1. Fonction carré : calculs, courbe, comparer et encadrer

Ex. 1 ★☆☆ **Images, antécédents et points de la parabole**

(a) $f(-6) = (-6)^2 = 36$.

(b) $-15^2 = -(15^2) = -225$: le carré porte seulement sur 15. Avec les parenthèses, $(-15)^2 = 225$.

(c) $0{,}4^2 = 0{,}16$, et $0{,}16 < 0{,}4$: le carré d'un nombre compris entre 0 et 1 est plus petit que ce nombre.

(d) -13 et 13 sont opposés, et $(-x)^2 = x^2$. Donc $f(-13) = 13^2 = 169$.

(e) $x^2 = 49$ donne $x = 7$ ou $x = -7$, car $7^2 = 49$ et $(-7)^2 = 49$. Les antécédents de 49 sont -7 et 7.

(f) Non. Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$. Un carré n'est jamais négatif, donc -9 n'a pas d'antécédent par f.

(g) $f(-1{,}2) = (-1{,}2)^2 = 1{,}44$ et $1{,}44 \neq -1{,}44$. Donc A n'appartient pas à la courbe de f (la parabole n'est jamais sous l'axe des abscisses).

Ex. 2 ★☆☆ **Comparer deux carrés sans calculatrice**

(a) $0 \leqslant 4{,}15 < 4{,}51$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $4{,}15^2 < 4{,}51^2$.

(b) $-6{,}3 < -6{,}03 \leqslant 0$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc l'ordre est inversé : $(-6{,}3)^2 > (-6{,}03)^2$.

(c) $\frac{7}{3} = \frac{28}{12}$ et $\frac{9}{4} = \frac{27}{12}$, donc $-\frac{7}{3} < -\frac{9}{4} \leqslant 0$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc $\left(-\frac{7}{3}\right)^2 > \left(-\frac{9}{4}\right)^2$.

(d) Les deux nombres sont de signes contraires : je compare leurs distances à 0. $(-1{,}9)^2 = 1{,}9^2$ et $0 \leqslant 1{,}9 < 2{,}1$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $(-1{,}9)^2 < 2{,}1^2$.

(e) $(-\pi)^2 = \pi^2$ et $0 \leqslant \pi < 3{,}2$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $(-\pi)^2 < 3{,}2^2$.

Ex. 3 ★★☆ **Encadrer x^2 à partir d'un encadrement de x**

(a) $0 \leqslant 1{,}2 \leqslant x \leqslant 3$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc l'ordre est conservé : $1{,}44 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

Ex. 3 (suite)

(b) $-11 < x < -3 \leqslant 0$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc l'ordre est inversé et les bornes s'échangent : $(-3)^2 < x^2 < (-11)^2$, soit $9 < x^2 < 121$.

(c) L'intervalle contient 0 : il faut couper en 0. Si $-4 \leqslant x \leqslant 0$, par décroissance, $0 \leqslant x^2 \leqslant 16$. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, par croissance, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$. Lina oublie que x peut valoir 0 : en réunissant, $0 \leqslant x^2 \leqslant 16$.

(d) Je coupe en 0. Si $-0{,}7 \leqslant x \leqslant 0$: la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 0{,}49$. Si $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$: elle est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 0{,}25$. En réunissant : $0 \leqslant x^2 \leqslant 0{,}49$.

Ex. 4 ★★☆ **Démontrer la décroissance sur $]-\infty\,;0]$**

(a) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

(b) $a < b$, donc $a - b < 0$. Comme $a < b \leqslant 0$, on a $a < 0$ et $b \leqslant 0$, donc $a + b < 0$.

(c) $a^2 - b^2$ est le produit de deux nombres strictement négatifs, donc $a^2 - b^2 > 0$. Ainsi $a^2 > b^2$.

(d) Pour $a < b \leqslant 0$, on a $a^2 > b^2$: l'ordre est inversé. Donc la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

(e) Non. $-8 < -7 \leqslant 0$ et la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc $(-8)^2 > (-7)^2$ (en effet $64 > 49$). Noé a tort.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux : la copie de Malik**

(a) Faux. Contre-exemple : $a = -7$ et $b = -1$. On a $-7 < -1$, mais $(-7)^2 = 49$ et $(-1)^2 = 1$, donc $a^2 > b^2$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$: elle inverse l'ordre. Correction : si $0 \leqslant a < b$, alors $a^2 < b^2$, car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Faux. Contre-exemple : $(-0{,}9)^2 = 0{,}81$ et $0{,}9^2 = 0{,}81$, mais $-0{,}9 \neq 0{,}9$. Correction : si $a^2 = b^2$, alors $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 = 0$, donc $a = b$ ou $a = -b$. Deux réels qui ont le même carré sont égaux ou opposés.

(c) Vrai. $x \leqslant -3{,}5 \leqslant 0$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc elle inverse l'ordre : $x^2 \geqslant (-3{,}5)^2$, c'est-à-dire $x^2 \geqslant 12{,}25$. L'affirmation de Malik est juste.

Ex. 5 **(suite)**

(d) Faux. Contre-exemple : $x = 0{,}2$ donne $x^2 = 0{,}04$, et $0{,}04 < 0{,}2$. Correction : pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^2 \geqslant x$, car $x^2 - x = x(x-1)$ est le produit de deux nombres positifs.

Ex. 6 ★★★ **Symétrie de la parabole et position de points**

(a) $f(-a) = (-a)^2 = a^2$: l'ordonnée de M' est l'image de son abscisse, donc $M' \in \mathcal{P}$. M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Donc $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(b) $2{,}5^2 = 6{,}25$ et $6 < 6{,}25$, donc $y_B < x_B^2$: le point B est au-dessous de $\mathcal{P}$.

(c) B et B' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, et $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à cet axe. Comme B est au-dessous de $\mathcal{P}$, B' l'est aussi. En effet, $(-2{,}5)^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$ et $6 < 6{,}25$.

(d) D'après la première question, ces points s'écrivent $M(a\,;a^2)$ et $M'(-a\,;a^2)$, avec $a > 0$. Ils ont la même ordonnée, donc $MM' = a - (-a) = 2a$. Ainsi $2a = 3$, donc $a = 1{,}5$, et $1{,}5^2 = 2{,}25$. Les points sont $(1{,}5\,;2{,}25)$ et $(-1{,}5\,;2{,}25)$.

Ex. 7 ★★★ **Retrouver le côté d'une salle carrée**

(a) c est une longueur, donc $c \geqslant 0$, et $A = c^2$. Si $c < 4{,}5$, alors $c^2 < 4{,}5^2 = 20{,}25$, car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: c'est impossible. De même, si $c > 5{,}5$, alors $c^2 > 30{,}25$: c'est impossible. Donc $4{,}5 \leqslant c \leqslant 5{,}5$.

(b) Non. Contre-exemple : avec $c = 4{,}6$, on a $c^2 = 21{,}16$. Or $20{,}25 \leqslant 21{,}16 \leqslant 30{,}25$, donc cette salle convient, et pourtant $c < 5$. Zoé a tort.

(c) On a vu que $c \leqslant 5{,}5$.
Donc $0 \leqslant c \leqslant 5{,}5 < 5{,}6 \leqslant d$, soit $0 \leqslant c < d$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $c^2 < d^2$: l'aire de la seconde salle est plus grande.

(d) $5{,}2^2 = 27{,}04$ et $(-5{,}2)^2 = 27{,}04$, donc $S = \{-5{,}2\,;5{,}2\}$. Un côté est positif, donc la salle a un côté de 5,2 m. On vérifie que $4{,}5 \leqslant 5{,}2 \leqslant 5{,}5$.

