1. Rappels : proportionnalité, graphique et pourcentages

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : coefficients multiplicateurs**

(a) $1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$.

(b) $1 - \frac{35}{100} = 0{,}65$.

(c) $1 - \frac{7}{100} = 0{,}93$.

(d) $1 + \frac{2{,}5}{100} = 1{,}025$.

(e) $1 - 0{,}72 = 0{,}28$: c'est une baisse de 28 %.

(f) $1{,}3 - 1 = 0{,}3$: c'est une hausse de 30 %.

(g) $80 \times 0{,}05 = 4$ € est seulement le montant de la hausse. Augmenter de 5 %, c'est multiplier par 1,05 : $80 \times 1{,}05 = 84$. Le nouveau prix est 84 €.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : tableau de proportionnalité ?**

(a) $10 \div 4 = 2{,}5$; $15 \div 6 = 2{,}5$; $25 \div 10 = 2{,}5$. Tous égaux : proportionnalité de coefficient 2,5.

(b) $12 \div 3 = 4$; $20 \div 5 = 4$ mais $30 \div 8 = 3{,}75$. Les deux premiers ne suffisent pas : pas de proportionnalité.

(c) $3{,}5 \div 0{,}5 = 7$; $14 \div 2 = 7$; $21 \div 3 = 7$. Proportionnalité de coefficient 7.

(d) $-15 \div 10 = -1{,}5$; $-3 \div 2 = -1{,}5$; $-9 \div 6 = -1{,}5$. Tous égaux : proportionnalité de coefficient $-1{,}5$.

(e) $7 \div 2 = 3{,}5$; $11 \div 4 = 2{,}75$; $15 \div 6 = 2{,}5$. Les quotients sont différents : pas de proportionnalité (les valeurs de y augmentent de 4 en 4, mais il y a une partie fixe).

Ex. 3 ★★☆ **La plante qui pousse**

(a) Le point d'abscisse 0 a pour ordonnée 2 : au départ, la plante mesure 2 cm.

(b) Non. Les points sont alignés, mais pas avec l'origine : à $x = 0$, la hauteur vaut 2 cm (partie fixe). D'ailleurs $3{,}5 \div 1 = 3{,}5$ et $5 \div 2 = 2{,}5$: les quotients sont différents. Pas de proportionnalité.

(c) $3{,}5 - 2 = 1{,}5$: la plante grandit de 1,5 cm par semaine.

Ex. 3 (suite)

(d) Yanis fait comme si la hauteur était proportionnelle au nombre de semaines, ce qui est faux à cause de la hauteur de départ de 2 cm. La plante grandit de 1,5 cm par semaine : $2 + 1{,}5 \times 6 = 11$. Après 6 semaines, elle mesure 11 cm, et non 15 cm.

Ex. 4 ★★☆ **Hausses successives et soldes**

(a) Coefficient : $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$. Prix : $20 \times 1{,}1 = 22$ €.

(b) $22 \times 1{,}1 = 24{,}20$. Après la deuxième hausse, le forfait coûte 24,20 €.

(c) Faux. $1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21$: le prix est multiplié par 1,21, c'est une hausse de 21 % (avec +20 %, on aurait 24 €, pas 24,20 €).

(d) La baisse de 20 % multiplie le prix de départ par 0,8 : $p \times 0{,}8 = 68$. Pour revenir en arrière, on divise : $p = 68 \div 0{,}8 = 85$. Le manteau coûtait 85 € (et $85 \times 0{,}8 = 68$).

Ex. 5 ★★★ **Deux bornes de recharge**

(a) $4 \div 10 = 0{,}4$; $8 \div 20 = 0{,}4$; $14 \div 35 = 0{,}4$; $20 \div 50 = 0{,}4$. Tous les quotients sont égaux : le prix A est proportionnel à l'énergie, de coefficient 0,4 €/kWh.

(b) Non. Un seul quotient ne suffit pas, il faut les calculer tous : $5 \div 10 = 0{,}5$ mais $8 \div 20 = 0{,}4$ (et $17 \div 50 = 0{,}34$). Les quotients ne sont pas égaux, donc le prix B n'est pas proportionnel à l'énergie.

(c) De 10 à 20 kWh, le prix passe de 5 € à 8 € : il augmente de $8 - 5 = 3$ € tous les 10 kWh, soit 0,3 € par kWh. Pour 0 kWh : $5 - 3 = 2$ €. Contrôle : $2 + 0{,}3 \times 35 = 12{,}5$ et $2 + 0{,}3 \times 50 = 17$. Ces 2 € sont des frais fixes : les points sont alignés, mais la droite passe par $(0\,;\,2)$ et pas par l'origine. Ce n'est donc pas une proportionnalité.

(d) Une hausse de 15 % multiplie par $1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$ (et non par 0,15). Nouveau prix du kWh : $0{,}4 \times 1{,}15 = 0{,}46$ €. Une recharge de 40 kWh coûte $0{,}46 \times 40 = 18{,}40$ €.

Ex. 6 ★★★ **Deux vélos-taxis**

(a) Oui : les points sont alignés et le premier point est $(0\,;\,0)$, l'origine. Le prix A est donc proportionnel à la distance.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Le coefficient est l'ordonnée du point d'abscisse 1, et non celle du dernier point. Pour 1 km on lit 1,5 € : le coefficient est 1,5 €/km. Le point $(4\,;\,6)$ donne le prix de 4 km, et $6 \div 4 = 1{,}5$ confirme le résultat.

(c) Non. 2 km coûtent 6 € et 4 km coûtent 8 €, et non $2 \times 6 = 12$ €. Les points sont alignés, mais la droite passe par $(0\,;\,4)$ et pas par l'origine : il y a une partie fixe de 4 € (prise en charge). Le prix B n'est pas proportionnel à la distance.

(d) De 0 à 2 km, le prix B passe de 4 € à 6 €, soit $6 - 4 = 2$ € de plus tous les 2 km. Cela fait 1 € par km. Prix B pour 12 km : $4 + 1 \times 12 = 16$ €. Prix A : $1{,}5 \times 12 = 18$ €. Pour 12 km, la compagnie B est moins chère, de $18 - 16 = 2$ €.

Ex. 7 ★★★ **Soldes au magasin de sport**

(a) Hausse : $450 \times 1{,}1 = 495$ €. Baisse : $495 \times 0{,}9 = 445{,}50$ €. Après les deux évolutions, le vélo coûte 445,50 €.

(b) Faux. Le coefficient global est $1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$: le prix baisse en tout de 1 %. Le vélo perd $450 - 445{,}50 = 4{,}50$ € : la baisse de 10 % s'applique à un prix plus élevé (495 €).

(c) Baisse de 25 % : $\times 0{,}75$; baisse de 20 % : $\times 0{,}8$. Coefficient global : $0{,}75 \times 0{,}8 = 0{,}6$. Or $1 - 0{,}6 = 0{,}4$: c'est une baisse de 40 %, et non de 45 % (les pourcentages ne s'additionnent pas).

(d) Le prix de départ p a été multiplié par 0,6 : $p \times 0{,}6 = 48$, donc $p = 48 \div 0{,}6 = 80$. Contrôle : $80 \times 0{,}75 = 60$, puis $60 \times 0{,}8 = 48$. La raquette coûtait 80 € au départ.

