49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels de 3e : fonctions linéaires et affines

À retenir : Je développe et je réduis pour écrire $f(x) = mx + p$: m multiplie x (avec son signe), $p = f(0)$. Si $p = 0$, la fonction est linéaire (proportionnalité). Si $m = 0$, elle est constante. Antécédent de k : je résous $f(x) = k$. Pour $+12\,\%$, je multiplie par 1,12.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatisme : reconnaître et lire m et p** — Pour chaque fonction, développe et réduis si besoin. Donne ensuite m et p et dis si la fonction est linéaire, constante ou ni l'un ni l'autre. Si la fonction n'est pas affine, dis-le.

(a) $f(x) = 4 - 6x$

(b) $g(x) = \dfrac{2x}{5}$

(c) $h(x) = 3(x + 2) - 3x$

(d) $k(x) = (x + 1)(x + 3) - x^2$

(e) $u(x) = x(x - 4)$

(f) $v(x) = 7x - 2(x + 1{,}5)$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatisme : image, antécédent, point de la courbe** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 9$. On note C_f sa droite représentative.

(a) Calcule $f(-2)$.

(b) Calcule l'image de $-0{,}5$ par f.

(c) Détermine l'antécédent de 1 par f.

(d) Détermine l'antécédent de -3 par f.

(e) Dans l'égalité $f(1{,}5) = 3$, quel nombre est l'image et quel nombre est l'antécédent ? Vérifie cette égalité par un calcul.

(f) Le point $A(-1\,;\,12)$ appartient-il à C_f ? Justifie par un calcul.

Ex. 3 ★★☆ **Les cerises du marché** — Au marché, le prix des cerises est proportionnel à leur masse : 2,5 kg coûtent 15 €. On note $P(x)$ le prix, en euros, de x kg de cerises.

(a) Explique pourquoi P est une fonction linéaire. Détermine son coefficient et donne sa signification.

(b) Calcule $P(0)$ et interprète le résultat.

(c) Le marchand augmente tous ses prix de 15 %. Exprime le nouveau prix $Q(x)$ de x kg en fonction de x.

(d) Avec ce nouveau tarif, quelle masse de cerises Noé peut-il acheter avec 20,70 € ?

Ex. 4 ★★☆ **Deux loueurs de trottinettes** — Deux loueurs affichent leurs tarifs. Le prix est en euros et la durée x en heures.

Loueur A :

x (h)	1	2	4
Prix (€)	3,5	7	14

Loueur B :

x (h)	1	2	4
Prix (€)	6	8	12

(a) Lequel des deux tableaux est un tableau de proportionnalité ? Justifie.

(b) Pour le loueur B, calcule de combien augmente le prix pour chaque heure supplémentaire. Déduis-en la fonction affine g qui donne le prix $g(x)$.

(c) Écris $g(x)$ comme la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction constante. Interprète chacun des deux termes.

(d) Pour quelle durée les deux loueurs font-ils payer le même prix ? Donne-la en heures et minutes.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux : linéaire, affine, paramètre** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par un calcul ou par un contre-exemple.

(a) f est une fonction linéaire telle que $f(6) = -9$. Affirmation : $f(-4) = 6$.

(b) h est une fonction affine telle que $h(5) = 8$. Affirmation : on a forcément $h(10) = 16$.

(c) Pour un réel k, on pose $w : x \mapsto (k + 1)x + k^2 - 9$. Affirmation : il existe une seule valeur de k pour laquelle w est linéaire.

(d) v est une fonction affine telle que $v(3) = 7$ et $v(7) = 3$. Affirmation : $v(0) = 10$.

Ex. 6 ★★★ **Ramettes de papier et livraison** — Un vendeur affiche une ramette de papier à 4,50 € HT. Le prix TTC s'obtient en augmentant le prix HT de 20 %. Chaque commande paie en plus une livraison de 6 € TTC. On note x le nombre de ramettes commandées.

(a) Explique pourquoi le prix TTC $T(x)$ des x ramettes, sans la livraison, est une fonction linéaire de x. Donne son coefficient.