2. *Résoudre $x^2 = k$, $x^2 < k$ et $x^2 > k$*

Ex. 8 ★☆☆ **Résoudre $x^2 = k$**

(a) $49 > 0$ et $\sqrt{49} = 7$: $x^2 = 49 \iff x = -7$ ou $x = 7$. Il y a deux solutions : $S = \{-7\,;7\}$.

(b) Un carré est toujours positif ou nul, donc il ne peut pas valoir -16 : $S = \varnothing$. Attention, -4 ne convient pas, car $(-4)^2 = 16$.

(c) $x^2 = 0 \iff x = 0$: il n'y a qu'une seule solution, $S = \{0\}$.

(d) $13 > 0$: $x^2 = 13 \iff x = -\sqrt{13}$ ou $x = \sqrt{13}$, donc $S = \{-\sqrt{13}\,;\sqrt{13}\}$
(valeurs exactes).

(e) $\frac{9}{25} > 0$ et $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$: $S = \left\{-\frac{3}{5}\,;\frac{3}{5}\right\}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Résoudre $x^2 < k$ et $x^2 > k$**

(a) $64 > 0$ et $\sqrt{64} = 8$: $x^2 < 64 \iff -8 < x < 8$. Les crochets sont ouverts, car l'inégalité est stricte : $S =]-8\,;8[$.

(b) $36 > 0$ et $\sqrt{36} = 6$: $x^2 \geqslant 36 \iff x \leqslant -6$ ou $x \geqslant 6$. On obtient une réunion de deux intervalles : $S =]-\infty\,;-6] \cup [6\,;+\infty[$.

(c) $1{,}44 > 0$ et $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$:
$x^2 \leqslant 1{,}44 \iff -1{,}2 \leqslant x \leqslant 1{,}2$. Les crochets sont fermés : $S = [-1{,}2\,;1{,}2]$.

(d) Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0 > -3$: $S = \mathbb{R}$.

(e) Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 \leqslant 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$: $S = \{0\}$.

(f) Un carré n'est jamais strictement négatif : $S = \varnothing$.

Ex. 10 ★★☆ **Corriger les erreurs d'élèves**

(a) Léa a oublié une solution : $(-9)^2 = 81$. Comme $81 > 0$ et $\sqrt{81} = 9$, on a $S = \{-9\,;9\}$.

(b) Noah a tort : $-12 < 11$, mais $(-12)^2 = 144$ et $144 > 121$, donc -12 n'est pas solution. Comme $121 > 0$ et $\sqrt{121} = 11$: $x^2 < 121 \iff -11 < x < 11$, donc $S =]-11\,;11[$.

(c) Inès a tort : $(-6)^2 = 36 \neq -36$. Un carré est toujours positif ou nul, donc il ne peut pas valoir -36 : $S = \varnothing$.

(d) Malik a oublié les nombres négatifs :
$(-20)^2 = 400 \geqslant 100$, mais $-20 \notin [10\,;+\infty[$. Comme $100 > 0$ et $\sqrt{100} = 10$: $S =]-\infty\,;-10] \cup [10\,;+\infty[$.

Ex. 11 ★★☆ **Isoler x^2 d'abord**

(a) $4x^2-1=8 \iff 4x^2=9 \iff x^2=\frac{9}{4}$. Comme $\frac{9}{4}>0$ et $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$: $S=\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\}$.

(b) $2x^2+7\leqslant 7 \iff 2x^2\leqslant 0 \iff x^2\leqslant 0$. Un carré est toujours positif ou nul, donc $x^2=0$: $S=\{0\}$.

(c) $4-x^2>3 \iff -x^2>-1 \iff x^2<1$ (on change le sens de l'inégalité en multipliant par -1). Comme $\sqrt{1}=1$: $S=]-1;1[$.

(d) $3x^2+1<-5 \iff 3x^2<-6 \iff x^2<-2$. Un carré n'est jamais négatif : $S=\varnothing$.

(e) $\sqrt{6{,}25}=2{,}5$: la parabole coupe la droite aux points d'abscisses $-2{,}5$ et $2{,}5$. Elle est strictement au-dessus de la droite pour $x<-2{,}5$ ou $x>2{,}5$.
Donc $S=]-\infty;-2{,}5[\cup]2{,}5;+\infty[$.

Ex. 12 ★★★ **Discuter selon le signe de k**

(a) Un carré est toujours positif ou nul et $-6<0$, donc $x^2=-6$ n'a aucune solution : $S=\varnothing$. Ensuite, $x^2=0 \iff x=0$, il y a une seule solution : $S=\{0\}$. Enfin, comme $7>0$, $x^2=7 \iff x=-\sqrt{7}$ ou $x=\sqrt{7}$: $S=\{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}$.

(b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de D_k sont les solutions de $x^2=k$. Si $k<0$: il n'y a aucune solution, donc aucun point d'intersection. Si $k=0$: il y a une seule solution, donc un seul point, l'origine O. Si $k>0$: il y a deux solutions, $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$, donc deux points d'intersection.

(c) Si $k<0$: pour tout réel x, $x^2\geqslant 0>k$, donc il n'y a aucune solution. Si $k=0$: $x^2\leqslant 0 \iff x^2=0 \iff x=0$, il y a une seule solution. Si $k>0$: $S=[-\sqrt{k};\sqrt{k}]$ contient une infinité de nombres. Conclusion : il y a exactement une solution si et seulement si $k=0$.

(d) Si $k\leqslant 0$: pour tout réel x, $x^2\geqslant 0\geqslant k$, donc $x^2<k$ n'a aucune solution. Il faut donc $k>0$, et alors $S=]-\sqrt{k};\sqrt{k}[$. On veut $\sqrt{k}=0{,}7$, donc $k=0{,}7^2=0{,}49$.

(e) Si $k\leqslant 0$: pour tout réel x, $x^2\geqslant 0\geqslant k$, donc $S=\mathbb{R}$. Si $k>0$: 0 n'est pas solution, car $0^2=0<k$, donc $S\neq\mathbb{R}$. Conclusion : l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$ si et seulement si $k\leqslant 0$.

Ex. 13 ★★★ **Problème : l'aire d'un cadre**

(a) L'aire du cadre est l'aire du grand carré moins celle du petit : $(2x)^2-x^2=4x^2-x^2=3x^2$. L'aire du cadre vaut $3x^2$ cm², et l'aire peinte vaut $3x^2-2$ cm².

(b) $3x^2-2=10 \iff 3x^2=12 \iff x^2=4$. Comme $4>0$ et $\sqrt{4}=2$, dans $\mathbb{R}$: $S=\{-2;2\}$. Or $x>0$ car c'est une longueur, donc on garde seulement $x=2$. L'aire peinte vaut 10 cm² pour $x=2$ cm.

(c) $3x^2-2\leqslant 73 \iff 3x^2\leqslant 75 \iff x^2\leqslant 25$. Comme $25>0$ et $\sqrt{25}=5$, dans $\mathbb{R}$: $S=[-5;5]$, avec des crochets fermés car l'inégalité est large. Avec $x>0$: $x\in]0;5]$.

(d) $3x^2-2>34 \iff 3x^2>36 \iff x^2>12$. Comme $12>0$ et $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, dans $\mathbb{R}$:
$S=]-\infty;-2\sqrt{3}[\cup]2\sqrt{3};+\infty[$. Avec $x>0$, l'aire peinte dépasse 34 cm² si et seulement si $x>2\sqrt{3}$.

(e) On veut $10\leqslant 3x^2-2\leqslant 73$. D'abord, $3x^2-2\geqslant 10 \iff x^2\geqslant 4=2^2$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $x>0$, donc cela équivaut à $x\geqslant 2$. D'après la question 3, on a aussi $x\leqslant 5$. Conclusion : $x\in[2;5]$.

Ex. 14 ★★★ **Démontrer la résolution de $x^2<9$**

(a) La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Pour $x\geqslant 0$, comme $3\geqslant 0$: $x^2<3^2 \iff x<3$. Les solutions positives forment donc l'intervalle $[0;3[$.

