Corrigé – Fonctions carré, inverse et valeur absolue

Mathématiques – Seconde

Carré, inverse et valeur absolue · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Images et antécédents ★

$f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = |x|$. Calcule les images, puis donne les antécédents demandés.

a) Le carré d'un nombre, c'est ce nombre multiplié par lui-même.
$f(0{,}3) = (0{,}3)^2 = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$

b) Le carré d'un nombre négatif est positif.
$f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 = \left(-\dfrac{2}{3}\right) \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$

c) On prend l'inverse : 1 divisé par le nombre.
$g(-4) = \dfrac{1}{-4} = -\dfrac{1}{4}$

d) On prend l'inverse : 1 divisé par le nombre.
$g(0{,}2) = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$

e) $|x|$ est la distance de x à 0 : on enlève le signe $-$.
$h(-2{,}5) = |-2{,}5| = 2{,}5$

f) On résout $x^2 = 16$.
$16 > 0$: deux solutions, $\sqrt{16} = 4$ et -4.
Les antécédents de 16 sont -4 et 4.

g) On résout $x^2 = -9$.
Un carré est toujours positif ou nul : il ne vaut jamais -9.
-9 n'a aucun antécédent.

h) On résout $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{3}$: x est l'inverse de $-\dfrac{1}{3}$, soit $x = -3$.
Vérification : $\dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$.

Exercice 2 – Comparer sans calculer ★

Compare les deux nombres sans les calculer. Justifie avec le sens de variation de la fonction carré ou de la fonction inverse.

a) On range les deux nombres : $0 \leqslant 2{,}7 < 2{,}71$, ils sont positifs.
La fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.
Donc $(2{,}7)^2 < (2{,}71)^2$.

b) On range les deux nombres : $-4{,}5 < -4{,}05 \leqslant 0$, ils sont négatifs.
La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$: elle inverse l'ordre.
Donc $(-4{,}5)^2 > (-4{,}05)^2$.

c) Les deux nombres sont de signes contraires : pas de sens de variation commun.
Un nombre et son opposé ont le même carré : $(-1{,}2)^2 = (1{,}2)^2$.
On compare donc deux nombres positifs : $0 \leqslant 0{,}9 < 1{,}2$.
La fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.
Donc $(-1{,}2)^2 > (0{,}9)^2$.

d) On met au même dénominateur pour ranger : $\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{12} < \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.
On range les deux nombres : $0 \leqslant \dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$, ils sont positifs.
La fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.
Donc $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 < \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

e) On range les deux nombres : $0 < 3{,}01 < 3{,}1$, ils sont positifs.
La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$: elle inverse l'ordre.
Donc $\dfrac{1}{3{,}01} > \dfrac{1}{3{,}1}$.

f) On range les deux nombres : $-0{,}5 < -0{,}05 < 0$, ils sont négatifs.
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$: elle inverse l'ordre.
Donc $\dfrac{1}{-0{,}5} > \dfrac{1}{-0{,}05}$.

g) Les deux nombres sont de signes contraires : le sens de variation ne sert pas ici.
L'inverse d'un négatif est négatif, celui d'un positif est positif : $\dfrac{1}{-2} < 0 < \dfrac{1}{0{,}1}$.
Donc $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{0{,}1}$.

h) On range les deux nombres : $-0{,}25 < -0{,}2 < 0$, ils sont négatifs.
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$: elle inverse l'ordre.
Donc $\dfrac{1}{-0{,}25} > \dfrac{1}{-0{,}2}$.