(b) Exprime le coût total $C(x)$, livraison comprise. La fonction C est-elle linéaire ? Est-elle affine ? Justifie.

Ex. 6 **(suite)**

(c) Mia a payé 87 € au total, livraison comprise. Combien de ramettes a-t-elle commandées ? Justifie par un calcul.

(d) Le prix moyen d'une ramette, livraison comprise, est-il le même pour 15 et pour 30 ramettes ? Justifie, puis explique le résultat.

Ex. 7 ★★★ **La bougie qui se consume** — Léo allume une bougie et mesure sa hauteur $h(t)$, en cm, t heures après l'allumage :

t (h)	1	3	4	6
h(t) (cm)	21	15	12	6

(a) Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Justifie.

(b) Calcule le taux d'accroissement $\frac{h(3)-h(1)}{3-1}$, puis celui entre $t=4$ et $t=6$. Que peux-tu conjecturer ?

(c) On admet que h est affine. Détermine m et p, puis donne le sens de chacun dans la situation, avec son unité.

(d) Au bout de combien de temps la bougie est-elle entièrement consumée ? Donne l'intervalle de t sur lequel le modèle a un sens.

(e) À quel instant la bougie mesure-t-elle 13,5 cm ? Donne la réponse en heures et minutes.

2. *Reconnaître une fonction affine, image et antécédent*

À retenir : Je développe et je réduis pour écrire $f(x) = mx + p$: m multiplie x avec son signe ($6 - x$: $m = -1$, $p = 6$). Linéaire si $p = 0$, constante si $m = 0$.
$A(x_A\,;\,y_A) \in C_f \iff f(x_A) = y_A$.

Ex. 8 ★☆☆ **Affine ou pas ? Lire m et p** — Pour chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R}^*$ s'il y a une division par x), dis si elle est affine. Si oui, donne m et p, et précise si elle est linéaire ou constante.

(a) $f_1(x) = 4 - 3x$

(b) $f_2(x) = \dfrac{x}{5}$

(c) $f_3(x) = -7$

(d) $f_4(x) = 3(x-2) + 2x$

(e) $f_5(x) = x(x+3)$

(f) $f_6(x) = \dfrac{2}{x} + 1$

(g) $f_7(x) = (x+2)^2 - x^2$

Ex. 9 ★☆☆ **Image, antécédent, point de la courbe** — On considère la fonction affine $f(x) = -4x + 9$ et sa droite représentative C_f.

(a) Calcule l'image de -3 par f.

(b) Calcule $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

(c) Détermine l'antécédent de 1 par f.

(d) Détermine l'antécédent de 15 par f.

(e) Le point $A(2{,}5\,;\,-1)$ appartient-il à C_f ? Justifie par un calcul.

(f) Le point $B(-1\,;\,12)$ appartient-il à C_f ? Justifie par un calcul.

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur les fonctions affines** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie.

(a) La fonction $x \mapsto 2x(x-1) - 2x^2$ n'est pas affine, car on y voit x^2.

(b) Pour $h(x) = 2 - 5x$, le coefficient directeur vaut 2 et l'ordonnée à l'origine vaut -5.

(c) Pour $v(x) = \frac{x-8}{4}$, on a $m = \frac{1}{4}$ et $p = -8$.

(d) Pour la fonction constante $c(x) = 4$, le nombre 4 a un seul antécédent.

(e) Pour $g(x) = 0{,}5x - 3$, tout réel a exactement un antécédent par g ; par exemple, l'antécédent de 1 est 8.

Ex. 11 ★★☆ **L'erreur de Lina** — Lina doit écrire $f(x) = 3(1-2x) + 8x$ sous la forme $mx + p$. Elle écrit : « $f(x) = 3 - 2x + 8x = 3 + 6x$, donc $m = 3$ et $p = 6$ ».

(a) Repère les deux erreurs de Lina.

(b) Écris correctement $f(x)$ sous la forme $mx + p$ et donne m et p.