(b) La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$. Pour $x\leqslant 0$, comme $-3\leqslant 0$: $x^2<(-3)^2 \iff x>-3$, car l'ordre est inversé. Les solutions négatives forment donc l'intervalle $]-3;0]$.

(c) $S=]-3;0]\cup[0;3[=]-3;3[$. « $x<3$ » ne convient pas : par exemple $-5<3$, mais $(-5)^2=25>9$, donc -5 n'est pas solution.

(d) Pour $x\geqslant 0$: la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc $x^2\geqslant 3^2 \iff x\geqslant 3$. Pour $x\leqslant 0$: elle est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, donc $x^2\geqslant(-3)^2 \iff x\leqslant -3$. On obtient une réunion de deux intervalles : $S=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[$.

(e) La droite d'équation $y=9$ coupe la parabole aux points d'abscisses -3 et 3. Les solutions de $x^2<9$ sont les abscisses des points de la parabole situés strictement sous la droite : ce sont les nombres de $]-3;3[$. Les solutions de $x^2\geqslant 9$ sont les abscisses des points situés sur la droite ou au-dessus : ce sont les nombres de $]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[$.

3. *Fonction inverse : calculs, courbe, comparer et encadrer*

Ex. 15 ★☆☆ **Images et antécédent par la fonction inverse**

(a) $g(-8) = \frac{1}{-8} = -0{,}125$.

(b) Non. Inès a donné l'opposé de $\frac{2}{7}$. L'inverse de $\frac{2}{7}$ est $\frac{7}{2}$, donc $g\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

(c) $0 < 0{,}04 < 1$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{0{,}04} > \frac{1}{1}$, soit $g(0{,}04) > 1$. On calcule $g(0{,}04) = \frac{1}{0{,}04} = 25$.

(d) $-\frac{1}{3} < 0$ et $\frac{1}{x}$ a le signe de x, donc $g\left(-\frac{1}{3}\right) < 0$. On calcule $g\left(-\frac{1}{3}\right) = -3$.

(e) C'est impossible : 0 est la valeur interdite, on ne divise pas par 0.
Donc 0 n'a pas d'image par g.

(f) $\frac{1}{x} = 1{,}6$ équivaut à $x = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$. L'antécédent de 1,6 est 0,625.

Ex. 16 ★☆☆ **Comparer des inverses sans calculatrice**

(a) $0 < 3{,}07 < 3{,}7$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{3{,}07} > \frac{1}{3{,}7}$.

(b) $-0{,}9 < -0{,}6 < 0$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\frac{1}{-0{,}9} > \frac{1}{-0{,}6}$.

(c) Les deux nombres sont de signes contraires, donc on ne se sert pas des variations. $\frac{1}{-7} < 0$ et $\frac{1}{0{,}2} > 0$, donc $\frac{1}{-7} < \frac{1}{0{,}2}$.

(d) $0{,}25 = \frac{1}{4}$. $0 < \pi < 4$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{\pi} > \frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{\pi} > 0{,}25$.

(e) $-3 < -1{,}5 < 0$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\frac{1}{-1{,}5} < \frac{1}{-3}$. Ces deux inverses sont négatifs et $\frac{1}{6} > 0$. D'où $\frac{1}{-1{,}5} < \frac{1}{-3} < \frac{1}{6}$.

Ex. 17 ★★☆ **Encadrer l'inverse d'un nombre**

(a) Les bornes sont strictement positives et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc l'ordre s'inverse : $\frac{1}{12{,}5} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}$. On obtient $0{,}08 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 0{,}5$.

(b) Les bornes sont strictement négatives et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\frac{1}{-0{,}5} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{-20}$. On obtient $-2 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -0{,}05$.

Ex. 17 (suite)

(c) Non. L'intervalle $[-2\,;3]$ contient 0, qui n'a pas d'image : on ne peut pas utiliser la décroissance d'un seul coup. Son encadrement est d'ailleurs absurde, car $\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$. On coupe en 0 : si $-2 \leqslant x < 0$, alors $\frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{2}$; si $0 < x \leqslant 3$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{3}$.

(d) x et 1 sont dans $]0\,;+\infty[$, et la fonction inverse y est strictement décroissante. Comme $x < 1$, on a $\frac{1}{x} > \frac{1}{1}$, donc $\frac{1}{x} > 1$. L'inverse d'un nombre compris entre 0 et 1 est plus grand que 1.

Ex. 18 ★★★ **Démontrer les variations de la fonction inverse**

(a) On réduit au même dénominateur ab, qui n'est pas nul : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$.

(b) $a < b$, donc $b - a > 0$. a et b sont deux négatifs, donc $ab > 0$. Le quotient est strictement positif, donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. L'ordre est inversé : la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

(c) Il y a une flèche $\searrow$ sur $]-\infty\,;0[$, une double barre « ‖ » sous 0 (valeur interdite) et une flèche $\searrow$ sur $]0\,;+\infty[$.

x	-∞	0	+∞
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

(d) Faux. On a $-4 < 5$, mais $\frac{1}{-4} < 0 < \frac{1}{5}$: l'ordre n'est pas inversé. La fonction inverse est décroissante sur chacun des deux intervalles, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

Ex. 19 ★★★ **Vrai ou faux sur la fonction inverse**

(a) Faux. $\frac{1}{x}$ a le signe de x : il est strictement négatif sur $]-\infty\,;0[$ et strictement positif sur $]0\,;+\infty[$. Il n'est donc jamais nul. Et 0 n'a pas d'image, car c'est la valeur interdite. L'hyperbole ne coupe pas l'axe des abscisses.

(b) Vrai. a et b sont dans $]0\,;+\infty[$, où la fonction inverse est strictement décroissante. Si on avait $a \leqslant b$, on aurait $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$, ce qui contredit $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
Donc $a > b$.

(c) Vrai. $x < -1 < 0$: les deux nombres sont strictement négatifs et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\frac{1}{x} > \frac{1}{-1}$, soit $\frac{1}{x} > -1$. De plus, $\frac{1}{x}$ a le signe de x, donc $\frac{1}{x} < 0$. Ainsi $-1 < \frac{1}{x} < 0$.

(d) Faux. Contre-exemple : $x = -3$. On a bien $-3 < 2$, mais $\frac{1}{-3} < 0 < \frac{1}{2}$. Ici, -3 et 2 sont de signes contraires, donc on ne peut pas utiliser la décroissance.
L'affirmation n'est vraie que pour $0 < x < 2$.

Ex. 19 (suite)

(e) Faux. On a $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$ avec $b-a>0$, mais le signe de ab dépend de a et de b. Contre-exemple : $a=-2$ et $b=4$ donnent $\frac{1}{-2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}<0$. L'affirmation est vraie seulement si a et b sont de même signe, car alors $ab>0$.

Ex. 20 ★★★ Trajet à vélo et fonction inverse

(a) $t(16)=\frac{24}{16}=1{,}5$ h, soit $1{,}5\times 60=90$ min. $t(20)=\frac{24}{20}=1{,}2$ h, soit $1{,}2\times 60=72$ min.

(b) Soient v_1 et v_2 deux vitesses telles que $0<v_1<v_2$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{v_1}>\frac{1}{v_2}$. On multiplie par $24>0$, ce qui ne change pas le sens : $t(v_1)>t(v_2)$. Plus la vitesse est grande, plus la durée est petite.

(c) $12\leqslant v\leqslant 18$, et les bornes sont strictement positives. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{18}\leqslant\frac{1}{v}\leqslant\frac{1}{12}$. En multipliant par $24>0$: $\frac{24}{18}\leqslant t(v)\leqslant\frac{24}{12}$, soit $\frac{4}{3}\leqslant t(v)\leqslant 2$. Le trajet dure donc entre 80 min et 120 min.