2. *Fonction linéaire : image, antécédent, coefficient, pourcentages*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : image et antécédent**

(a) $f(4) = -2{,}5 \times 4 = -10$.

(b) $f(-1{,}2) = -2{,}5 \times (-1{,}2) = 3$: moins par moins donne plus.

(c) $f(0) = -2{,}5 \times 0 = 0$: pour une fonction linéaire, l'image de 0 est toujours 0.

(d) On résout $-2{,}5x = 15$: $x = 15 \div (-2{,}5) = -6$. Contrôle : $-2{,}5 \times (-6) = 15$. L'antécédent de 15 est -6.

Ex. 8 **(suite)**

(e) On résout $-2{,}5x = -7$: $x = -7 \div (-2{,}5) = 2{,}8$. L'antécédent de -7 est 2,8.

(f) Non. Elle a multiplié : $-2{,}5 \times 20 = -50$, c'est l'image de 20. Pour l'antécédent, on divise : $-2{,}5x = 20$ donne $x = 20 \div (-2{,}5) = -8$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : trouver le coefficient**

(a) $a = g(6) \div 6 = 21 \div 6 = 3{,}5$.

(b) $a = 6 \div (-8) = -0{,}75$.

(c) $a = 2 \div 3 = \frac{2}{3}$.

(d) B est sur la droite, donc $m(2{,}5) = -15$ et $a = -15 \div 2{,}5 = -6$.

(e) Théo a inversé : $a = p(x) \div x$, donc $a = 3 \div 12 = 0{,}25$. Contrôle : $0{,}25 \times 12 = 3$.

(f) Une seule image suffit : $a = 9 \div 5 = 1{,}8$, donc $q(x) = 1{,}8x$ et $q(20) = 1{,}8 \times 20 = 36$.

Ex. 10 ★★☆ **Les soldes au magasin de sport**

(a) Coefficient multiplicateur : $1 - \frac{30}{100} = 0{,}7$. Donc $p(x) = 0{,}7x$: c'est une fonction linéaire de coefficient 0,7.

(b) $p(64) = 0{,}7 \times 64 = 44{,}8$. Le sac soldé coûte 44,80 €.

(c) Non : $31{,}50 \times 1{,}3 = 40{,}95$, mais $0{,}7 \times 40{,}95 \neq 31{,}50$. On cherche l'antécédent : $0{,}7x = 31{,}5$ donne $x = 31{,}5 \div 0{,}7 = 45$. La raquette coûtait 45 €.

(d) L'économie vaut 30 % du prix de départ : $0{,}3x = 19{,}50$, donc $x = 19{,}50 \div 0{,}3 = 65$. Le maillot coûtait 65 € et il coûte soldé $p(65) = 0{,}7 \times 65 = 45{,}50$ €. Contrôle : $65 - 45{,}50 = 19{,}50$.

Ex. 11 ★★☆ **Le filament de l'imprimante 3D**

(a) $40 = 15 + 25$, donc par linéarité $f(40) = f(15) + f(25) = 48 + 80 = 128$. Il faut 128 g pour 40 min.

(b) $75 = 3 \times 25$, donc $f(75) = 3 \times f(25) = 3 \times 80 = 240$. Il faut 240 g pour 75 min.

(c) $f(0) = 0$: f est linéaire, donc $f(0) = a \times 0 = 0$. Sans impression, aucun filament n'est utilisé.

(d) $a = 48 \div 15 = 3{,}2$. Contrôle : $3{,}2 \times 25 = 80$. Donc $f(x) = 3{,}2x$.

(e) On résout $3{,}2x = 200$: $x = 200 \div 3{,}2 = 62{,}5$. La bobine permet 62,5 min d'impression, soit 62 min 30 s.

Ex. 12 ★★★ **La copie de Yanis**

(a) Non : le coefficient est l'image divisée par le nombre de départ, $a = \frac{f(-4)}{-4}$, et pas l'inverse.
$a = 14 \div (-4) = -3{,}5$.
Donc $f(x) = -3{,}5x$.

(b) $f(-2{,}6) = -3{,}5 \times (-2{,}6) = 9{,}1$
(le produit de deux nombres négatifs est positif).

(c) En multipliant, Yanis calcule une image :
$-21 \times (-3{,}5) = 73{,}5$, c'est $f(-21)$. Pour l'antécédent, on résout $-3{,}5x = -21$, donc $x = -21 \div (-3{,}5) = 6$.
Contrôle : $f(6) = -3{,}5 \times 6 = -21$. L'antécédent de -21 est 6.

(d) $f(-1{,}2) = -3{,}5 \times (-1{,}2) = 4{,}2$. Or l'ordonnée de A est $-4{,}2$, et $4{,}2 \neq -4{,}2$. Le point A n'appartient pas à la représentation graphique de f.

Ex. 13 ★★★ **Hausse puis soldes**

(a) Hausse de 15 % : coefficient multiplicateur $1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$, donc $h(x) = 1{,}15x$. Baisse de 15 % : $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$, donc $s(x) = 0{,}85x$. Ce sont deux fonctions linéaires de coefficients 1,15 et 0,85.

(b) Novembre : $h(1\,200) = 1{,}15 \times 1\,200 = 1\,380$ €.
Janvier : $s(1\,380) = 0{,}85 \times 1\,380 = 1\,173$ €. Le vélo coûte 1 173 € en janvier.

(c) Faux. Le prix de janvier s'obtient en multipliant par 1,15 puis par 0,85, soit par $1{,}15 \times 0{,}85 = 0{,}9775$: la fonction est $x \mapsto 0{,}9775x$. Comme $0{,}9775 < 1$, le prix final est plus bas qu'au départ (baisse de 2,25 %) : 1 173 € au lieu de 1 200 €.

(d) On cherche k tel que $1\,173 \times k = 1\,200$, donc $k = 1\,200 \div 1\,173 \approx 1{,}023$. C'est une hausse d'environ 2,3 %, et non de 2,25 % : le pourcentage se calcule sur le prix de janvier, qui est plus petit que 1 200 €.

Ex. 14 ★★★ **La borne de recharge**

(a) Faux. La situation est une situation de proportionnalité, donc c est linéaire : $c(x) = ax$, et une seule image suffit. $a = c(12) \div 12 = 5{,}40 \div 12 = 0{,}45$.
Le kWh coûte 0,45 € et $c(x) = 0{,}45x$.

(b) $4 = 12 \div 3$, donc $c(4) = 5{,}40 \div 3 = 1{,}80$; $16 = 12 + 4$, donc $c(16) = c(12) + c(4) = 5{,}40 + 1{,}80 = 7{,}20$;
$48 = 4 \times 12$, donc $c(48) = 4 \times c(12) = 4 \times 5{,}40 = 21{,}60$.

(c) On résout $0{,}45x = 31{,}50$, donc $x = 31{,}50 \div 0{,}45 = 70$.
Contrôle : $0{,}45 \times 70 = 31{,}50$. Maëlle a chargé 70 kWh.

Ex. 14 **(suite)**

(d) De 20 % à 80 %, il charge 60 % de la batterie : $0{,}6 \times 60 = 36$ kWh. $c(36) = 0{,}45 \times 36 = 16{,}20$. Hugo paie 16,20 €.