(c) Détermine l'antécédent de -4 par f.

(d) Lina affirme : « $f(4) = 2 \times f(2)$, car doubler x double $f(x)$ ». A-t-elle raison ? Justifie par un calcul.

Ex. 12 ★★☆ **Degrés Celsius et degrés Fahrenheit** — Pour convertir une température x en degrés Celsius (°C) en degrés Fahrenheit (°F), on utilise la fonction f définie par $f(x) = 1{,}8x + 32$. On note C_f sa droite représentative.

(a) Clara affirme : « Quand la température double en °C, elle double aussi en °F. » A-t-elle raison ? Justifie avec $f(10)$ et $f(20)$.

(b) Ton thermomètre indique 37 °C. Calcule la température correspondante en °F.

(c) L'eau bout à 212 °F. Détermine cette température en °C par un calcul d'antécédent.

(d) Le point $A(-15\,;\,5)$ appartient-il à C_f ? Justifie par un calcul, puis traduis le résultat par une phrase.

(e) Existe-t-il une température qui s'écrit avec le même nombre en °C et en °F ? Justifie par un calcul.

Ex. 13 ★★★ **Une famille de fonctions affines** — Pour tout réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (2-k)x + 2k - 10$. On note C_k sa droite représentative.

(a) Détermine la valeur de k pour laquelle f_k est constante, puis donne $f_k(x)$ pour cette valeur.

(b) Détermine la valeur de k pour laquelle f_k est linéaire, puis donne $f_k(x)$ pour cette valeur.

(c) Existe-t-il une valeur de k telle que le point $A(2\,;\,4)$ soit sur C_k ? Justifie par un calcul.

(d) Détermine la valeur de k pour laquelle le point $B(3\,;\,1)$ appartient à C_k, puis donne $f_k(x)$ pour cette valeur.

(e) Pour $k = 7$, écris $f_7(x)$ sous la forme $mx + p$, puis calcule l'antécédent de 0 par f_7.

Ex. 14 ★★★ **Des carrés… et pourtant affine ?** — On considère les fonctions g et t définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+3)^2 - (x-1)^2$ et $t(x) = x(x+5)$. On note C_g la courbe de g.

(a) Démontre que g est une fonction affine et donne son coefficient directeur m et son ordonnée à l'origine p.

(b) Ben affirme : « g est linéaire, car $g(-1) = 0$. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Calcule l'antécédent de -10 par g.

(d) Le point $B(-1{,}25\,;\,-2)$ appartient-il à C_g ? Justifie par un calcul.

(e) Calcule $t(0)$, $t(1)$ et $t(2)$, puis utilise ces trois valeurs pour justifier que t n'est pas affine.

3. *Coefficient directeur, taux d'accroissement : déterminer une fonction affine*

À retenir : $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$: même ordre en haut et en bas (sinon on obtient $-m$). Puis $p = f(x_1) - mx_1$, et je vérifie avec l'autre image. Ex. : $f(1) = 2$ et $f(3) = 8$ donnent $m = \frac{6}{2} = 3$ et $p = -1$.

Ex. 15 ★☆☆ **Trouver le coefficient directeur** — Chaque fonction est affine. Écris les fractions sans arrondir.

(a) $f(1) = 5$ et $f(4) = 17$. Calcule le coefficient directeur m de f.

(b) $f(-2) = 7$ et $f(3) = -8$. Calcule le coefficient directeur m de f.

(c) $g(9) - g(1) = 20$. Calcule le coefficient directeur de g.

(d) Pour tout réel x, $h(x+1) - h(x) = -6$. Donne le coefficient directeur de h.

(e) Quand x augmente de 6, $k(x)$ diminue de 10. Donne le coefficient directeur de k.

(f) Le taux d'accroissement de q entre 2 et 5 vaut 3. Calcule $q(5) - q(2)$.

Ex. 16 ★☆☆ **Retrouver f avec m et une image** — Chaque fonction est affine. Donne son expression sous la forme $mx + p$.

(a) f a pour coefficient directeur 4, et $f(2) = 3$.

