★ **Un robot sur une piste graduée** — Une piste droite est graduée en mètres. Une borne de recharge R se trouve à l'abscisse 2 et une caméra C à l'abscisse -1. Un robot se trouve à l'abscisse x.



(a) Écris, avec une valeur absolue, la distance d_1 entre le robot et la borne, puis la distance d_2 entre le robot et la caméra.

(b) Le robot est à l'abscisse $x = -3{,}5$. Calcule d_1 et d_2, en écrivant les résultats sans barres.

(c) La borne détecte le robot quand $d_1 < 4$. Trouve l'ensemble S des abscisses x pour lesquelles le robot est détecté.

(d) Trouve l'abscisse x pour laquelle le robot est à égale distance de la borne et de la caméra.

(e) Tom écrit : « $d_1 + d_2 = |x - 2 + x + 1| = |2x - 1|$ pour tout réel x ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 35 ★★★ **Étude de $f(x) = 2\sqrt{x^2} - 5$** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2} - 5$.

(a) Justifie que $f(x) = 2|x| - 5$ pour tout réel x. Élise écrit : « $f(-4) = 2 \times (-4) - 5 = -13$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Calcule $f(3 - \pi)$ et donne le résultat sous forme exacte, sans barres.

(c) À l'aide des variations de la fonction valeur absolue, dresse le tableau de variations de f. Quel est son minimum ?

(d) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 6$, puis l'équation $f(x) = -7$.

(e) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 1$, puis l'inéquation $f(x) \geqslant -1$.

6. *Approfondissement : fonctions racine carrée et cube*

À retenir : $\sqrt{x}$ n'existe que si $x \geqslant 0$ et vaut toujours au moins 0 : $\sqrt{x} \leqslant 3 \iff 0 \leqslant x \leqslant 9$, et $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. x^3 a le signe de x, $(-x)^3 = -x^3$, et le cube conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$: $x^3 = -8 \iff x = -2$.

Ex. 36 ★☆☆ **Racines carrées sans calculatrice** — Calcule sans calculatrice. Si le calcul est impossible, explique pourquoi.

(a) $\sqrt{121}$

(b) $\left(\sqrt{13}\right)^2$

(c) $\sqrt{\dfrac{25}{81}}$

(d) $\sqrt{-16}$

Ex. 36 (suite)

(e) $\sqrt{36+64}$, puis $\sqrt{36}+\sqrt{64}$. Ces deux nombres sont-ils égaux ?

(f) $\sqrt{(-5)^2}$

Ex. 37 ★☆☆ **Cubes et symétrie par rapport à O** — Calcule sans calculatrice et justifie quand on te le demande.

(a) $(-3)^3$

(b) $(-7)^3$ et -7^3, puis $(-7)^2$ et -7^2

(c) $0{,}3^3$

(d) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3$

(e) On sait que $1{,}2^3 = 1{,}728$. Déduis-en $(-1{,}2)^3$ sans calcul.

(f) Le point $A(-0{,}5\,;0{,}125)$ est-il sur la courbe de la fonction cube ? Justifie.

Ex. 38 ★★☆ **Équations et inéquations avec racine et cube** — Résous dans $[0\,;+\infty[$ les équations et l'inéquation avec $\sqrt{x}$, et dans $\mathbb{R}$ celles avec x^3. Isole d'abord $\sqrt{x}$ ou x^3. Donne l'ensemble S des solutions.

(a) $3\sqrt{x}-2=10$ (b) $\sqrt{x}+9=5$

(c) $\sqrt{x}<1{,}5$ (d) $x^3=-125$

(e) $2x^3-1<1457$

Ex. 39 ★★☆ **Corriger, comparer, encadrer** — Réponds sans calculatrice, en t'appuyant sur les variations des fonctions racine carrée et cube.

(a) Inès écrit : « $x^3=216$ a deux solutions, 6 et -6. » A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Compare $\sqrt{3{,}7}$ et $\sqrt{3{,}07}$.

(c) Compare $(-2{,}3)^3$ et $(-2{,}03)^3$.

(d) On note a le nombre tel que $a^3=50$. Encadre a par deux entiers consécutifs.