3. *Fonction affine : image, antécédent, reconnaître une fonction affine*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : lire a et b**

(a) $f(x) = -3x + 4$, donc $a = -3$ et $b = 4$
(le coefficient directeur n'est pas écrit en premier).

(b) $g(x) = 0 \times x - 6$, donc $a = 0$ et $b = -6$: g est une fonction constante.

(c) $h(x) = 0{,}5x + 0$, donc $a = 0{,}5$ et $b = 0$: h est linéaire.

(d) $a = \frac{2}{3}$ et $b = -1$.

(e) $m(x) = 1 \times x - 1{,}5$, donc $a = 1$ et $b = -1{,}5$.

(f) $p(x) = -1 \times x + 0$, donc $a = -1$ et $b = 0$: p est linéaire.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : image ou antécédent ?**

(a) $f(-4) = 2{,}5 \times (-4) - 6 = -10 - 6 = -16$. L'image de -4 est -16.

(b) $f(0) = 2{,}5 \times 0 - 6 = -6$: on retrouve l'ordonnée à l'origine $b = -6$.

(c) $f\left(\frac{2}{5}\right) = 2{,}5 \times 0{,}4 - 6 = 1 - 6 = -5$.

(d) $2{,}5x - 6 = 14$, donc $2{,}5x = 20$ et $x = \frac{20}{2{,}5} = 8$.
Contrôle : $2{,}5 \times 8 - 6 = 14$ ✓

(e) $2{,}5x - 6 = -11$, donc $2{,}5x = -5$ et $x = -2$. Contrôle : $2{,}5 \times (-2) - 6 = -11$ ✓

(f) Non : -6 est l'image de 0, pas son antécédent. On résout $2{,}5x - 6 = 0$: $2{,}5x = 6$ et $x = 2{,}4$. L'antécédent de 0 est 2,4.

Ex. 17 ★★☆ **Développer avant de conclure**

(a) $f(x) = 6 - 3x + 3x = 6$: $a = 0$ et $b = 6$. f est constante, donc affine, mais pas linéaire car $b \neq 0$.

(b) $g(x) = 3x - x^2 + x^2 = 3x$: $a = 3$ et $b = 0$. g est linéaire, donc affine, même si x^2 apparaît au départ.

(c) $h(x) = x^2 - x + 1$: x reste au carré après réduction, donc h n'est ni affine ni linéaire.

(d) x est au dénominateur : k ne peut pas s'écrire $ax + b$, elle n'est ni affine ni linéaire.

Ex. 17 **(suite)**

(e) $m(x) = \frac{x}{4} - \frac{8}{4} = 0{,}25x - 2$: $a = 0{,}25$ et $b = -2$. m est affine, pas linéaire.

Ex. 18 ★★☆ **Recharge à la borne**

(a) $C(x) = 0{,}45x + 1{,}5$: $a = 0{,}45$ (prix par kWh) et $b = 1{,}5$ (frais fixes).

(b) $C(20) = 0{,}45 \times 20 + 1{,}5 = 9 + 1{,}5 = 10{,}5$ et $C(40) = 0{,}45 \times 40 + 1{,}5 = 18 + 1{,}5 = 19{,}5$. Les recharges coûtent 10,50 € et 19,50 €.

(c) Faux : 40 kWh coûtent 19,50 €, pas $2 \times 10{,}50 = 21$ €. Comme $b = 1{,}5 \neq 0$, le prix n'est pas proportionnel à l'énergie.

(d) $0{,}45x + 1{,}5 = 28{,}5$, donc $0{,}45x = 27$ et $x = \frac{27}{0{,}45} = 60$. Contrôle : $0{,}45 \times 60 + 1{,}5 = 28{,}5$ ✓ Rayan a rechargé 60 kWh.

(e) $C(32) = 0{,}45 \times 32 + 1{,}5 = 14{,}4 + 1{,}5 = 15{,}9$. La recharge coûte 15,90 €, soit plus que 15 € : non, cela ne suffit pas, il manque 0,90 €.

Ex. 19 ★★★ **Vrai ou faux sur les fonctions affines**

(a) Faux. $f(x) = 6 - 1{,}5x = -1{,}5x + 6$, donc $a = -1{,}5$ (le 6 est l'ordonnée à l'origine b). $g(x) = 1{,}5 \times 4 - 1{,}5x = 6 - 1{,}5x$, donc $a = -1{,}5$ aussi. f et g ont le même coefficient directeur : ce sont deux écritures de la même fonction.

(b) Faux. $f(-2) = 6 - 1{,}5 \times (-2) = 6 + 3 = 9$: 9 est l'image de -2, pas son antécédent. Antécédent de -2 : $6 - 1{,}5x = -2$, donc $-1{,}5x = -8$, donc $x = \frac{-8}{-1{,}5} = \frac{16}{3}$. Contrôle : $6 - 1{,}5 \times \frac{16}{3} = 6 - 8 = -2$ ✓. L'antécédent de -2 par f est $\frac{16}{3}$.

(c) Faux. Je développe : $h(x) = 2x^2 - x - 2x^2 = -x$. Donc $h(x) = -x$: h est linéaire de coefficient -1, et toute fonction linéaire est affine ($a = -1$, $b = 0$).

(d) Faux. Je développe : $w(x) = x^2 + 4x - 4x - 3 = x^2 - 3$. Après réduction, x reste au carré : w n'est ni affine ni linéaire.

(e) Vrai. $k(x) = 0 \times x + (-2{,}5)$: k est affine avec $a = 0$ et $b = -2{,}5$ (fonction constante). Mais $k(0) = -2{,}5 \neq 0$, donc k n'est pas linéaire. Une fonction affine n'est pas toujours linéaire.

Ex. 20 ★★★ **La copie de Maëlys**

(a) $f(5) = \frac{2}{3} \times 5 - 4 = \frac{10}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{2}{3}$. Comme $f(5) \neq 6$, 5 n'est pas l'antécédent de 6. Maëlys a divisé par $\frac{2}{3}$ avant de s'occuper du -4, puis elle a encore retiré 4. Il faut d'abord ajouter 4 aux deux membres, puis diviser par $\frac{2}{3}$.

(b) $\frac{2}{3}x - 4 = 6$, donc $\frac{2}{3}x = 10$, donc $x = 10 \times \frac{3}{2} = 15$. Contrôle : $\frac{2}{3} \times 15 - 4 = 10 - 4 = 6$ ✓. L'antécédent de 6 est 15 : « 6 est l'image de 15 par f ».

(c) $f(-6) = \frac{2}{3} \times (-6) - 4 = -4 - 4 = -8$. L'image de -6 par f est -8.

(d) Pour faire disparaître -4, on ajoute 4 aux deux membres : $\frac{2}{3}x - 4 = -10$, donc $\frac{2}{3}x = -10 + 4 = -6$, donc $x = -6 \times \frac{3}{2} = -9$. Contrôle : $\frac{2}{3} \times (-9) - 4 = -6 - 4 = -10$ ✓. L'antécédent de -10 par f est -9.