(b) g a pour coefficient directeur -2, et C_g passe par le point $A(-3\,;\,11)$.

(c) Quand x augmente de 1, $h(x)$ diminue de 5, et $h(1) = -5$.

(d) k a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$, et $k(8) = 2$.

(e) Le taux d'accroissement de r entre deux réels quelconques vaut 0, et $r(4) = 7$.

(f) $s(5) - s(1) = -2$ et $s(1) = 3$.

Ex. 17 ★★☆ **Repérer l'erreur et retrouver f** — f est une fonction affine telle que $f(-1) = 6$ et $f(3) = -2$.

(a) Inès écrit $m = \frac{-2-6}{-1-3} = 2$. A-t-elle raison ? Justifie, puis calcule le bon coefficient directeur.

(b) Théo écrit $m = \frac{3-(-1)}{-2-6} = -\frac{1}{2}$. Explique son erreur.

(c) Calcule l'ordonnée à l'origine p à l'aide de $f(-1)$, puis donne $f(x)$.

(d) Contrôle ton expression avec la seconde image.

(e) Quand x augmente de 3, comment varie $f(x)$? Justifie.

Ex. 18 ★★☆ **Taux d'accroissement : affine ou pas ?** — On donne quelques valeurs de deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$.

x	0	2	5	9
g(x)	1	7	16	28
h(x)	4	0	-6	-13

(a) Complète la démonstration du cours : si $f(x) = mx + p$, alors $f(u) - f(v) = (mu + p) - (\ldots) = \ldots = m(\ldots)$.

(b) Calcule les taux d'accroissement de g entre 0 et 2, entre 2 et 5, puis entre 5 et 9.

(c) Ces valeurs de g peuvent-elles être celles d'une fonction affine ? Si oui, donne son expression et vérifie-la avec $g(9)$.

(d) Kenza affirme : « Le taux de h vaut -2 entre 0 et 2, donc h est affine. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Accroissements proportionnels : démontrer puis exploiter** — f est une fonction affine : $f(x) = mx + p$. Au départ, on sait seulement que $f(7) - f(2) = -4$.

(a) Complète la démonstration : pour tout réel x, $f(x+1) - f(x) = (m(x+1) + p) - (mx + p) = \ldots$. Que signifie ce résultat ?

(b) En utilisant $f(7) - f(2)$, calcule m. Donne-le en fraction, sans arrondir.

Ex. 19 (suite)

(c) Sans connaître p, de combien varie $f(x)$ quand x augmente de 10 ? Justifie.

(d) On apprend que $f(2) = 1$. Détermine p, écris $f(x)$, puis contrôle avec $f(7) - f(2) = -4$.

Ex. 20 ★★★ **La bougie qui se consume** — Une bougie se consume régulièrement. Sa hauteur (en cm) est une fonction affine h du temps t (en min) écoulé depuis l'allumage : $h(t) = mt + p$. Après 40 min, elle mesure 19 cm. Après 90 min, elle mesure 14 cm.

(a) Lou calcule $m = \frac{90-40}{14-19} = -10$. Ce calcul est-il juste ? Justifie, puis donne m avec son unité.

(b) Calcule p, écris $h(t)$, puis contrôle avec la seconde mesure. Que représente p ?

(c) Au bout de combien de temps la bougie est-elle entièrement consumée ? Donne le domaine de validité du modèle.

(d) Résous l'inéquation $h(t) < 5$ sur ce domaine, puis interprète le résultat.

Ex. 21 ★★★ **Images négatives et coefficient fractionnaire** — f est une fonction affine telle que $f(-3) = -7$ et $f(6) = -1$. On donne aussi quelques valeurs d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$:

x	-3	3	6
g(x)	-7	-2	-1

(a) Calcule le coefficient directeur m de f. Donne-le en fraction irréductible, sans arrondir.

(b) Déduis-en p, puis écris $f(x)$. Contrôle ton résultat avec $f(6)$.