(d) On isole $\frac{1}{v}$: $\frac{1}{v}<\frac{1{,}25}{24}=\frac{5}{96}$. On a $v>0$ et $\frac{5}{96}=\frac{1}{19{,}2}$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $v>19{,}2$. Pour mettre moins de 1 h 15 min, Malo doit rouler à plus de 19,2 km/h.

Ex. 21 ★★★ La copie de Soraya

(a) Elle se trompe. $-0{,}4$ et $2{,}5$ sont de signes contraires, et la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. C'est le signe qui décide : $\frac{1}{-0{,}4}<0$ et $\frac{1}{2{,}5}>0$.
Donc $\frac{1}{-0{,}4}<\frac{1}{2{,}5}$.
(En effet, $-2{,}5<0{,}4$.)

(b) Elle se trompe : $\frac{1}{4}>\frac{1}{9}$, donc son encadrement est impossible. Les bornes 4 et 9 sont strictement positives, et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. L'ordre s'inverse : $\frac{1}{9}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{4}$.

(c) Elle se trompe : x est négatif, donc $\frac{1}{x}$ est négatif, puisqu'il a le signe de x. Les bornes sont strictement négatives, et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$. On obtient $\frac{1}{-0{,}25}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{-5}$, soit $-4\leqslant\frac{1}{x}\leqslant-0{,}2$.

(d) Elle a raison pour A : $\frac{1}{-6{,}25}=-0{,}16$. Mais l'hyperbole est symétrique par rapport à l'origine O, pas par rapport à l'axe des ordonnées (c'est la parabole qui l'est). $\frac{1}{6{,}25}=0{,}16\neq-0{,}16$, donc B n'est pas sur la courbe. Le symétrique de A par rapport à O, $A'(6{,}25\,;0{,}16)$, y est.

Ex. 21 (suite)

(e) Elle se trompe : $\frac{1}{-3{,}2}=-0{,}3125$, car $\frac{1}{x}$ a le signe de x. Comme $0{,}3125\neq-0{,}3125$, E n'est pas sur la courbe. C'est le point $(-3{,}2\,;-0{,}3125)$ qui y est.

4. *Résoudre $1/x=k$ et $1/x<k$*

Ex. 22 ★☆☆ Résoudre $\frac{1}{x}=k$

(a) $4\neq 0$, donc $x=\frac{1}{4}=0{,}25$. $S=\{0{,}25\}$.

(b) $-4\neq 0$, donc $x=\frac{1}{-4}=-0{,}25$ (la solution est négative, comme k). $S=\{-0{,}25\}$.

(c) Un inverse n'est jamais nul : $\frac{1}{x}\neq 0$ pour tout $x\neq 0$. Il n'y a aucune solution : $S=\varnothing$.

(d) $\frac{5}{3}\neq 0$, donc $x=\frac{1}{5/3}=\frac{3}{5}$. $S=\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

(e) $-0{,}8\neq 0$, donc $x=\frac{1}{-0{,}8}=-1{,}25$. $S=\{-1{,}25\}$.

(f) $\frac{1}{7}\neq 0$, donc $x=\frac{1}{1/7}=7$. $S=\{7\}$.

Ex. 23 ★★☆ Inéquations avec l'inverse, sans calculatrice

(a) Si $x<0$: $\frac{1}{x}<0<3$, aucune solution. Si $x>0$: $3=\frac{1}{1/3}$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{x}>\frac{1}{1/3}\iff x<\frac{1}{3}$. $S=\left]0\,;\frac{1}{3}\right[$.

(b) $\frac{1}{x}$ a le signe de x : $\frac{1}{x}<0\iff x<0$. $S=]-\infty\,;0[$.

(c) Si $x>0$: $\frac{1}{x}>0>-5$, aucune solution. Si $x<0$: $-5=\frac{1}{-1/5}$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{-1/5}\iff x\geqslant-\frac{1}{5}$.
$S=\left[-\frac{1}{5}\,;0\right[$
(0 est exclu).

(d) Si $x<0$: $\frac{1}{x}<0<9$, toujours vrai. Si $x>0$: $9=\frac{1}{1/9}$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{x}<\frac{1}{1/9}\iff x>\frac{1}{9}$.
$S=]-\infty\,;0[\cup\left]\frac{1}{9}\,;+\infty\right[$.

(e) $\frac{1}{x}$ a le signe de x : $\frac{1}{x}>0\iff x>0$. $S=]0\,;+\infty[$.

(f) Si $x>0$: $\frac{1}{x}>0>-0{,}5$, toujours vrai. Si $x<0$: $-0{,}5=\frac{1}{-2}$, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\frac{1}{x}>\frac{1}{-2}\iff x<-2$.
$S=]-\infty\,;-2[\cup]0\,;+\infty[$.

Ex. 24 ★★☆ L'erreur de Lina

(a) $\frac{1}{-1}=-1$ et $-1<2$: $x=-1$ est solution. Or $-1\notin\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$: l'ensemble de Lina oublie des solutions, son résultat est faux.

(b) Multiplier une inégalité par x ne conserve le sens que si $x>0$; si $x<0$, le sens change. Lina ne connaît pas le signe de x, elle n'a donc pas le droit de multiplier ainsi.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Si $x<0$: $\frac{1}{x}<0<2$, tous les négatifs sont solutions. Si $x>0$: $2=\frac{1}{1/2}$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{x}<\frac{1}{1/2}\iff x>\frac{1}{2}$. Conclusion : $S=]-\infty\,;0[\cup\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

(d) Faux. -1 appartient à l'ensemble de Malik, mais $\frac{1}{-1}=-1<2$: -1 n'est pas solution. De plus, cet ensemble contient 0, qui est la valeur interdite. Si $x<0$: $\frac{1}{x}<0<2$, aucune solution. Si $x>0$: $2=\frac{1}{1/2}$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{1/2}\iff x\leqslant\frac{1}{2}$.
Donc $S=\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$.

Ex. 25 ★★☆ **Isoler $\frac{1}{x}$, puis résoudre**

(a) $5-\frac{2}{x}=1\iff-\frac{2}{x}=-4\iff\frac{2}{x}=4\iff\frac{1}{x}=2$. Comme $2\neq0$: $x=\frac{1}{2}$. $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(b) $\frac{3}{x}+7=7\iff\frac{3}{x}=0\iff\frac{1}{x}=0$. Un inverse n'est jamais nul, donc $S=\varnothing$.

(c) $4-\frac{1}{x}>10\iff-\frac{1}{x}>6\iff\frac{1}{x}<-6$ (on multiplie par -1 : le sens change). Si $x>0$: $\frac{1}{x}>0$, aucune solution. Si $x<0$: $-6=\frac{1}{-1/6}$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $x>-\frac{1}{6}$. Conclusion : $S=\left]-\frac{1}{6}\,;0\right[$.

(d) $\frac{2}{x}-1\leqslant15\iff\frac{2}{x}\leqslant16\iff\frac{1}{x}\leqslant8$. Si $x<0$: $\frac{1}{x}<0\leqslant8$, toujours vrai. Si $x>0$: $8=\frac{1}{1/8}$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $x\geqslant\frac{1}{8}$. Conclusion : $S=]-\infty\,;0[\cup\left[\frac{1}{8}\,;+\infty\right[$.

(e) $2-\frac{3}{x}<2\iff-\frac{3}{x}<0\iff\frac{3}{x}>0$ (multiplication par -1 : le sens change) $\iff\frac{1}{x}>0$. Or $\frac{1}{x}$ a le signe de x. Conclusion : $S=]0\,;+\infty[$.

Ex. 26 ★★★ **Démontrer la règle, puis l'appliquer**

(a) Si $x<0$, alors $\frac{1}{x}<0$. Or $0<k$, donc $\frac{1}{x}<0<k$. Tout réel $x<0$ est donc solution.