Ex. 21 ★★★ **Deux bougies**

(a) La bougie part de 24 cm et perd 1,6 cm à chaque heure : $h(x) = 24 - 1{,}6x$.
Donc $a = -1{,}6$ (devant x, avec son signe) et $b = 24$.
$h(0) = 24$: c'est la hauteur de la bougie neuve, avant qu'on l'allume.

(b) 2 h 30 min = 2,5 h. $h(2{,}5) = 24 - 1{,}6 \times 2{,}5 = 24 - 4 = 20$. Après 2 h 30 min, la bougie A mesure 20 cm.

(c) On cherche l'antécédent de 10 : $24 - 1{,}6x = 10$, donc $-1{,}6x = -14$, donc $x = 8{,}75$. Contrôle : $24 - 1{,}6 \times 8{,}75 = 24 - 14 = 10$ ✓. 0,75 h = 45 min : la bougie A mesure 10 cm au bout de 8 h 45 min.

(d) $g(x) = 18 - x$. On résout $24 - 1{,}6x = 18 - x$, donc $24 - 18 = 1{,}6x - x$, donc $6 = 0{,}6x$, donc $x = 10$. Contrôle : $h(10) = 24 - 16 = 8$ et $g(10) = 18 - 10 = 8$ ✓. Au bout de 10 h, les deux bougies mesurent 8 cm.

(e) A s'éteint quand $h(x) = 0$: $24 - 1{,}6x = 0$, donc $x = 24 \div 1{,}6 = 15$. B s'éteint quand $g(x) = 0$: $18 - x = 0$, donc $x = 18$. La bougie A s'éteint en premier, au bout de 15 h
(B tient jusqu'à 18 h).

4. *Représentation graphique : points d'une droite, lire a et b*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : lire une droite sans la tracer**

(a) $f(x) = -3x + 4$, donc $b = 4$. La droite coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,4)$, et pas en $(4\,;\,0)$.

Ex. 22 **(suite)**

(b) g est linéaire : $g(0) = \frac{2}{3} \times 0 = 0$. La droite passe donc par l'origine $(0\,;\,0)$.

(c) $h(x) = 0 \times x - 5$: $a = 0$, la fonction est constante. La droite est horizontale.

(d) Le coefficient directeur est $a = 0{,}7 > 0$: la fonction est croissante, la droite monte.

(e) -4 est plus loin de 0 que 3 ($4 > 3$) : la droite de p est la plus raide. Les deux droites ont la même ordonnée à l'origine : elles se coupent en $(0\,;\,1)$.

(f) $r(x) = -2x + 6$, donc $b = 6$: la droite coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,6)$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : points d'une droite**

(a) $f(3) = 7 - 2 \times 3 = 1$: c'est l'ordonnée de A, donc A est sur d.

(b) $f(1) = 7 - 2 \times 1 = 5 \neq 3$: B n'est pas sur d. Attention à l'ordre $(x\,;\,y)$: c'est $A(3\,;\,1)$ qui est sur d.

(c) $f(-2) = 7 - 2 \times (-2) = 7 + 4 = 11$.
Donc $C(-2\,;\,11)$.

(d) On cherche l'antécédent de 0 : $7 - 2x = 0$, donc $2x = 7$ et $x = 3{,}5$.
Donc $D(3{,}5\,;\,0)$: c'est le point où d coupe l'axe des abscisses.

(e) Non. $f(7) = 7 - 2 \times 7 = -7 \neq 0$: E n'est pas sur d. Le 7 est l'ordonnée à l'origine : la droite passe par $(0\,;\,7)$, pas par $(7\,;\,0)$.

(f) On résout $7 - 2x = 10$: $-2x = 3$, donc $x = \frac{3}{-2} = -1{,}5$.
Donc $F(-1{,}5\,;\,10)$.

Ex. 24 ★★☆ **Lire a et b sur un quadrillage de 2 en 2**

(a) Le point d'abscisse 0 est à 3 carreaux au-dessus de l'axe, et un carreau vaut 2 : $f(0) = 6$, donc $b = 6$.

(b) De $x = 0$ à $x = 1$, l'ordonnée passe de 6 à 2 : elle descend de 2 carreaux, soit de 4.
Donc $a = -4$, et non -2.

(c) $f(x) = -4x + 6$, que l'on peut écrire $f(x) = 6 - 4x$.
Contrôle : $f(4) = 6 - 4 \times 4 = -10$, c'est bien l'ordonnée du dernier point.

(d) On cherche l'antécédent de 0 : $6 - 4x = 0$, donc $4x = 6$ et $x = \frac{6}{4} = 1{,}5$. La droite coupe l'axe des abscisses en $(1{,}5\,;\,0)$.

(e) Faux : c'est le signe de a qui compte. Ici $a = -4 < 0$, donc f est décroissante et la droite descend.

Ex. 25 ★★☆ **D'après deux points : a, b, droites parallèles ou non**

(a) A est sur l'axe des ordonnées (abscisse 0) : $f(0) = -2$, donc $b = -2$.

(b) x augmente de 4 et $f(x)$ passe de -2 à 1 : elle augmente de 3.
Donc $a = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

(c) $f(x) = 0{,}75x - 2$. $f(8) = 0{,}75 \times 8 - 2 = 4$: $C(8\,;\,4)$.
Contrôle : de B à C, x augmente de 4 et y de 3, comme de A à B.

(d) f et g ont le même coefficient directeur 0,75 (et des ordonnées à l'origine différentes) : d et d' sont parallèles.

(e) -2 est l'ordonnée à l'origine commune, pas le coefficient directeur. Les coefficients directeurs sont 0,75 et -1, différents : les droites ne sont pas parallèles, elles se coupent en $(0\,;\,-2)$.

Ex. 26 ★★★ **Corriger le tracé d'Inès**

(a) Non. $f(0) = 5 - 1{,}5 \times 0 = 5$: la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;\,5)$. Inès a inversé l'abscisse et l'ordonnée : $A(5\,;\,0)$ est sur l'axe des abscisses.

(b) $f(-1) = 5 - 1{,}5 \times (-1) = 5 + 1{,}5 = 6{,}5$. Or $6{,}5 \neq 3{,}5$: le point C n'est pas sur d. Inès a oublié le signe moins. Le bon point de contrôle est $C(-1\,;\,6{,}5)$.

(c) D est sur l'axe des abscisses, donc son ordonnée vaut 0 : je cherche l'antécédent de 0. $5 - 1{,}5x = 0$, donc $1{,}5x = 5$ et $x = \frac{5}{1{,}5} = \frac{10}{3}$.
Donc $D\left(\frac{10}{3}\,;\,0\right)$, soit environ $(3{,}33\,;\,0)$.

(d) Faux. Le coefficient directeur est $a = -1{,}5$. Quand x augmente de 4, $f(x)$ varie de $-1{,}5 \times 4 = -6$: $f(x)$ diminue de 6. Comme $a < 0$, la fonction est décroissante et la droite d descend.

Ex. 27 ★★★ **Cinq droites à comparer**

(a) $g(x) = 3x$ est une fonction linéaire : $g(0) = 3 \times 0 = 0$. Donc d_g passe par l'origine. Les autres droites ne passent pas par l'origine, car $f(0) = h(0) = k(0) = -2$ et $m(0) = 1$.