Exercice 3 – Équations ★

Résous dans $\mathbb{R}$ (dans $\mathbb{R}^*$ pour $\dfrac{1}{x}$).

a) $x^2 = k$ avec $k = 49 > 0$: deux solutions, $\sqrt{49}$ et $-\sqrt{49}$, c'est-à-dire 7 et -7.
$S = \{-7\,;\,7\}$

b) $7 > 0$: deux solutions, $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.
7 n'est pas un carré parfait : on garde la racine.
$S = \left\{-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}\right\}$

c) Un carré est toujours positif ou nul : il ne vaut jamais -4.
Aucune solution.
$S = \varnothing$

d) $0{,}25 > 0$ et $0{,}25 = 0{,}5^2$: deux solutions, 0,5 et $-0{,}5$.
$S = \{-0{,}5\,;\,0{,}5\}$

e) x est le nombre dont l'inverse est 5 : $x = \dfrac{1}{5}$.
Vérification : l'inverse de $\dfrac{1}{5}$ est bien 5.
$S = \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

f) x est l'inverse de $-\dfrac{2}{3}$: on retourne la fraction, $x = -\dfrac{3}{2}$.
Vérification : l'inverse de $-\dfrac{3}{2}$ est $-\dfrac{2}{3}$.
$S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

g) Un quotient est nul seulement si son numérateur est nul.
Ici le numérateur est 1 : $\dfrac{1}{x}$ n'est jamais nul.
$S = \varnothing$

h) $|x|$ est la distance de x à 0.
Les nombres à distance 4 de 0 sont -4 et 4.
$S = \{-4\,;\,4\}$

Exercice 4 – Tableaux de variations ★★

$f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $h(x) = |x|$. Dresse le tableau de variations sur l'intervalle donné, puis donne le minimum et le maximum.

a) L'intervalle contient 0 : on coupe en 0.
La fonction carré est décroissante sur $[-3\,;\,0]$, puis croissante sur $[0\,;\,2]$.
On calcule les images à écrire dans le tableau : $f(-3) = 9$; $f(0) = 0$; $f(2) = 4$.

x	-3		0		2
f	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Le minimum est la plus petite valeur du tableau : 0, atteint en 0.
Le maximum est la plus grande : 9, atteint en -3.

b) Sur $[-4\,;\,-1]$, les nombres sont négatifs : la fonction carré y est décroissante.
On calcule les images à écrire dans le tableau : $f(-4) = 16$; $f(-1) = 1$.

x	-4		-1
f	16	$\searrow$	1

Le minimum est la plus petite valeur du tableau : 1, atteint en -1.
Le maximum est la plus grande : 16, atteint en -4.

c) Sur $[0{,}5\,;\,4]$, les nombres sont positifs : la fonction inverse y est décroissante.

On calcule les images à écrire dans le tableau : $g(\frac{1}{2}) = 2$; $g(4) = 0{,}25$.

x	$\frac{1}{2}$		4
g	2	$\searrow$	$0{,}25$

Le minimum est la plus petite valeur du tableau : $0{,}25$, atteint en 4.

Le maximum est la plus grande : 2, atteint en $\frac{1}{2}$.

d) Sur $[-2\,;\,-0{,}25]$, les nombres sont négatifs : la fonction inverse y est décroissante.

On calcule les images à écrire dans le tableau : $g(-2) = -0{,}5$; $g(-\frac{1}{4}) = -4$.

x	-2		$-\frac{1}{4}$
g	$-0{,}5$	$\searrow$	-4

Le minimum est la plus petite valeur du tableau : -4, atteint en $-\frac{1}{4}$.

Le maximum est la plus grande : $-0{,}5$, atteint en -2.

e) L'intervalle contient 0 : on coupe en 0.

La fonction valeur absolue est décroissante sur $[-3\,;\,0]$, puis croissante sur $[0\,;\,5]$.

On calcule les images à écrire dans le tableau : $h(-3) = 3$; $h(0) = 0$; $h(5) = 5$.

x	-3		0		5
h	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

Le minimum est la plus petite valeur du tableau : 0, atteint en 0.

Le maximum est la plus grande : 5, atteint en 5.

Exercice 5 – Encadrer ★★

Encadre l'expression demandée en citant le sens de variation utilisé.

a) Les bornes sont positives : $0 \leqslant 2 \leqslant x \leqslant 5$.

La fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.

$2^2 \leqslant x^2 \leqslant 5^2$, soit $4 \leqslant x^2 \leqslant 25$.

b) Les bornes sont négatives.

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$: l'ordre s'inverse, la borne -1 passe à gauche.