(c) Sans calculer $f(x)$ autrement, de combien doit augmenter x, à partir de 6, pour que $f(x)$ augmente de 10 ? Déduis-en l'antécédent de 9 par f.

(d) Zoé affirme : « g a les mêmes images que f en -3 et en 6, donc g est égale à f. » Vrai ou faux ? Justifie avec des taux d'accroissement.

4. *La droite représentative : points, lire m et p*

À retenir : La droite de $x \mapsto mx + p$ coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,p)$. $m = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$, négatif si la droite descend. Ex. : de $(0\,;\,1)$ à $(2\,;\,-5)$, $m = -3$. Axe des abscisses : $\left(-\frac{p}{m}\,;\,0\right)$.

Ex. 22 ★☆☆ **Lire m et p avec deux points** — La droite représentative d'une fonction affine f passe par les deux points donnés. Lis p, calcule m, puis écris $f(x)$.

(a) $(0\,;\,3)$ et $(2\,;\,7)$ (b) $(0\,;\,5)$ et $(3\,;\,-1)$

(c) $(0\,;\,0)$ et $(4\,;\,6)$ (d) $(0\,;\,-2)$ et $(5\,;\,-2)$

(e) $(-4\,;\,1)$ et $(0\,;\,-1)$ (f) $(0\,;\,-3)$ et $(6\,;\,1)$

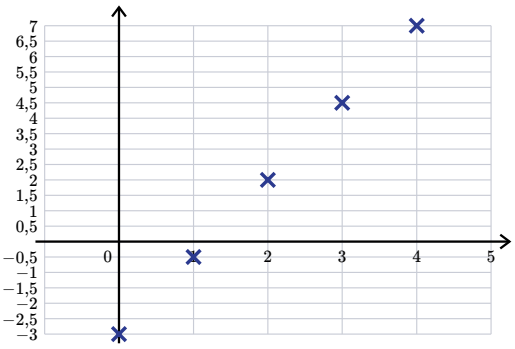
Ex. 23 ★☆☆ **Où la droite coupe-t-elle les axes ?** — Pour chaque fonction, donne les coordonnées du point où sa droite représentative coupe l'axe des ordonnées, puis de celui où elle coupe l'axe des abscisses.

(a) $f(x) = -3x + 6$ (b) $g(x) = 4x + 2$

(c) $h(x) = 0{,}4x - 2$ (d) $k(x) = -2x - 5$

(e) $l(x) = 7x$ (f) $u(x) = 3$

Ex. 24 ★★☆ **Lire une droite sur un nuage de points** — Les points ci-dessous, d'abscisses 0 à 4, sont alignés : ils sont sur la droite représentative d'une fonction affine f.



(a) Lis l'ordonnée à l'origine p de f.

(b) Choisis deux points aux coordonnées entières, pas forcément voisins, et calcule le coefficient directeur m.

(c) Écris $f(x)$.

(d) Calcule les coordonnées du point où la droite coupe l'axe des abscisses.

(e) Le point $A(10\,;\,22)$ appartient-il à la droite ? Justifie par un calcul.

Ex. 25 ★★☆ **Quatre séries de points** — Ben a relevé quatre séries de points $(x\,;\,y)$. Sur chaque ligne A, B, C, D, on lit l'ordonnée y du point d'abscisse x.

x	-2	0	2	4
A	-3	0	3	6
B	4	4	4	4
C	7	5	2	-1
D	6	5	4	3

(a) Quelle ligne donne des points de la droite d'une fonction constante ? Justifie et donne cette fonction.

(b) Justifie que les points de la ligne A sont sur la droite d'une fonction linéaire, puis donne son expression.

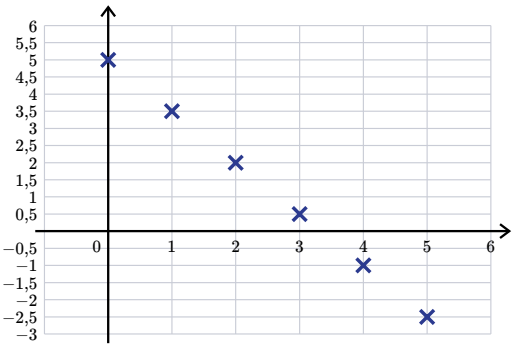
Ex. 25 (suite)

(c) Les points de la ligne C sont-ils alignés ? Justifie avec les écarts verticaux.