(b) Faux. $f(0) = -2 + 3 \times 0 = -2$, $h(0) = -2 - 0{,}5 \times 0 = -2$ et $k(0) = -2$: les trois droites ont la même ordonnée à l'origine. Elles passent toutes par le point $(0\,;\,-2)$, sur l'axe des ordonnées. Des coefficients directeurs différents veulent seulement dire qu'elles ne sont pas parallèles.

Ex. 27 **(suite)**

(c) d_g a le même coefficient directeur que d_f ($a = 3$) : elle est parallèle à d_f. Elles ne sont pas confondues, car leurs ordonnées à l'origine sont différentes (0 pour g et -2 pour f).

(d) Je compare l'éloignement de a par rapport à 0 : d_m ($a = -4$) est la plus raide, puis d_f et d_g ($a = 3$, même raideur), puis d_h ($a = -0{,}5$), puis d_k ($a = 0$). d_m et d_h descendent ($a < 0$), d_f et d_g montent ($a > 0$), d_k est horizontale.

(e) Je calcule l'image de -2 et je la compare à l'ordonnée -6. $f(-2) = -2 + 3 \times (-2) = -8$; $g(-2) = 3 \times (-2) = -6$; $h(-2) = -2 - 0{,}5 \times (-2) = -1$; $k(-2) = -2$; $m(-2) = 1 - 4 \times (-2) = 9$. Seul $g(-2) = -6$: le point E est seulement sur d_g.

Ex. 28 ★★★ **Un réservoir qui se vide, lu sur un graphique**

(a) Le point d'abscisse 0 a pour ordonnée 28 : $b = V(0) = 28$. Au départ, le réservoir contient 28 L.

(b) Mehdi fait deux erreurs. Un carreau vaut 2 L : 6 carreaux font $6 \times 2 = 12$ L. Et t augmente de 3 h, pas de 1 h : il faut diviser par 3. V passe de 24 à 12 L : $a = \frac{12-24}{4-1} = \frac{-12}{3} = -4$. Le volume diminue de 4 L par heure.

(c) $V(t) = -4t + 28$. Le réservoir est vide quand $V(t) = 0$: $-4t + 28 = 0$, donc $4t = 28$ et $t = 7$. Contrôle : $V(7) = -4 \times 7 + 28 = 0$. Le réservoir sera vide au bout de 7 heures.

(d) Même rythme, donc même coefficient directeur -4 : $W(t) = -4t + 36$. Les droites sont parallèles, et pas confondues car $36 \neq 28$. À chaque instant, $W(t) - V(t) = 36 - 28 = 8$: tant que le premier n'est pas vide, le second contient 8 L de plus. Ils ne contiennent donc jamais le même volume.

5. *Déterminer une fonction affine par deux points*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : calculer le coefficient directeur**

(a) $a = \frac{17-5}{4-1} = \frac{12}{3} = 4$.

(b) $a = \frac{-5-7}{3-(-1)} = \frac{-12}{4} = -3$.

(c) $a = \frac{5-3}{7-2} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

(d) $a = \frac{1-(-4)}{-1-(-3)} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

(e) Les données sont en désordre, mais je garde le même ordre : $a = \frac{-5-1}{2-6} = \frac{-6}{-4} = 1{,}5$.

Ex. 29 **(suite)**

(f) $f(3) = 4$ et $f(9) = 2$: $a = \frac{2-4}{9-3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$. Le réservoir perd $\frac{1}{3}$ L par minute.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : trouver l'ordonnée à l'origine**

(a) $b = 1 - 3 \times 2 = 1 - 6 = -5$.

(b) $b = 5 - (-2) \times (-4) = 5 - 8 = -3$.

(c) $b = -1 - 0{,}5 \times 6 = -1 - 3 = -4$.

(d) Le point $(0\,;\,7)$ est sur l'axe des ordonnées : $b = f(0) = 7$ directement.

(e) Lou a oublié que $(-1{,}5) \times (-2) = +3$: elle a calculé $8 + 3$. En fait, $b = 8 - (-1{,}5) \times (-2) = 8 - 3 = 5$.

(f) $b = 10 - \frac{2}{3} \times 9 = 10 - 6 = 4$: la plante mesurait 4 cm au départ.

Ex. 31 ★★☆ **Une droite par deux points**

(a) $a = \frac{-1-11}{4-(-2)} = \frac{-12}{6} = -2$.

(b) $b = 11 - (-2) \times (-2) = 11 - 4 = 7$. Donc $f(x) = 7 - 2x$.

(c) $f(4) = 7 - 2 \times 4 = 7 - 8 = -1$: c'est bien l'ordonnée de B ✓.

(d) $f(5) = 7 - 2 \times 5 = -3$ et $-3 \neq -4$: C n'est pas sur la droite, Noé a tort.

(e) $x_2 - x_1 = 3 - 3 = 0$: on ne peut pas diviser par 0. Le nombre 3 aurait deux images, 1 et 6 : impossible pour une fonction. Ce n'est pas possible.

Ex. 32 ★★☆ **Location de kayaks**

(a) Hugo n'a pas fait les deux différences dans le même ordre (Sacha moins Maëlle en haut, Maëlle moins Sacha en bas). $a = \frac{29{,}5-17}{7-2} = \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$: $2{,}50$ € par heure.

(b) $b = 17 - 2{,}5 \times 2 = 17 - 5 = 12$: ce sont 12 € de frais fixes. Contrôle : $f(7) = 2{,}5 \times 7 + 12 = 17{,}5 + 12 = 29{,}5$ ✓.

(c) Entre $(2\,;\,17)$ et $(4\,;\,22)$: $\frac{22-17}{4-2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$, le même coefficient que a. Les trois points sont alignés : ce prix suit le même tarif.

(d) $2{,}5x + 12 = 32$ donne $2{,}5x = 20$, soit $x = 8$. Le groupe a loué le kayak 8 heures.

Ex. 33 ★★★ **Trois points alignés ?**

(a) $a = \frac{8-4}{3-(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Attention : $3 - (-3) = 3 + 3 = 6$.

(b) $b = 4 - \frac{2}{3} \times (-3) = 4 + 2 = 6$, donc $f(x) = \frac{2}{3}x + 6$. Contrôle : $f(3) = \frac{2}{3} \times 3 + 6 = 2 + 6 = 8$ ✓

Ex. 33 **(suite)**

(c) Coefficient de (BC) : $\frac{10-8}{6-3} = \frac{2}{3}$. C'est le même coefficient que celui de (AB), et les deux droites passent par B : ce sont donc la même droite. Les points A, B et C sont alignés.

(d) K a pour ordonnée 0 : $\frac{2}{3}x + 6 = 0$ donne $\frac{2}{3}x = -6$, soit $x = -6 \times \frac{3}{2} = -9$.
Donc $K(-9\,;\,0)$.

(e) Les droites sont parallèles, donc elles ont le même coefficient directeur : $a = \frac{2}{3}$. $b = -1 - \frac{2}{3} \times (-6) = -1 + 4 = 3$, donc $g(x) = \frac{2}{3}x + 3$. Contrôle : $g(-6) = \frac{2}{3} \times (-6) + 3 = -4 + 3 = -1$ ✓

Ex. 34 ★★★ **Deux bougies qui se consument**

(a) $a = \frac{12-15{,}6}{5-2} = \frac{-3{,}6}{3} = -1{,}2$. Il est négatif parce que la hauteur diminue : la bougie perd 1,2 cm par heure.