(e) Vrai ou faux ? « Si $x^3<1$, alors $0\leqslant x<1$. » Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Démontrer et ranger : racine carrée et puissances** — Approfondissement (préparation à la 1re spécialité). On admet que la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et que $(\sqrt{x})^2=x$ pour tout $x\geqslant 0$.

(a) Soit a et b deux réels tels que $0\leqslant a<b$. Suppose que $\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}$, élève au carré et aboutis à une contradiction. Que démontres-tu ?

(b) Soit a et b deux réels positifs. Développe $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, puis déduis-en, avec le résultat précédent, que $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

(c) Pour $x=0{,}25$, calcule x^2, x^3 et $\sqrt{x}$, puis range x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ dans l'ordre croissant.

(d) Démontre que si $0<x<1$, alors $x^3<x^2<x<\sqrt{x}$. Utilise la croissance de la racine carrée pour situer $\sqrt{x}$.

(e) Sans calculatrice, range x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ pour $x=1{,}21$, en adaptant la démonstration précédente.

Ex. 41 ★★★ **Les boîtes cubiques de Noé** — Approfondissement. Noé fabrique des boîtes cubiques. Une boîte de côté c dm ($c>0$) a un volume de c^3 dm³, et 1 dm³ = 1 L. Réponds sans calculatrice (les calculs posés à la main sont autorisés).

(a) Une boîte contient exactement 2,197 L. Détermine son côté et justifie qu'il n'y a qu'une seule possibilité.

(b) Noé veut une boîte de 20 L. Encadre son côté c entre deux entiers consécutifs.

(c) Affine : encadre ce côté c entre deux nombres décimaux consécutifs ayant un chiffre après la virgule.

(d) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3<8$, puis déduis-en les côtés possibles d'une boîte de moins de 8 L.

(e) Une boîte de 160 L a un volume 8 fois plus grand que la boîte de 20 L. Exprime son côté en fonction de c, puis encadre-le.

Ex. 42 ★★★ **Vrai ou faux : racine carrée et cube** — Approfondissement. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie par un calcul, une propriété du cours ou un contre-exemple.

(a) « L'inéquation $\sqrt{x}>-2$ a pour ensemble de solutions $\mathbb{R}$. »

(b) « Pour tous réels positifs a et b, si $\sqrt{a}<\sqrt{b}$, alors $a<b$. »

(c) « Si $-1{,}5\leqslant x\leqslant 4$, alors $-3{,}375\leqslant x^3\leqslant 64$ et $2{,}25\leqslant x^2\leqslant 16$. »

(d) « Pour tous réels a et b, si $a^2=b^2$, alors $a=b$; de même, si $a^3=b^3$, alors $a=b$. »

(e) « Les seules solutions de l'équation $\sqrt{x}=x$ sont 0 et 1. »

7. *Comparer x, x^2, x^3, $\sqrt{x}$ et $1/x$*

À retenir : Pour $x>0$, je compare x à 1 : si $0<x<1$, $x^3<x^2<x<\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}>1$; si $x>1$, l'ordre s'inverse. Pour démontrer : signe de $x^2-x=x(x-1)$. Piège : $0{,}3^2=0{,}09<0{,}3$.

Ex. 43 ★☆☆ **Le carré agrandit-il toujours ?** — Sans calculatrice, compare les deux nombres. Justifie en comparant d'abord le nombre de départ à 0 et à 1.

(a) $0{,}4^2$ et $0{,}4$

(b) $1{,}7^2$ et $1{,}7$

(c) $(-2{,}5)^2$ et $-2{,}5$

(d) $\dfrac{1}{0{,}75}$ et $0{,}75$

(e) $\dfrac{1}{1{,}6}$ et $1{,}6$

(f) Approfondissement : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

Ex. 44 ★☆☆ **Un tableau pour voir l'ordre changer** — Sans calculatrice, complète le tableau en valeurs exactes. Les lignes x^3 et $\sqrt{x}$ sont un approfondissement (préparation à la 1re spécialité).

x	$\frac{1}{4}$	1	9
x^2			
x^3			
$\sqrt{x}$			
$\frac{1}{x}$			

(a) Complète les lignes x^2 et x^3.

(b) Complète les lignes $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$.

(c) Range dans l'ordre croissant les cinq nombres de la colonne $x = \frac{1}{4}$ (ligne x comprise).