(d) Donne la fonction affine f dont la droite passe par les points de la ligne D.

(e) Hugo affirme : « La droite de la ligne D coupe l'axe des abscisses en $x = 5$. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 26 ★★★ **Corriger la lecture de Malik** — Malik a placé six points $(x\,;\,y)$ d'abscisses 0 à 5.



(a) Calcule l'écart vertical entre deux points consécutifs. Justifie que ces points sont sur la droite représentative d'une fonction affine f.

(b) Malik calcule $m = \frac{4-0}{-1-5}$ et lit $p \approx 3{,}3$ là où la droite coupe l'axe des abscisses. Corrige ses deux erreurs, puis écris $f(x)$.

(c) Calcule les coordonnées exactes du point où la droite coupe l'axe des abscisses.

(d) Le point $B(-7\,;\,15{,}4)$ est-il sur la droite ? Justifie par un calcul.

Ex. 27 ★★★ **La bougie d'Inès** — Inès allume une bougie. Sa hauteur, en cm, t heures après l'allumage, est donnée par une fonction affine h. Au bout de 2 h, la bougie mesure 21 cm. Au bout de 5 h, elle mesure 15 cm.

(a) Calcule le coefficient directeur m de h, avec son unité, puis interprète son signe.

(b) Détermine l'ordonnée à l'origine p, écris $h(t)$, puis interprète p dans la situation.

(c) Calcule les coordonnées du point où la droite représentative de h coupe l'axe des abscisses. Déduis-en le domaine de validité du modèle.

(d) Pour tracer la droite, Inès calcule $h(0)$ et $h(0{,}5)$. Pourquoi ce choix est-il maladroit ? Propose une meilleure seconde image et donne le point obtenu.

(e) Le point $(8\,;\,9{,}5)$ est-il sur la droite de h ? Justifie par un calcul et interprète.

Ex. 28 ★★★ **Une famille de droites** — Pour tout réel k, on note $f_k(x) = (k-3)x + 2k - 4$. On note D_k la droite représentative de f_k.

(a) Pour quelle valeur de k la droite D_k est-elle horizontale ? Donne alors $f_k(x)$ et la nature de f_k.

(b) Pour quelle valeur de k la droite D_k passe-t-elle par l'origine ? Justifie et donne alors $f_k(x)$.

(c) Détermine k pour que D_k passe par $A(1\,;\,5)$, puis écris $f_k(x)$.

(d) Calcule $f_k(-2)$ en fonction de k. Que peux-tu en déduire pour toutes les droites D_k ?

(e) Zoé affirme : « Pour $k = 1$, la droite D_1 monte, car k est positif. » A-t-elle raison ? Justifie.

5. Sens de variation

À retenir : Pour $f(x) = mx + p$: si $m > 0$, f est strictement croissante ; si $m < 0$, elle est strictement décroissante et renverse l'ordre ; si $m = 0$, elle est constante. Le signe de p ou de $f(x)$ ne donne pas le sens de variation : $5 - 2x$ décroît, mais vaut 5 en 0.

Ex. 29 ★☆☆ **Le signe de m d'abord** — Chaque fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Écris-la sous la forme $mx + p$ si besoin. Donne ensuite son sens de variation en citant le théorème.

(a) $f(x) = 11 - 6x$

(b) $g(x) = 0{,}4x - 9$

(c) $h(x) = -7$

(d) $j(x) = (x+5)^2 - x^2$

(e) $q(x) = 4(x-1) - 6x$

(f) $r(x) = -\frac{x}{3} + 8$

Ex. 30 ★☆☆ **Comparer sans calculer** — Sans calculer les images, compare les deux nombres proposés. Justifie avec le sens de variation de la fonction.