(b) $b = 15{,}6 - (-1{,}2) \times 2 = 15{,}6 + 2{,}4 = 18$. Contrôle : $18 - 1{,}2 \times 5 = 18 - 6 = 12$ ✓.
Donc $h(x) = 18 - 1{,}2x$. $b = h(0)$ est la hauteur de départ : la bougie mesurait 18 cm.

(c) $18 - 1{,}2x = 9$ donne $-1{,}2x = -9$, soit $x = 7{,}5$. La bougie mesure 9 cm au bout de 7 h 30 min.

(d) $18 - 1{,}2x = 0$ donne $1{,}2x = 18$, soit $x = 15$. La bougie est entièrement consumée au bout de 15 h.

(e) $18 - 1{,}2x = 15 - 0{,}9x$ donne $3 = 0{,}3x$, soit $x = 10$. Au bout de 10 h, les deux bougies mesurent $18 - 1{,}2 \times 10 = 6$ cm. La seconde s'éteint quand $15 - 0{,}9x = 0$, soit $x = \frac{15}{0{,}9} \approx 16{,}7$ h. Elle dure plus longtemps que la première (15 h) : c'est la première bougie qui s'éteint en premier.

Ex. 35 ★★★ **Choisir sa formule d'escalade**

(a) $a = \frac{154-69}{8-3} = \frac{85}{5} = 17$, puis $b = 69 - 17 \times 3 = 69 - 51 = 18$.
Donc $A(x) = 17x + 18$. Contrôle : $17 \times 8 + 18 = 136 + 18 = 154$ ✓

(b) Le tableau donne $C(0) = 60$, donc $b = 60$: ce sont les frais d'inscription. $a = \frac{108-60}{4-0} = \frac{48}{4} = 12$.
Donc $C(x) = 12x + 60$.

(c) $A(10) = 17 \times 10 + 18 = 188$ € ; $B(10) = 25 \times 10 = 250$ € ; $C(10) = 12 \times 10 + 60 = 180$ €. Pour 10 mois, la formule C est la moins chère.

Ex. 35 **(suite)**

(d) $17x + 18 = 12x + 60$ donne $5x = 42$, soit $x = 8{,}4$. Ce n'est pas un nombre entier de mois. Pour 8 mois : $A = 154$ € et $C = 12 \times 8 + 60 = 156$ €, donc A est moins chère. Pour 9 mois : $A = 17 \times 9 + 18 = 171$ € et $C = 12 \times 9 + 60 = 168$ €. La formule C est moins chère à partir de 9 mois.

(e) $12x + 60 = 200$ donne $12x = 140$, soit $x = \frac{140}{12} \approx 11{,}7$. Il faut un nombre entier de mois : $C(11) = 192$ € et $C(12) = 204$ €, ce qui dépasse le budget. Léon peut payer 11 mois au maximum.

6. *Modéliser : comparer des tarifs*

Ex. 36 ★☆☆ **Partie fixe, partie proportionnelle**

(a) Partie fixe $b = 12$, prix par séance $a = 7$:
$P(x) = 7x + 12$. C'est une fonction affine (pas linéaire, car $b \neq 0$).

(b) La hauteur diminue, donc $a = -1{,}2$; au départ $b = 25$: $h(x) = 25 - 1{,}2x$. Fonction affine.

(c) 8 centimes = 0,08 € (et non 0,8 €) ; pas de frais, donc $b = 0$: $C(x) = 0{,}08x$. Fonction linéaire.

(d) Prise en charge payée une fois : $b = 4$; prix par km : $a = 2{,}6$.
Donc $T(x) = 2{,}6x + 4$. Fonction affine.

(e) Hauteur de départ $b = 9$, pousse par semaine $a = 0{,}8$: $H(x) = 9 + 0{,}8x$. Fonction affine.

(f) Température de départ $b = -4$, hausse par heure $a = 2$: $\theta(x) = -4 + 2x$. Fonction affine.

Ex. 37 ★☆☆ **Le réservoir du bateau**

(a) $a = -7{,}5$: il est négatif car le volume diminue de 7,5 L à chaque heure.

(b) $V(0) = 60 - 7{,}5 \times 0 = 60$: c'est le volume au départ, 60 L.

(c) $V(3) = 60 - 7{,}5 \times 3 = 60 - 22{,}5 = 37{,}5$. Il reste 37,5 L.

(d) 1 h 30 min = 1,5 h. $V(1{,}5) = 60 - 7{,}5 \times 1{,}5 = 60 - 11{,}25 = 48{,}75$. Il reste 48,75 L.

(e) On cherche l'antécédent de 0 : $60 - 7{,}5x = 0$, donc $7{,}5x = 60$ et $x = 8$. Le réservoir est vide au bout de 8 h.

(f) $60 - 7{,}5x = 41{,}25$, donc $7{,}5x = 18{,}75$ et $x = 2{,}5$. Or 0,5 h = 30 min : il restera 41,25 L au bout de 2 h 30 min.

Ex. 38 ★★☆ **Piscine : à l'entrée ou avec la carte ?**

(a) $A(x) = 4{,}5x$ (pas de partie fixe : fonction linéaire) et $B(x) = 2{,}1x + 30$ (partie fixe 30 : fonction affine).

(b) $A(10) = 4{,}5 \times 10 = 45$ € et $B(10) = 2{,}1 \times 10 + 30 = 51$ €. Pour 10 entrées, l'offre A est la moins chère.

(c) $4{,}5x = 2{,}1x + 30$, donc $2{,}4x = 30$ et $x = \frac{30}{2{,}4} = 12{,}5$.

(d) Non : un nombre d'entrées est entier. $A(12) = 54$ € et $B(12) = 55{,}20$ € : A est encore moins chère. $A(13) = 58{,}50$ € et $B(13) = 57{,}30$ € : B devient moins chère. L'offre B est la moins chère à partir de 13 entrées.

Ex. 39 ★★☆ **Trois offres de trottinette**

(a) En euros : $A(x) = 0{,}25x$, $B(x) = 0{,}2x + 1$ et $C(x) = 9$. La fonction C est constante (coefficient directeur 0).

(b) $0{,}25x = 0{,}2x + 1$ donne $0{,}05x = 1$, soit $x = \frac{1}{0{,}05} = 20$. Puis $0{,}2x + 1 = 9$ donne $0{,}2x = 8$, soit $x = 40$.

(c) $A(25) = 0{,}25 \times 25 = 6{,}25$ €, $B(25) = 0{,}2 \times 25 + 1 = 6$ € et $C(25) = 9$ €. Pour 25 min, l'offre B est la moins chère.

(d) Pour moins de 20 min, la droite de A est en dessous : A est la moins chère ($A(10) = 2{,}50$ € contre $B(10) = 3$ €). À 20 min, A et B coûtent 5 €. Entre 20 et 40 min, c'est B. Au-delà de 40 min (jusqu'à 60 min), c'est C : $B(50) = 11$ € et $A(50) = 12{,}50$ € contre 9 €.

(e) $0{,}2x + 1 = 6{,}6$, donc $0{,}2x = 5{,}6$ et $x = 28$. Noé peut rouler 28 minutes au plus.