(b) On met au même dénominateur : $\frac{1}{x}-k=\frac{1}{x}-\frac{kx}{x}=\frac{1-kx}{x}$. Comme $x>0$, ce quotient a le signe de $1-kx$. Donc $\frac{1}{x}<k\iff1-kx<0\iff kx>1\iff x>\frac{1}{k}$ (on divise par $k>0$). Pour $x>0$, $\frac{1}{x}<k$ équivaut donc à $x>\frac{1}{k}$.

(c) Ici $k=0{,}625>0$ et $\frac{1}{0{,}625}=1{,}6$. D'après les deux questions précédentes, tout $x<0$ est solution et, pour $x>0$, $\frac{1}{x}<0{,}625\iff x>1{,}6$.
Donc $S=]-\infty\,;0[\cup]1{,}6\,;+\infty[$.

Ex. 26 **(suite)**

(d) Si $x>0$: $\frac{1}{x}>0>k$, aucune solution. Si $x<0$: $\frac{1}{x}-k=\frac{1-kx}{x}$ a le signe contraire de $1-kx$.
Donc $\frac{1}{x}<k\iff1-kx>0\iff kx<1\iff x>\frac{1}{k}$ (on divise par $k<0$: le sens change). Pour $k<0$, $S=\left]\frac{1}{k}\,;0\right[$.

(e) Ici $k=-\frac{4}{7}<0$ et $\frac{1}{k}=-\frac{7}{4}$. D'après la question précédente, aucun $x>0$ n'est solution et, pour $x<0$, $\frac{1}{x}<-\frac{4}{7}\iff x>-\frac{7}{4}$.
Donc $S=\left]-\frac{7}{4}\,;0\right[$.

Ex. 27 ★★★ **Le tour de piste de Noé**

(a) $t=\frac{1}{16}=0{,}0625$ h. Or $0{,}0625\times60=3{,}75$ min, soit 3 min et $0{,}75\times60=45$ s. Un tour dure donc 3 min 45 s.

(b) Si $x<0$: $\frac{1}{x}<0<0{,}04$, donc tout $x<0$ est solution. Si $x>0$: $0{,}04=\frac{1}{25}$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{25}\iff x\geqslant25$.
Donc $S=]-\infty\,;0[\cup[25\,;+\infty[$.

(c) Une vitesse est strictement positive, donc on ne garde que les solutions $x>0$: $v\in[25\,;+\infty[$. Noé doit rouler à au moins 25 km/h.

(d) Il a tort. Une durée nulle correspond à $\frac{1}{v}=0$. Or un inverse n'est jamais nul : cette équation n'a aucune solution. La durée d'un tour n'est donc jamais nulle, quelle que soit la vitesse.

(e) On isole d'abord $\frac{1}{v}$: $\frac{2}{v}=0{,}12-0{,}02=0{,}1$, donc $\frac{1}{v}=0{,}05$. Comme $0{,}05\neq0$, $v=\frac{1}{0{,}05}=20$. Noé roule à 20 km/h
(vérification : $\frac{2}{20}+0{,}02=0{,}12$).

Ex. 28 ★★★ **Les deux branches de l'hyperbole**

(a) Sur $]-\infty\,;0[$, $\frac{1}{x}<0$: la branche de gauche est sous l'axe des abscisses. Sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x}>0$: la branche de droite est au-dessus. Si $k\neq0$, $\frac{1}{x}=k$ a une seule solution, $x=\frac{1}{k}$: D_k coupe $\mathcal{H}$ en un seul point, sur la branche de droite si $k>0$, sur celle de gauche si $k<0$. Si $k=0$, $\frac{1}{x}=0$ n'a aucune solution : D_0 ne coupe pas $\mathcal{H}$.

(b) $\frac{2}{3}\neq0$, donc $\frac{1}{x}=\frac{2}{3}\iff x=\frac{3}{2}$: le point commun est $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{2}{3}\right)$. Sous D_k : $\frac{1}{x}<\frac{2}{3}$. Toute la branche de gauche convient, car $\frac{1}{x}<0<\frac{2}{3}$. Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction inverse est strictement décroissante, donc $\frac{1}{x}<\frac{1}{3/2}\iff x>\frac{3}{2}$. Abscisses : $]-\infty\,;0[\cup\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

(c) Elle a tort. 0 est la valeur interdite : $\frac{1}{0}$ n'existe pas, donc 0 ne peut pas être solution. Élise a comparé x à $-2{,}5$ au lieu de comparer $\frac{1}{x}$ à $-2{,}5$.

Ex. 28 **(suite)**

(d) Si $x > 0$: $\frac{1}{x} > 0 > -2{,}5$, donc tout $x > 0$ est solution. Si $x < 0$: $-2{,}5 = \frac{1}{-0{,}4}$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{-0{,}4} \iff x \leqslant -0{,}4$. Donc $S =]-\infty\,;-0{,}4] \cup]0\,;+\infty[$. Graphiquement, toute la branche de droite convient, ainsi que la partie de la branche de gauche d'abscisse inférieure ou égale à $-0{,}4$.

5. *Fonction valeur absolue*

Ex. 29 ★☆☆ **Enlever les barres**

(a) $-7{,}2 < 0$, donc $|-7{,}2| = 7{,}2$.

(b) $4 - 9{,}6 = -5{,}6 < 0$, donc $|4 - 9{,}6| = 5{,}6$.

(c) $\pi < 4$, donc $\pi - 4 < 0$. On prend l'opposé : $|\pi - 4| = 4 - \pi$.

(d) $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $1{,}5^2 = 2{,}25$, donc $(\sqrt{2})^2 < 1{,}5^2$. Ces deux nombres sont positifs et la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\sqrt{2} < 1{,}5$. Ainsi $\sqrt{2} - 1{,}5 < 0$ et $|\sqrt{2} - 1{,}5| = 1{,}5 - \sqrt{2}$.

(e) $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = |-6|$: le résultat n'est pas -6.

(f) $x = -11 < 0$, donc $|x| = -x = -(-11) = 11$. Ici, $-x$ est un nombre positif.

Ex. 30 ★☆☆ **Équations et inéquations avec $|x|$**

(a) $4{,}5 > 0$, donc il y a deux solutions : $x = 4{,}5$ ou $x = -4{,}5$. $S = \{-4{,}5\,;4{,}5\}$.

(b) Une valeur absolue est toujours positive ou nulle, donc elle ne peut pas valoir -2. La droite $y = -2$ ne coupe pas la courbe. $S = \varnothing$.

(c) $|x| = 0$ seulement pour $x = 0$. $S = \{0\}$.

(d) $|x| < 6 \iff -6 < x < 6$: les réels situés à une distance de 0 inférieure à 6. $S =]-6\,;6[$.

(e) $|x| \geqslant 2{,}5 \iff x \leqslant -2{,}5$ ou $x \geqslant 2{,}5$. $S =]-\infty\,;-2{,}5] \cup [2{,}5\,;+\infty[$.

(f) Pour tout réel x, $|x| \geqslant 0 > -3$: l'inégalité est toujours vraie. $S = \mathbb{R}$.

Ex. 31 ★★☆ **Distances sur une droite graduée**

(a) $AC = |5 - (-4)| = |9| = 9$. La distance AC vaut 9.

(b) Non. $|x + 2| = |x - (-2)|$, donc $|x + 2|$ est la distance entre x et -2, et non entre x et 2.

Ex. 31 **(suite)**

(c) On cherche les réels situés à une distance 3,5 de 1,5 : $x = 1{,}5 - 3{,}5 = -2$ ou $x = 1{,}5 + 3{,}5 = 5$. $S = \{-2\,;5\}$. Ce sont les deux points situés à 3,5 unités de B ; l'un d'eux est C, d'abscisse 5.