$(-1)^2 \leqslant x^2 \leqslant (-3)^2$, soit $1 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

c) *L'intervalle contient* 0 *: on coupe.* Si $-2 \leqslant x \leqslant 0$: la fonction carré est décroissante, $0^2 \leqslant x^2 \leqslant (-2)^2$, soit $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$.

Si $0 \leqslant x \leqslant 3$: elle est croissante, $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

On réunit : le plus petit est 0, le plus grand 9.

Donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

d) Les bornes sont positives.

La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$: l'ordre s'inverse, la borne 8 passe à gauche.

$\dfrac{1}{8} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

e) Les bornes sont négatives.

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$: l'ordre s'inverse.

$\dfrac{1}{-0{,}5} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{-5}$, soit $-2 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant -0{,}2$.

f) L'intervalle contient 0 : on coupe en 0.

Si $-4 \leqslant x \leqslant 0$: $|x| = -x$, et $0 \leqslant -x \leqslant 4$ (on multiplie par -1, l'ordre s'inverse), donc $0 \leqslant |x| \leqslant 4$.

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$: $0 \leqslant |x| \leqslant 1$.

Donc $0 \leqslant |x| \leqslant 4$.

Exercice 6 – Inéquations avec x^2 ★★

Résous en t'aidant de la courbe de la fonction carré. Donne les valeurs exactes.

a) La droite $y = 4$ coupe la courbe en $x = -2$ et $x = 2$, car $(-2)^2 = 2^2 = 4$.

La courbe est sous la droite entre ces deux abscisses.

Strict : bornes exclues.

$S =]-2\,;\,2[$

b) Mêmes points d'intersection, $x = -2$ et $x = 2$.

La courbe est sur ou au-dessus de la droite $y = 4$ à gauche de -2 et à droite de 2.

« Ou égal » : bornes comprises.

$S =]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;\,+\infty[$

c) On résout d'abord $x^2 = 7$: $x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.

La courbe est sous la droite $y = 7$ entre ces deux valeurs ; « ou égal » : bornes comprises.

$S = [-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}]$

d) Un carré est toujours positif ou nul, donc plus grand que -3 : tous les réels sont solutions.

$S = \mathbb{R}$

e) On résout d'abord $x^2 = 2{,}25$: $x = -1{,}5$ ou $x = 1{,}5$, car $1{,}5^2 = 2{,}25$.

La courbe est au-dessus de la droite $y = 2{,}25$ à l'extérieur de ces deux valeurs.

Strict : bornes exclues.

$S =]-\infty\,;\,-1{,}5[\cup]1{,}5\,;\,+\infty[$

Exercice 7 – Inéquations avec $\dfrac{1}{x}$ et $|x|$ ★★

Résous en t'aidant de la courbe de la fonction inverse (pour $\dfrac{1}{x}$, sépare $x<0$ et $x>0$).

a) On sépare les deux cas.
Si $x<0$: $\dfrac{1}{x}<0<2$, pas de solution.
Si $x>0$: $\dfrac{1}{x}=2$ pour $x=\dfrac{1}{2}$, et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ (l'ordre s'inverse) :
$\dfrac{1}{x}>2 \iff x<\dfrac{1}{2}$.
Avec $x>0$, il reste $0<x<\dfrac{1}{2}$.
$S=]0\,;\,\dfrac{1}{2}[$

b) On sépare les deux cas.
Si $x>0$: $\dfrac{1}{x}>0>-1$, pas de solution.
Si $x<0$: $\dfrac{1}{x}=-1$ pour $x=-1$, et la courbe est sous la droite $y=-1$ entre $x=-1$ et 0.
« Ou égal » : -1 est compris ; 0 est exclu (valeur interdite).
$S=[-1\,;\,0[$

c) On sépare les deux cas.
Si $x<0$: $\dfrac{1}{x}<0<2$, **tous** les négatifs sont solutions.
Si $x>0$: la fonction inverse est décroissante, $\dfrac{1}{x}<2 \iff x>\dfrac{1}{2}$.
On réunit les deux cas.
$S=]-\infty\,;\,0[\cup]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty[$

d) $|x|\leqslant 2{,}5$: la distance de x à 0 est au plus $2{,}5$.
x est entre $-2{,}5$ et $2{,}5$, bornes comprises.
$S=[-2{,}5\,;\,2{,}5]$

e) $|x|>3$: la distance de x à 0 est strictement plus grande que 3.
$x<-3$ ou $x>3$: deux morceaux.
$S=]-\infty\,;\,-3[\cup]3\,;\,+\infty[$