(d) Fais de même pour la colonne $x = 9$. Qu'est-ce qui a changé par rapport à la question précédente ?

(e) Que remarques-tu dans la colonne $x = 1$?

Ex. 45 ★★☆ **Parabole ou droite : qui est au-dessus ?** — On note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et d la droite d'équation $y = x$.

(a) Factorise $x^2 - x$.

(b) Étudie le signe de $x^2 - x$ lorsque $0 < x < 1$, puis lorsque $x > 1$.

(c) Déduis-en la position de $\mathcal{P}$ par rapport à d sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

(d) Détermine par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de d.

(e) Le point $B(1{,}1\,;1{,}21)$ appartient-il à $\mathcal{P}$? Est-il au-dessus ou au-dessous de d ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **Un nombre ou son inverse ?** — Dans cet exercice, x désigne un réel non nul.

(a) Écris $x - \frac{1}{x}$ sous la forme d'un seul quotient, puis factorise son numérateur.

(b) On suppose $x > 0$. Déduis-en le signe de $x - \frac{1}{x}$ selon que $0 < x < 1$, $x = 1$ ou $x > 1$.

(c) Déduis-en l'ensemble S des réels $x > 0$ tels que $\frac{1}{x} \leqslant x$.

(d) Sans calculatrice, range dans l'ordre croissant $0{,}7$, $0{,}7^2$ et $\frac{1}{0{,}7}$.

(e) Sans calculatrice, range dans l'ordre croissant $1{,}3$, $1{,}3^2$ et $\frac{1}{1{,}3}$.

Ex. 47 ★★★ **Démontrer le rangement des cinq nombres** — Dans cet exercice, x désigne un réel positif. Les questions sur x^3 et $\sqrt{x}$ sont un approfondissement (préparation à la 1re spécialité). Aucune calculatrice n'est autorisée.

(a) Factorise $x^3 - x^2$, puis détermine les réels x tels que $x^3 = x^2$.

(b) On suppose $0 < x < 1$. Démontre que $x^3 < x^2 < x$.

(c) On suppose $0 < x < 1$ et on pose $t = \sqrt{x}$. Justifie que $0 < t < 1$, puis démontre que $x < \sqrt{x}$.

(d) Déduis-en le rangement dans l'ordre croissant de $0{,}6^3$, $0{,}6^2$, $0{,}6$, $\sqrt{0{,}6}$ et $\frac{1}{0{,}6}$.

(e) En adaptant les raisonnements, range dans l'ordre croissant $2{,}4^3$, $2{,}4^2$, $2{,}4$, $\sqrt{2{,}4}$ et $\frac{1}{2{,}4}$.

Ex. 48 ★★★ **Vrai ou faux : gare aux négatifs** — En révisant pour le contrôle, les élèves de la classe de Yanis ont écrit des affirmations. Pour chacune, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie : par une démonstration si elle est vraie, par un contre-exemple si elle est fausse.

(a) « Pour tout réel x, $x^2 \geqslant x$. »

(b) « Pour tout réel $x < 0$, $x^2 > x$. »

(c) « Si $x > 0$ et $x^2 < x$, alors $\frac{1}{x} > 1$. »

(d) « Pour tout réel x non nul, si $x > \frac{1}{x}$, alors $x > 1$. »

Ex. 49 ★★★ **Trois courbes et un encadrement** — Inès sait seulement que $0{,}8 \leqslant x \leqslant 0{,}9$. On note M, N et P les points d'abscisse x situés respectivement sur la parabole d'équation $y = x^2$, sur la droite d'équation $y = x$ et sur l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

(a) Encadre x^2 en justifiant.

(b) Encadre $\frac{1}{x}$ en justifiant. Donne les bornes sous forme de fractions.

(c) Inès dit : « Mes encadrements de x et de x^2 se chevauchent, donc je ne peux pas savoir lequel est le plus grand. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Range les ordonnées de M, N et P, puis déduis-en l'ordre des trois points de bas en haut.

(e) On suppose maintenant $1{,}2 \leqslant x \leqslant 1{,}5$. Sans nouvel encadrement, donne l'ordre des points M, N et P de bas en haut. Justifie.