(d) $|x + 2|$ est la distance entre x et -2. On veut qu'elle soit inférieure à 3, donc $-2 - 3 < x < -2 + 3$, soit $-5 < x < 1$. $S =]-5\,;1[$.

Ex. 32 ★★☆ **Vrai ou faux sur la valeur absolue**

(a) Faux. Pour $x = -7$: $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 \neq -7$. En fait, $\sqrt{x^2} = |x|$.

(b) Faux. Pour $a = 6$ et $b = -10$: $|6 + (-10)| = |-4| = 4$, alors que $|6| + |-10| = 16$.

(c) Faux. Pour $x \leqslant 0$, $|x| = -x$: c'est la demi-droite d'équation $y = -x$. Par exemple, le point d'abscisse -2 a pour ordonnée $|-2| = 2$, et non -2.

(d) Faux. $-4 < -1$, mais $|-4| = 4 > |-1| = 1$. La fonction est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, puis strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Son minimum est 0, atteint en 0.

(e) Vrai. La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$. Elle inverse donc l'ordre : $|-5| \geqslant |x| \geqslant |-2|$, soit $2 \leqslant |x| \leqslant 5$.

Ex. 33 ★★★ **Démontrer les variations de la valeur absolue**

(a) Comme $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$: $|a| = a$ et $|b| = b$. Or $a < b$, donc $|a| < |b|$. Conclusion : la fonction valeur absolue est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Comme $a < 0$ et $b \leqslant 0$: $|a| = -a$ et $|b| = -b$. Or $a < b$, donc $-a > -b$ (multiplier par -1 change le sens), soit $|a| > |b|$. La fonction est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$. Tableau : x : $-\infty$, 0, $+\infty$; $|x|$: $\searrow 0 \nearrow$. Son minimum vaut 0 et il est atteint en $x = 0$.

(c) On a $-3{,}4 < -2{,}9 \leqslant 0$. La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc elle change l'ordre : $|-3{,}4| > |-2{,}9|$.
(On vérifie : $3{,}4 > 2{,}9$.)

(d) L'intervalle contient 0, donc je le coupe en 0. Si $-2{,}5 \leqslant x \leqslant 0$: la fonction est décroissante, donc $0 \leqslant |x| \leqslant |-2{,}5| = 2{,}5$. Si $0 \leqslant x \leqslant 1{,}8$: elle est croissante, donc $0 \leqslant |x| \leqslant 1{,}8$. Conclusion : $0 \leqslant |x| \leqslant 2{,}5$
(et non $1{,}8 \leqslant |x| \leqslant 2{,}5$).

Ex. 33 **(suite)**

(e) $|-2{,}6| = 2{,}6 \neq -2{,}6$: A n'est pas sur la courbe. $|-2{,}6| = 2{,}6$: B est sur la courbe. Pour $x < 0$, $|x| = -x$: le point est sur la demi-droite $y = -x$ (c'est le cas de B). Pour $x \geqslant 0$, il est sur la demi-droite $y = x$. La courbe a la forme d'un V.

Ex. 34 ★★★ **Un robot sur une piste graduée**

(a) $d_1 = |x-2|$. $d_2 = |x-(-1)| = |x+1|$: $|x+1|$ est la distance entre x et -1
(et pas entre x et 1).

(b) $d_1 = |-3{,}5-2| = |-5{,}5| = 5{,}5$ et $d_2 = |-3{,}5+1| = |-2{,}5| = 2{,}5$. Le robot est à 5,5 m de la borne et à 2,5 m de la caméra.

(c) $d_1 < 4$ veut dire que x est à moins de 4 de 2, donc $2-4 < x < 2+4$, soit $-2 < x < 6$.
Donc $S =]-2\,;6[$: le robot est détecté quand son abscisse est strictement comprise entre -2 et 6.

(d) Le point situé à égale distance de -1 et de 2 est le milieu de $[CR]$: $x = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5$. Vérification : $|0{,}5-2| = 1{,}5$ et $|0{,}5+1| = 1{,}5$. Le robot doit être à l'abscisse 0,5.

(e) Tom a tort : en général $|a+b| \neq |a| + |b|$. Contre-exemple avec $x = 0$: $d_1 + d_2 = |-2| + |1| = 3$, alors que $|2\times 0 - 1| = |-1| = 1$. Comme $3 \neq 1$, son égalité est fausse.

Ex. 35 ★★★ **Étude de $f(x) = 2\sqrt{x^2} - 5$**

(a) Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$, donc $f(x) = 2|x| - 5$. Élise a tort : $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ et pas -4.
Donc $f(-4) = 2\times 4 - 5 = 3$.

(b) Comme $3 < \pi$, on a $3-\pi < 0$, donc $|3-\pi| = \pi - 3$.
Ainsi $f(3-\pi) = 2(\pi-3) - 5 = 2\pi - 11$.

(c) Si $a < b \leqslant 0$: $|a| > |b|$, donc $2|a| - 5 > 2|b| - 5$ (multiplier par $2 > 0$ puis retirer 5 garde l'ordre).
Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$. De même, f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Tableau : x : $-\infty$, 0, $+\infty$; $f(x)$: $\searrow -5 \nearrow$. Le minimum de f vaut $f(0) = -5$.

(d) $f(x) = 6 \iff 2|x| = 11 \iff |x| = 5{,}5$: deux solutions, $S = \{-5{,}5\,;5{,}5\}$. $f(x) = -7 \iff 2|x| = -2 \iff |x| = -1$. Or une valeur absolue n'est jamais négative, donc $S = \varnothing$.

Ex. 35 **(suite)**

(e) $f(x) < 1 \iff 2|x| < 6 \iff |x| < 3 \iff -3 < x < 3$, donc $S =]-3\,;3[$. $f(x) \geqslant -1 \iff 2|x| \geqslant 4 \iff |x| \geqslant 2 \iff x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$, donc
$S =]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$.

6. *Approfondissement : fonctions racine carrée et cube*

Ex. 36 ★☆☆ **Racines carrées sans calculatrice**

(a) $\sqrt{121} = 11$ car $11^2 = 121$ et $11 \geqslant 0$. Une racine carrée est toujours positive : la réponse n'est pas ± 11.

(b) $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$: par définition, $\sqrt{13}$ est le nombre positif dont le carré est 13.

(c) $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{5}{9}$ car $\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{81}$ et $\frac{5}{9} \geqslant 0$.

(d) $\sqrt{-16}$ n'existe pas, car $-16 < 0$ et la racine carrée n'est définie que sur $[0\,;+\infty[$. Attention, ce n'est pas -4.

(e) $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ et $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$. Ces deux nombres sont différents : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général.

(f) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$: c'est $|-5|$, pas -5.

Ex. 37 ★☆☆ **Cubes et symétrie par rapport à O**

(a) $(-3)^3 = -(3^3) = -27$: on calcule le cube de l'opposé, puis on met le signe moins.

(b) $(-7)^3 = -343$ et $-7^3 = -343$: ils sont égaux. En revanche $(-7)^2 = 49$ alors que $-7^2 = -49$: ils sont différents.

(c) $0{,}3^3 = 0{,}09 \times 0{,}3 = 0{,}027$.

(d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{2^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$.

(e) Pour tout réel x, $(-x)^3 = -x^3$, donc $(-1{,}2)^3 = -1{,}728$.

(f) $(-0{,}5)^3 = -0{,}125 \neq 0{,}125$ (un cube a le signe du nombre de départ).
Donc A n'est pas sur la courbe de la fonction cube.

Ex. 38 ★★☆ **Équations et inéquations avec racine et cube**

(a) $3\sqrt{x} = 12$, donc $\sqrt{x} = 4$, donc $x = 4^2 = 16$. On a bien $16 \geqslant 0$. Conclusion : $S = \{16\}$.

(b) $\sqrt{x} = -4$. Or une racine carrée est toujours positive ou nulle, donc il n'y a aucune solution. Conclusion :
$S = \varnothing$.