(a) $f(2{,}6)$ et $f(3{,}1)$, où $f(x) = -4x + 1$.

(b) $g(-3)$ et $g(-1)$, où $g(x) = 2{,}5x - 6$.

(c) $h(-0{,}5)$ et $h(-2)$, où $h(x) = 9 - x$.

(d) $j(1{,}41)$ et $j(1{,}4)$, où $j(x) = 0{,}1x + 3$.

(e) $q(-100)$ et $q(100)$, où $q(x) = -6$.

(f) $r(0)$ et $r(3)$, où $r(x) = -\frac{2}{5}x - 1$.

Ex. 31 ★★☆ **Vrai ou faux ?** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux. Justifie par un calcul, par un contre-exemple ou en citant le théorème.

(a) « $f(x) = -3x + 12$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc $f(x) < 0$ pour tout réel x. »

(b) « L'ordonnée à l'origine de $g(x) = 7x - 20$ est négative, donc g est décroissante. »

Ex. 31 (suite)

(c) « Pour tout réel $k > 3$, la fonction $x \mapsto (3-k)x+4$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. »

(d) « Si j est affine avec $j(2)=5$ et $j(6)=-3$, alors j est strictement décroissante. »

Ex. 32 ★★☆ **La bougie qui se consume** — Une bougie se consume régulièrement. Après t heures, sa hauteur en cm est $h(t) = 18 - 0{,}75t$, pour $t \in [0\,;\,24]$.

(a) Donne le sens de variation de h sur $[0\,;\,24]$ en citant le théorème.

(b) Complète le tableau de variations de h :

t	0		24
h(t)	…	↘	…

(c) Donne la hauteur maximale et la hauteur minimale de la bougie, et précise à quel moment chacune est atteinte.

(d) Au bout de combien d'heures la bougie mesure-t-elle 6 cm ? Justifie par un calcul.

Ex. 33 ★★★ **Développer, puis démontrer** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-4)^2 - x^2$.

(a) Développe et réduis $f(x)$. Déduis-en que f est affine et donne son coefficient directeur m et son ordonnée à l'origine p.

(b) Soient u et v deux réels avec $u < v$. Calcule $f(v) - f(u)$ et écris le résultat sous forme factorisée.

(c) Déduis-en le signe de $f(v) - f(u)$, puis rédige la conclusion : quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?

(d) Résous $f(x) = 0$. Déduis-en, à l'aide du sens de variation de f, le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Dresse le tableau de variations de f sur $[-1\,;\,5]$. Donne le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.

Ex. 34 ★★★ **Une fonction qui dépend d'un paramètre** — Soit k un réel fixé. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6-2k)x - 1$.

(a) Dans le cas $k = 1$, écris $f(x)$ sous la forme $mx+p$ et donne le sens de variation de f en citant le théorème.

(b) Détermine toutes les valeurs de k pour lesquelles f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Résous l'inéquation avec soin.

(c) Pour quelle valeur de k la fonction f est-elle constante ? Donne alors la valeur de $f(x)$.

(d) On prend $k = 5$. Dresse le tableau de variations de f sur $[-2\,;\,3]$.

(e) Détermine k pour que $f(2) = 3$, puis donne le sens de variation de f dans ce cas.

Ex. 35 ★★★ **La cuve qui se vide** — Une cuve se vide à débit constant. Au départ ($t = 0$), elle contient 840 L ; au bout de 15 minutes, elle contient 615 L. On note $V(t)$ le volume d'eau, en litres, au bout de t minutes : V est une fonction affine.

(a) Calcule le coefficient directeur m de V avec son unité, puis donne l'ordonnée à l'origine p. Écris $V(t)$.

(b) Au bout de combien de minutes la cuve est-elle vide ? Déduis-en le domaine de validité du modèle.

(c) Donne le sens de variation de V en citant le théorème, puis dresse son tableau de variations sur le domaine de validité.

(d) Sans calculer les volumes, compare $V(23{,}5)$ et $V(32{,}5)$. Justifie, puis interprète la réponse dans le contexte.