Exercice 8 – Les courbes $y=x$ et $y=x^2$ ★★★

1. On lit les points communs à la droite et à la courbe : $O(0\,;\,0)$ et $A(1\,;\,1)$.
   Contrôle : ces points sont sur les deux courbes, car $0^2=0$ et $1^2=1$.

2. Facteur commun x : $x^2-x=x\times x-x\times 1=x(x-1)$.
   Pour $x\geqslant 0$, le facteur x est positif : x^2-x a le signe de $x-1$.
   $x-1$ est négatif avant 1, positif après.
   Donc x^2-x est nul en 0 et 1, négatif sur $]0\,;\,1[$, positif sur $]1\,;\,+\infty[$.

3. La courbe $y=x^2$ est sous la droite $y=x$ quand $x^2<x$, c'est-à-dire quand $x^2-x<0$.
   Sur $]0\,;\,1[$, $x^2-x<0$: la courbe $y=x^2$ est **sous** la droite.
   Sur $]1\,;\,+\infty[$, elle est **au-dessus**.
   Elles se coupent en O et A.

4. $0{,}7 \in]0\,;\,1[$: $0{,}7^2 < 0{,}7$ (question 3) et, la fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{1}{0{,}7} > \dfrac{1}{1} = 1$.
   Donc $0{,}7^2 < 0{,}7 < \dfrac{1}{0{,}7}$.
   $1{,}3 > 1$: $1{,}3^2 > 1{,}3$ et $\dfrac{1}{1{,}3} < 1$.
   Donc $\dfrac{1}{1{,}3} < 1{,}3 < 1{,}3^2$.

Exercice 9 – Résoudre et encadrer en plusieurs étapes ★★★

Rédige. Pour les inéquations, isole d'abord x^2, $\dfrac{1}{x}$ ou $|x|$.

a) $3x^2 - 12 \geqslant 0$
$\iff 3x^2 \geqslant 12$ (on ajoute 12 aux deux membres)
$\iff x^2 \geqslant 4$ (on divise par $3 > 0$: le sens ne change pas)
$x^2 = 4$ pour $x = -2$ ou $x = 2$; $x^2 \geqslant 4$ à l'extérieur de ces deux valeurs, bornes comprises.
$S =]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;\,+\infty[$

b) Le carré de $x - 1$ vaut $9 > 0$: $x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$.
On ajoute 1 : $x = 4$ ou $x = -2$.
$S = \{-2\,;\,4\}$

c) $2\,|x| - 3 < 5$
$\iff 2\,|x| < 8$ (on ajoute 3 aux deux membres)
$\iff |x| < 4$ (on divise par $2 > 0$)
La distance de x à 0 est strictement inférieure à 4 : x est entre -4 et 4, bornes exclues.
$S =]-4\,;\,4[$

d) $\dfrac{2}{x} + 1 \leqslant 9$
$\iff \dfrac{2}{x} \leqslant 8$ (on retire 1 aux deux membres)
$\iff \dfrac{1}{x} \leqslant 4$ (on divise par $2 > 0$)
On ne multiplie pas par x : son signe est inconnu. On sépare les deux cas.
Si $x < 0$: $\dfrac{1}{x} < 0 \leqslant 4$, tous les négatifs sont solutions.
Si $x > 0$: $\dfrac{1}{x} = 4$ pour $x = \dfrac{1}{4}$, et la fonction inverse est décroissante (l'ordre s'inverse) : $\dfrac{1}{x} \leqslant 4 \iff x \geqslant \dfrac{1}{4}$.
On réunit les deux cas.
$S =]-\infty\,;\,0[\cup [\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty[$