(c) La racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $1{,}5 = \sqrt{2{,}25}$, donc $\sqrt{x} < 1{,}5 \iff 0 \leqslant x < 2{,}25$ (il ne faut pas oublier $x \geqslant 0$). Conclusion : $S = [0\,;2{,}25[$.

Ex. 38 **(suite)**

(d) $(-5)^3 = -125$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'équation a une seule solution. Conclusion : $S = \{-5\}$ (et non ± 5).

(e) $2x^3 < 1458$, donc $x^3 < 729 = 9^3$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $x < 9$, sans condition de signe. Conclusion : $S =]-\infty\,;9[$.

Ex. 39 ★★☆ **Corriger, comparer, encadrer**

(a) Elle a tort : $(-6)^3 = -216 \neq 216$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'équation a une seule solution : $S = \{6\}$.

(b) $0 \leqslant 3{,}07 < 3{,}7$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\sqrt{3{,}07} < \sqrt{3{,}7}$.

(c) $-2{,}3 < -2{,}03$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (elle conserve l'ordre, même pour des nombres négatifs), donc $(-2{,}3)^3 < (-2{,}03)^3$.

(d) $3^3 = 27$ et $4^3 = 64$, donc $3^3 < a^3 < 4^3$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $3 < a < 4$.

(e) Faux. Contre-exemple : $x = -1$ donne $(-1)^3 = -1 < 1$, mais on n'a pas $-1 \geqslant 0$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $1 = 1^3$, donc $x^3 < 1 \iff x < 1$, sans condition de signe.

Ex. 40 ★★★ **Démontrer et ranger : racine carrée et puissances**

(a) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs. Si $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$, comme la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a $(\sqrt{a})^2 \geqslant (\sqrt{b})^2$, soit $a \geqslant b$: cela contredit $a < b$. Donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Conclusion : la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geqslant a + b$, car $\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$. Ces deux nombres sont positifs et la racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$, car $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqslant 0$. Conclusion : $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

(c) $x^2 = 0{,}25^2 = 0{,}0625$; $x^3 = 0{,}0625 \times 0{,}25 = 0{,}015625$; $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, car $0{,}5 \geqslant 0$ et $0{,}5^2 = 0{,}25$. Comme $0{,}015625 < 0{,}0625 < 0{,}25 < 0{,}5$, on a $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

Ex. 40 **(suite)**

(d) On multiplie $x < 1$ par $x > 0$: $x^2 < x$. On multiplie $x < 1$ par $x^2 > 0$: $x^3 < x^2$. La racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: de $0 < x < 1$, on tire $0 < \sqrt{x} < 1$. On multiplie $\sqrt{x} < 1$ par $\sqrt{x} > 0$: $(\sqrt{x})^2 < \sqrt{x}$, soit $x < \sqrt{x}$. Conclusion : $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

(e) Ici $x = 1{,}21 > 1$. On multiplie $x > 1$ par $x > 0$: $x^2 > x$. On multiplie $x > 1$ par $x^2 > 0$: $x^3 > x^2$. La racine est strictement croissante, donc $\sqrt{x} > \sqrt{1} = 1$. En multipliant par $\sqrt{x} > 0$, on obtient $x > \sqrt{x}$ (en effet, $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$). Conclusion : $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.

Ex. 41 ★★★ **Les boîtes cubiques de Noé**

(a) $1{,}3^2 = 1{,}69$ et $1{,}3^3 = 1{,}69 \times 1{,}3 = 2{,}197$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'équation $c^3 = 2{,}197$ a une seule solution : $c = 1{,}3$. La boîte a un côté de 1,3 dm.

(b) $2^3 = 8$ et $3^3 = 27$, donc $2^3 < c^3 < 3^3$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $2 < c < 3$.

(c) $2{,}7^3 = 7{,}29 \times 2{,}7 = 19{,}683$ et $2{,}8^3 = 7{,}84 \times 2{,}8 = 21{,}952$. On a $2{,}7^3 < 20 < 2{,}8^3$, et la fonction cube est strictement croissante, donc $2{,}7 < c < 2{,}8$.

(d) $x^3 < 8 \iff x^3 < 2^3 \iff x < 2$, car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (il n'y a aucune condition de signe). $S =]-\infty\,;2[$. Comme un côté est positif, une boîte de moins de 8 L a un côté $c \in]0\,;2[$, en dm.

(e) Le côté c' vérifie $c'^3 = 160 = 8 \times 20 = 8c^3 = (2c)^3$. La fonction cube est strictement croissante, donc $c' = 2c$. De $2{,}7 < c < 2{,}8$, on déduit $5{,}4 < c' < 5{,}6$. Le côté est compris entre 5,4 dm et 5,6 dm.

Ex. 42 ★★★ **Vrai ou faux : racine carrée et cube**

(a) Faux. $\sqrt{x}$ n'existe que pour $x \geqslant 0$: par exemple, $\sqrt{-1}$ n'existe pas, donc -1 n'est pas solution. Pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0 > -2$, donc tout réel positif est solution. Conclusion : $S = [0\,;+\infty[$.

(b) Vrai. $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs et $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $(\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b})^2$, soit $a < b$. Conclusion : l'affirmation est vraie.

Ex. 42 **(suite)**

(c) Faux. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $(-1{,}5)^3 \leqslant x^3 \leqslant 4^3$, soit $-3{,}375 \leqslant x^3 \leqslant 64$: cette partie est vraie. Mais $x = 0$ convient et $0^2 = 0 < 2{,}25$. On coupe en 0 : sur $[-1{,}5\,;0]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2{,}25$ et sur $[0\,;4]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 16$. Conclusion : $0 \leqslant x^2 \leqslant 16$.

(d) Faux. Pour $a = 2{,}5$ et $b = -2{,}5$: $a^2 = 6{,}25 = b^2$, mais $a \neq b$. En revanche, la seconde partie est vraie : la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc si $a < b$, alors $a^3 < b^3$ (de même si $a > b$) ; ainsi $a^3 = b^3$ impose $a = b$.

(e) Vrai. L'équation n'a de sens que pour $x \geqslant 0$. Pour $x \geqslant 0$, $\sqrt{x}$ et x sont positifs, et la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\sqrt{x} = x \iff x = x^2 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$. Les deux sont positifs, et $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$. Conclusion : $S = \{0\,;1\}$.

7. *Comparer x, x^2, x^3, $\sqrt{x}$ et $1/x$*

Ex. 43 ★☆☆ **Le carré agrandit-il toujours ?**

(a) $0 < 0{,}4 < 1$: entre 0 et 1, le carré rend plus petit. Donc $0{,}4^2 < 0{,}4$ (en effet $0{,}4^2 = 0{,}16$).

(b) $1{,}7 > 1$, donc $1{,}7^2 > 1{,}7$ (en effet $1{,}7^2 = 2{,}89$).

(c) $(-2{,}5)^2 > 0$ (c'est le carré d'un réel non nul) et $-2{,}5 < 0$, donc $(-2{,}5)^2 > -2{,}5$ (en effet $(-2{,}5)^2 = 6{,}25$).

(d) $0 < 0{,}75 < 1$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{0{,}75} > \frac{1}{1} = 1 > 0{,}75$. Ainsi $\frac{1}{0{,}75} > 0{,}75$ (en effet $\frac{1}{0{,}75} = \frac{4}{3}$).

(e) $1{,}6 > 1$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{1{,}6} < \frac{1}{1} = 1 < 1{,}6$. Ainsi $\frac{1}{1{,}6} < 1{,}6$ (en effet $\frac{1}{1{,}6} = \frac{5}{8}$).

(f) $0 < \frac{2}{3} < 1$, donc $\left(\frac{2}{3}\right)^3 < \left(\frac{2}{3}\right)^2$ (en effet $\frac{8}{27} < \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$).