Ex. 40 ★★★ **Kayak : au forfait ou à l'heure ?**

(a) Partie fixe : 8 € ; partie par minute : 15 centimes = 0,15 €.
Donc $A(x) = 8 + 0{,}15x$: c'est une fonction affine. Pour B : 12 € par heure, soit $\frac{12}{60} = 0{,}2$ € par minute, sans partie fixe.
Donc $B(x) = 0{,}2x$: c'est une fonction linéaire.

(b) 1 h 30 min = 90 min. $A(90) = 8 + 0{,}15 \times 90 = 8 + 13{,}5 = 21{,}50$ € et $B(90) = 0{,}2 \times 90 = 18$ €. Pour 1 h 30 min, l'offre B est la moins chère.

(c) Je résous $8 + 0{,}15x = 0{,}2x$: $8 = 0{,}05x$, donc $x = \frac{8}{0{,}05} = 160$ min, soit 2 h 40 min. Prix : $B(160) = 0{,}2 \times 160 = 32$ € ; contrôle : $A(160) = 8 + 0{,}15 \times 160 = 32$ € ✓. Les deux offres coûtent 32 € pour 2 h 40 min.

Ex. 40 (suite)

(d) Avant 160 min, la droite de B est en dessous : pour 60 min, $B(60) = 12$ € et $A(60) = 17$ €. Après 160 min, c'est la droite de A qui est en dessous : pour 180 min, $A(180) = 35$ € et $B(180) = 36$ €. Conclusion : l'offre B est la moins chère pour moins de 2 h 40 min, l'offre A au-delà.

(e) Je résous $8 + 0{,}15x = 26$: $0{,}15x = 18$, donc $x = \frac{18}{0{,}15} = 120$. Emma a loué le kayak 120 min, soit 2 h. Ce n'était pas le bon choix : $B(120) = 0{,}2 \times 120 = 24$ € < 26 €, ce qui est logique car 2 h, c'est moins que 2 h 40 min.

Ex. 41 ★★★ **Les deux bougies**

(a) La hauteur de départ 18 donne b. La hauteur diminue de 1,5 cm par heure, donc $a = -1{,}5$: $h_1(x) = 18 - 1{,}5x$.

(b) $a = \frac{8-16}{6-2} = \frac{-8}{4} = -2$; $b = 16 - (-2) \times 2 = 16 + 4 = 20$.
Donc $h_2(x) = 20 - 2x$. Contrôle : $h_2(6) = 20 - 2 \times 6 = 8$ ✓. Au départ, $h_2(0) = 20$: la bougie 2 mesurait 20 cm.

(c) Je cherche l'antécédent de 0 : $18 - 1{,}5x = 0$ donne $1{,}5x = 18$, soit $x = 12$. La bougie 1 est entièrement consumée au bout de 12 h.

(d) Je résous $18 - 1{,}5x = 20 - 2x$: $0{,}5x = 2$, donc $x = 4$. Contrôle : $h_1(4) = 18 - 6 = 12$ et $h_2(4) = 20 - 8 = 12$ ✓. Au bout de 4 h, les deux bougies mesurent 12 cm. Avant, la bougie 2 est la plus haute (20 cm contre 18 cm au départ). Après, c'est la bougie 1 : au bout de 6 h, $h_1(6) = 9$ cm et $h_2(6) = 8$ cm.

(e) Bougie 2 : $20 - 2x = 0$ donne $2x = 20$, soit $x = 10$. Elle s'éteint au bout de 10 h, avant la bougie 1 (12 h). Jade a tort : la bougie 2 est plus haute au départ, mais elle se consume plus vite (2 cm par heure contre 1,5).

Ex. 42 ★★★ **Trois formules au club de tennis**

(a) $A(x) = 11x$: fonction linéaire (aucune partie fixe). $B(x) = 6x + 48$: fonction affine (partie fixe 48, 6 par séance). $C(x) = 190$: fonction constante (le prix ne dépend pas du nombre de séances).

(b) $11x = 6x + 48$ donne $5x = 48$, soit $x = 9{,}6$. Mais un nombre de séances est entier : $A(9) = 11 \times 9 = 99$ € et $B(9) = 6 \times 9 + 48 = 102$ €, donc avec 9 séances, A est encore la moins chère. Chloé a tort : il faut arrondir à l'entier supérieur. B devient moins chère à partir de 10 séances : $B(10) = 108$ € et $A(10) = 110$ €.

Ex. 42 **(suite)**

(c) $6x + 48 = 190$ donne $6x = 142$, soit $x = \frac{142}{6} \approx 23{,}7$. Contrôle : $B(23) = 186$ € < 190 € et $B(24) = 192$ € > 190 €. La formule C est moins chère que B à partir de 24 séances.

(d) Formule A : $11x = 150$ donne $x = \frac{150}{11} \approx 13{,}6$. J'arrondis à l'entier inférieur : $A(13) = 143$ € et $A(14) = 154$ € (trop cher). Malik peut faire 13 séances au plus. Formule B : $6x + 48 = 150$ donne $6x = 102$, soit $x = 17$, et $B(17) = 150$ € exactement : 17 séances au plus.

(e) De 1 à 9 séances, la formule A est la moins chère ($A(9) = 99$ €, bien moins que 190 €). De 10 à 23 séances, c'est la formule B. À partir de 24 séances, c'est le forfait C : il est alors moins cher que B, elle-même moins chère que A.

7. *Exercices type brevet*

Ex. 43 ★☆☆ **Vrai ou faux express**

(a) Faux : $3 - x = -x + 3$. C'est une fonction affine avec $b = 3$. L'image de 0 est $3 - 0 = 3 \neq 0$, donc elle n'est pas linéaire.

(b) Vrai : $f(2) = 4 \times 2 - 3 = 5$. Le point A est donc sur la droite.

(c) Faux : $g(-1) = 6 + 3 \times (-1) = 3 \neq 2$. Le point B n'est pas sur la droite.

(d) Vrai : $h(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$. C'est une fonction affine avec $a = 4$ et $b = 4$.

(e) Vrai : le coefficient multiplicateur est $1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$, donc le nouveau prix vaut $1{,}15x$.

(f) Vrai : $\frac{x}{4} = \frac{1}{4}x = 0{,}25x$. Les deux fonctions ont le même coefficient directeur 0,25, donc leurs droites sont parallèles
(et distinctes, car $3 \neq -1$).

(g) Faux : $a = \frac{-1-7}{5-1} = \frac{-8}{4} = -2$. On trouve 2 quand on fait les différences dans le désordre : $\frac{7-(-1)}{5-1}$.

Ex. 44 ★☆☆ **Une formule de tableur**

(a) La formule multiplie le nombre de la ligne 1 par 3, puis ajoute 2 : $f(x) = 3x + 2$.

(b) f est affine, avec $a = 3$ et $b = 2$. Elle n'est pas linéaire, car $f(0) = 2 \neq 0$.

(c) $f(-4) = 3 \times (-4) + 2 = -10$; $f(-1) = 3 \times (-1) + 2 = -1$; $f(0) = 2$; $f(2{,}5) = 7{,}5 + 2 = 9{,}5$.