e) L'intervalle contient 0 : on coupe.
Sur $[-1\,;\,0]$: $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$.
Sur $[0\,;\,2]$: $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$.
Donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$ (le maximum vient de $2^2 = 4 > (-1)^2$).
On multiplie par $-2 < 0$: l'ordre s'inverse.
$-8 \leqslant -2x^2 \leqslant 0$
On ajoute 3 à chaque membre :
$-5 \leqslant 3 - 2x^2 \leqslant 3$

f) Si $x \geqslant 0$: $|x| = x$, donc $m(x) = 3x - 6$.
Si $x < 0$: $|x| = -x$, donc $m(x) = 3 \times (-x) - 6 = -3x - 6$.
$-2 < 0$: on prend la deuxième forme.
$m(-2) = -3 \times (-2) - 6 = 6 - 6 = 0$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Sur* $]-\infty\,;\,0]$*, la fonction carré inverse l'ordre.*
-3 et -2 sont négatifs : $-3 < -2$ donne $(-3)^2 > (-2)^2$.
Vérification : $(-3)^2 = 9 > 4 = (-2)^2$.

b) *L'intervalle contient* 0 *:* x^2 *peut valoir* 0*.*
On coupe en 0.
Sur $[-3\,;\,0]$: $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$.
Sur $[0\,;\,1]$: $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$.
Donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

c) *Il manque la solution négative.*
$36 > 0$: deux solutions, $\sqrt{36} = 6$ et -6, car $(-6)^2 = 36$ aussi.
$S = \{-6\,;\,6\}$.

d) $x = -5$ *vérifie* $x < 3$*, mais* $(-5)^2 = 25 > 9$.
$x^2 = 9$ pour $x = -3$ ou $x = 3$.
La parabole est sous la droite $y = 9$ entre ces deux valeurs, bornes exclues.
$S =]-3\,;\,3[$.

e) *Multiplier par* x *est faux si* $x < 0$ *: le sens changerait.*
On sépare les deux cas.
Pour $x < 0$, $\dfrac{1}{x} < 0 < 3$: tous sont solutions.
Pour $x > 0$, on peut multiplier par $x > 0$: $1 < 3x \iff x > \dfrac{1}{3}$.
On réunit : $S =]-\infty\,;\,0[\cup]\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty[$.

f) *Elle est décroissante sur chaque intervalle* $]-\infty\,;\,0[$ *et* $]0\,;\,+\infty[$*, pas sur* $\mathbb{R}^*$*.*
$\dfrac{1}{-2} = -0{,}5 < 0{,}25 = \dfrac{1}{4}$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Si $-4 \leqslant x \leqslant -2$, alors :

Réponse C : $4 \leqslant x^2 \leqslant 16$
Bornes négatives : la fonction carré inverse l'ordre, $(-2)^2 \leqslant x^2 \leqslant (-4)^2$.

2. L'ensemble des solutions de $x^2 \geqslant 9$ est :

Réponse A : $]-\infty\,;\,-3] \cup [3\,;\,+\infty[$
$x^2 = 9$ pour $x = \pm 3$; on garde l'extérieur, bornes comprises.

3. L'équation $|x| = -2$:

Réponse D : n'a aucune solution

Une distance n'est jamais négative.

4. L'ensemble des solutions de $\dfrac{1}{x} \geqslant 2$ est :

Réponse B : $]0\,;\,\dfrac{1}{2}]$

Pour $x < 0$, $\dfrac{1}{x} < 0$: pas de solution. Pour $x > 0$, la fonction inverse est décroissante : $x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

5. Pour $0 < x < 1$:

Réponse D : $x^2 < x < \dfrac{1}{x}$

Entre 0 et 1, le carré rend plus petit et l'inverse est plus grand que 1.

6. Sans calculer :

Réponse A : $(-2{,}5)^2 < (-2{,}6)^2$

$-2{,}6 < -2{,}5 \leqslant 0$ et la fonction carré inverse l'ordre sur $]-\infty\,;\,0]$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).