Ex. 44 ★☆☆ **Un tableau pour voir l'ordre changer**

(a) Ligne x^2 : $\frac{1}{16}$; 1 ; 81. Ligne x^3 : $\frac{1}{64}$; 1 ; 729.

(b) Ligne $\sqrt{x}$: $\frac{1}{2}$; 1 ; 3. Ligne $\frac{1}{x}$: 4 ; 1 ; $\frac{1}{9}$.

(c) $\frac{1}{64} < \frac{1}{16} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 4$, c'est-à-dire $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$, car $0 < x < 1$.

Ex. 44 **(suite)**

(d) $\frac{1}{9} < 3 < 9 < 81 < 729$, c'est-à-dire $\frac{1}{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$. Comme $x > 1$, l'ordre de x^3, x^2, x, $\sqrt{x}$ s'inverse et $\frac{1}{x}$ devient plus petit que 1.

(e) Pour $x = 1$, les cinq nombres sont égaux à 1 : c'est un cas d'égalité.

Ex. 45 ★★☆ **Parabole ou droite : qui est au-dessus ?**

(a) Pour tout réel x, $x^2 - x = x(x-1)$.

(b) Si $0 < x < 1$: $x > 0$ et $x - 1 < 0$, donc $x(x-1) < 0$. Si $x > 1$: $x > 0$ et $x - 1 > 0$, donc $x(x-1) > 0$.

(c) Sur $]0\,;1[$, $x^2 - x < 0$, donc $x^2 < x$: $\mathcal{P}$ est au-dessous de d. Sur $]1\,;+\infty[$, $x^2 > x$: $\mathcal{P}$ est au-dessus de d.

(d) $x^2 = x \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$. Les points d'intersection sont $O(0\,;0)$ et $A(1\,;1)$.

(e) $1{,}1^2 = 1{,}21$, donc $B \in \mathcal{P}$. Comme $1{,}1 > 1$, on a $1{,}1^2 > 1{,}1$ d'après la question 3 : B est au-dessus de d.

Ex. 46 ★★☆ **Un nombre ou son inverse ?**

(a) $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

(b) Pour $x > 0$, on a $x + 1 > 0$ et $x > 0$, donc $x - \frac{1}{x}$ a le signe de $x - 1$. Si $0 < x < 1$, il est négatif et $x < \frac{1}{x}$; si $x = 1$, il est nul et $x = \frac{1}{x}$; si $x > 1$, il est positif et $x > \frac{1}{x}$.

(c) Pour $x > 0$, $\frac{1}{x} \leqslant x$ équivaut à $x - \frac{1}{x} \geqslant 0$. D'après la question 2, c'est le cas si et seulement si $x \geqslant 1$. Donc $S = [1\,;+\infty[$.

(d) $0 < 0{,}7 < 1$, donc $0{,}7^2 < 0{,}7$ et $\frac{1}{0{,}7} > 1$. D'où $0{,}7^2 < 0{,}7 < \frac{1}{0{,}7}$.

(e) $1{,}3 > 1$, donc $1{,}3^2 > 1{,}3$; et, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{1{,}3} < \frac{1}{1} = 1$. D'où $\frac{1}{1{,}3} < 1{,}3 < 1{,}3^2$: l'ordre s'est inversé par rapport à la question 4.

Ex. 47 ★★★ **Démontrer le rangement des cinq nombres**

(a) $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x^2 = 0$ ou $x - 1 = 0$, soit $x = 0$ ou $x = 1$.
Donc $x^3 = x^2$ uniquement pour $x = 0$ et $x = 1$.

(b) $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ avec $x^2 > 0$ et $x - 1 < 0$, donc $x^3 - x^2 < 0$: $x^3 < x^2$. De même, $x^2 - x = x(x-1)$ avec $x > 0$ et $x - 1 < 0$, donc $x^2 < x$. Conclusion : $x^3 < x^2 < x$.

Ex. 47 **(suite)**

(c) La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $0<x<1$, donc $\sqrt{0}<\sqrt{x}<\sqrt{1}$, soit $0<t<1$. Or $x-\sqrt{x}=t^2-t=t(t-1)$ avec $t>0$ et $t-1<0$, donc $x-\sqrt{x}<0$. Conclusion : $x<\sqrt{x}$.

(d) $0<0{,}6<1$, donc d'après les questions 2 et 3 : $0{,}6^3<0{,}6^2<0{,}6<\sqrt{0{,}6}$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\sqrt{0{,}6}<\sqrt{1}=1$; la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{0{,}6}>\frac{1}{1}=1$. Conclusion : $0{,}6^3<0{,}6^2<0{,}6<\sqrt{0{,}6}<\frac{1}{0{,}6}$
(soit $0{,}216<0{,}36<0{,}6<\sqrt{0{,}6}<\frac{5}{3}$).

(e) Pour $x>1$, les facteurs x^2, x, t et $x-1$, $t-1$ sont tous strictement positifs (car $t=\sqrt{x}>\sqrt{1}=1$), donc les trois différences sont positives : $x^3>x^2>x>\sqrt{x}$. De plus $\sqrt{2{,}4}>1$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{2{,}4}<1$. Conclusion : $\frac{1}{2{,}4}<\sqrt{2{,}4}<2{,}4<2{,}4^2<2{,}4^3$
(soit $\frac{5}{12}<\sqrt{2{,}4}<2{,}4<5{,}76<13{,}824$).

Ex. 48 ★★★ **Vrai ou faux : gare aux négatifs**

(a) Faux. Contre-exemple : pour $x=0{,}1$, $x^2=0{,}01$ et $0{,}01<0{,}1$. Entre 0 et 1, le carré rend plus petit.

(b) Vrai. Si $x<0$, alors $x^2>0$ (le carré d'un réel non nul est strictement positif), donc $x^2>0>x$.

(c) Vrai. $x^2<x$ équivaut à $x(x-1)<0$. Comme $x>0$, on a $x-1<0$, donc $0<x<1$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{x}>\frac{1}{1}=1$.

(d) Faux. Contre-exemple : pour $x=-0{,}5$, $\frac{1}{x}=-2$ et $-0{,}5>-2$, donc $x>\frac{1}{x}$, mais $x<1$. Pour un réel négatif, la comparaison à 1 ne suffit pas.

Ex. 49 ★★★ **Trois courbes et un encadrement**

(a) La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $0\leqslant 0{,}8\leqslant x\leqslant 0{,}9$, donc $0{,}8^2\leqslant x^2\leqslant 0{,}9^2$, soit $0{,}64\leqslant x^2\leqslant 0{,}81$.

(b) La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et $0<0{,}8\leqslant x\leqslant 0{,}9$, donc l'ordre s'inverse : $\frac{1}{0{,}9}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{0{,}8}$, soit $\frac{10}{9}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{5}{4}$.

(c) Non. Les encadrements $[0{,}64\,;0{,}81]$ et $[0{,}8\,;0{,}9]$ se chevauchent bien, mais on peut conclure autrement : $x^2-x=x(x-1)$ avec $x>0$ et $x-1<0$ (car $x\leqslant 0{,}9<1$), donc $x^2-x<0$. Conclusion : $x^2<x$.

(d) D'après la question 3, $x^2<x$. De plus $x<1$ et, d'après la question 2, $\frac{1}{x}\geqslant\frac{10}{9}>1$, donc $x<\frac{1}{x}$. Ainsi $x^2<x<\frac{1}{x}$: de bas en haut, on trouve M, puis N, puis P.

Ex. 49 **(suite)**

(e) Pour $x>1$: $x^2-x=x(x-1)>0$ car $x>0$ et $x-1>0$, donc $x^2>x$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{x}<\frac{1}{1}=1<x$. Ainsi $\frac{1}{x}<x<x^2$: de bas en haut, on trouve P, puis N, puis M. L'ordre s'est inversé.