Ex. 44 **(suite)**

(d) Je résous $3x + 2 = 20$, donc $3x = 18$ et $x = 6$. Il faut écrire 6.

(e) Non. $f(3) = 3 \times 3 + 2 = 11$, donc 3 est un antécédent de 11 : Tom confond image et antécédent. L'image de 11 est $f(11) = 3 \times 11 + 2 = 35$.

Ex. 45 ★★☆ **Les soldes**

(a) Le coefficient multiplicateur est $1 - \frac{30}{100} = 0{,}7$, donc $p(x) = 0{,}7x$. La fonction p est linéaire, de coefficient 0,7.

(b) $p(85) = 0{,}7 \times 85 = 59{,}5$. Le manteau soldé coûte 59,50 €.

(c) Je résous $0{,}7x = 44{,}8$, donc $x = \frac{44{,}8}{0{,}7} = 64$. Les baskets coûtaient 64 € avant les soldes.

(d) Oui, car p est une fonction linéaire. Comme $170 = 2 \times 85$, on a $p(170) = 2 \times p(85) = 2 \times 59{,}5 = 119$. Le manteau à 170 € coûte 119 € soldé.

(e) $44{,}8 \times 1{,}3 = 58{,}24 \neq 64$. Hugo a tort : pour revenir au prix initial, il faut diviser par 0,7.

Ex. 46 ★★☆ **Location de kayaks**

(a) Non. Le premier point est à $x = 1$. Quand x augmente de 1, le prix augmente de $14 - 10 = 4$, donc $a = 4$. Je recule d'une heure : $b = 10 - 4 = 6$.
Donc $A(x) = 6 + 4x$.

(b) $B(x) = 7x$. Le tarif B est proportionnel à la durée, car B est linéaire. Le tarif A ne l'est pas : $A(0) = 6 \neq 0$.

(c) Je résous $6 + 4x = 30$, donc $4x = 24$ et $x = 6$. On peut louer 6 heures.

(d) Je résous $7x = 6 + 4x$, donc $3x = 6$ et $x = 2$. Pour 2 heures, les deux tarifs coûtent $7 \times 2 = 14$ €.

(e) $A(5) = 6 + 4 \times 5 = 26$ € et $B(5) = 7 \times 5 = 35$ €. Je lui conseille le tarif A : au-delà de 2 heures, sa droite est en dessous.

Ex. 47 ★★★ **La bougie qui se consume**

(a) En $x = 0$, le point est à 21 : la bougie mesure 21 cm à l'allumage, donc $b = 21$. Quand x augmente de 1, la hauteur passe de 21 à 18 : elle varie de $18 - 21 = -3$, donc $a = -3$. Ainsi $h(x) = 21 - 3x$. Contrôle : $h(5) = 21 - 3 \times 5 = 6$ ✓, c'est bien le dernier point.

(b) Non. Le sens de variation dépend du coefficient directeur, pas de l'ordonnée à l'origine. Ici $a = -3 < 0$, donc h est décroissante : la bougie perd 3 cm par heure.

Ex. 47 (suite)

(c) 4 h 30 min = 4,5 h (et pas 4,3 h). $h(4{,}5) = 21 - 3 \times 4{,}5 = 21 - 13{,}5 = 7{,}5$. Au bout de 4 h 30 min, la bougie mesure 7,5 cm.

(d) On cherche l'antécédent de 0 : $21 - 3x = 0$, donc $3x = 21$ et $x = 7$. La bougie est entièrement consumée au bout de 7 heures.

(e) $g(x) = 15 - 1{,}8x$. Même hauteur : $21 - 3x = 15 - 1{,}8x$, donc $6 = 1{,}2x$ et $x = 5$. Au bout de 5 h, les deux bougies mesurent $21 - 3 \times 5 = 6$ cm. La seconde s'éteint quand $15 - 1{,}8x = 0$, soit $x = \frac{15}{1{,}8} \approx 8{,}3$ h, plus tard que la première (7 h). C'est donc la première bougie qui s'éteint en premier, même si elle était plus grande au départ.

Ex. 48 ★★★ Trois formules pour une salle d'escalade

(a) $A(x) = 9x$: fonction linéaire (coefficient 9). $B(x) = 40 + 5x$: fonction affine (coefficient directeur 5, ordonnée à l'origine 40). $C(x) = 180$: fonction constante
(coefficient directeur 0).

(b) $B(6) = 40 + 5 \times 6 = 70$ € ; $B(15) = 40 + 5 \times 15 = 115$ €. Pour la dernière case, on cherche l'antécédent de 125 : $40 + 5x = 125$, donc $5x = 85$ et $x = 17$ séances.

(c) Inès a calculé l'image de 75 : $B(75) = 40 + 5 \times 75 = 415$ €, c'est-à-dire le prix de 75 séances. Or 75 € est un prix : il faut chercher son antécédent. $40 + 5x = 75$, donc $5x = 35$ et $x = 7$. Avec 75 €, Inès peut faire 7 séances.

(d) $9x = 40 + 5x$, donc $4x = 40$ et $x = 10$. Pour 10 séances, les formules A et B coûtent le même prix : $9 \times 10 = 90$ €.

(e) $A(30) = 9 \times 30 = 270$ € ; $B(30) = 40 + 5 \times 30 = 190$ € ; $C(30) = 180$ €. Le pass annuel C est le moins cher pour 30 séances (il devient plus avantageux que B à partir de $40 + 5x = 180$, soit $x = 28$ séances). Je conseille la formule C à Noé.

Ex. 49 ★★★ Le tarif du taxi

(a) Sacha n'a pas fait les différences dans le même ordre : en haut, prix de 12 km moins prix de 5 km ; en bas, $5 - 12$. Un prix qui augmente avec la distance ne peut pas donner $a < 0$. Correct : $a = \frac{21{,}60 - 11{,}10}{12 - 5} = \frac{10{,}5}{7} = 1{,}5$. Le kilomètre coûte 1,50 €.

Ex. 49 (suite)

(b) $b = 11{,}10 - 1{,}5 \times 5 = 11{,}10 - 7{,}5 = 3{,}6$. Contrôle : $3{,}6 + 1{,}5 \times 12 = 3{,}6 + 18 = 21{,}6$ ✓.
Donc $f(x) = 3{,}6 + 1{,}5x$. Le nombre 3,60 € est la prise en charge, payée une seule fois à chaque course.

(c) $f(20) = 3{,}6 + 1{,}5 \times 20 = 3{,}6 + 30 = 33{,}6$. Or $33{,}6 \neq 34{,}6$: le point M n'appartient pas à la représentation graphique de f.

(d) $f(24) = 3{,}6 + 1{,}5 \times 24 = 39{,}6$ € alors que $2 \times f(12) = 2 \times 21{,}6 = 43{,}2$ €. C'est faux : f est affine mais pas linéaire (la prise en charge n'est payée qu'une fois), donc le prix n'est pas proportionnel à la distance.

(e) Coefficient multiplicateur : $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$. Prix avant la hausse : $26{,}46 \div 1{,}05 = 25{,}2$ €. Distance : $3{,}6 + 1{,}5x = 25{,}2$, donc $1{,}5x = 21{,}6$ et $x = 14{,}4$. La course coûtait 25,20 € et mesurait 14,4 km.