(e) Ben veut qu'il reste au moins 300 L dans la cuve. Jusqu'à quel instant est-ce le cas ? Justifie.

6. *Signe de $mx+p$ et inéquations*

À retenir : $mx+p$ s'annule en $-\frac{p}{m}$: signe de m à droite, signe contraire à gauche ($-4x+8$: $+$ puis $-$ autour de 2). Diviser par un négatif change le sens. $f(x) < k$: étudie $f(x) - k$; f et g : signe de $f(x) - (g(x))$.

Ex. 36 ★☆☆ **Racine et signe en ligne** — Réponds à chaque question par un calcul court ou une phrase de justification.

(a) Donne la valeur de x qui annule $4x - 10$.

(b) Yanis affirme : « $-5x + 15$ s'annule en $x = -3$ ». A-t-il raison ? Justifie et corrige.

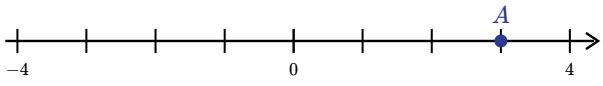
(c) Donne le signe de $-3x + 12$ pour $x > 4$.

(d) Donne le signe de $2x + 9$ pour $x < -\frac{9}{2}$.

(e) Donne le signe de la fonction constante $h(x) = -7$ selon les valeurs de x.

(f) Vrai ou faux ? Justifie : « $-x + 1$ est négatif puis positif ».

(g) Sur la droite graduée , A marque la racine de $-2x + p$. Trouve p, puis le signe de l'expression à gauche de A.



Ex. 37 ★☆☆ **Inéquations en ligne** — Donne chaque ensemble de solutions S sous forme d'intervalle.

(a) Résous $3x - 15 > 0$.

(b) Résous $-4x + 6 \geqslant 0$.

(c) Léa écrit : « $7 - 2x < 0 \iff -2x < -7 \iff x < \frac{7}{2}$ ». Repère son erreur et corrige.

(d) Pour quelles valeurs de x l'expression $\frac{1}{3}x + 2$ est-elle négative ou nulle ?

Ex. 37 (suite)

(e) Tom trouve $S = \left[-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$ pour $-6x - 9 > 0$. Repère ses deux erreurs et corrige.

(f) Avec $f(x) = 2x + 11$, résous $f(x) < 5$.

Ex. 38 ★★☆ **Tableau de signes et position de la droite** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ et C_f sa droite représentative.

(a) Calcule la valeur de x qui annule $f(x)$.

(b) Complète le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		…		$+\infty$
$f(x)$		…	0	…	

(c) Choisis une valeur test pour contrôler ton tableau.

(d) Sur quel intervalle C_f est-elle strictement au-dessus de l'axe des abscisses ?

(e) Résous l'inéquation $f(x) \geqslant -2$.

Ex. 39 ★★☆ **Deux tarifs de location de vélo** — Malik loue un vélo électrique pour une durée x (en heures), avec $0 \leqslant x \leqslant 10$. Tarif A : $f(x) = 1{,}5x + 12$; tarif B : $g(x) = 2{,}5x + 5$ (prix en euros).

(a) Écris $f(x) - g(x)$ sous la forme $mx + p$.

(b) Dresse le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $[0\,;\,10]$.

(c) Pour quelles durées le tarif A est-il strictement moins cher que le tarif B ?

(d) Malik loue le vélo 4 h. Sans calculer les prix, dis quel tarif il doit choisir, puis vérifie par un calcul.

Ex. 40 ★★★ **Démontrer la règle des signes** — Soit m et p deux réels avec $m \neq 0$, $f(x) = mx + p$ et $x_0 = -\frac{p}{m}$. On considère aussi $h(x) = -5x + 3$ et la fonction constante $c(x) = -6$.

(a) Vérifie par le calcul que $f(x_0) = 0$.

(b) On suppose $m < 0$. Cite le sens de variation de f, puis déduis-en le signe de $f(x)$ pour $x > x_0$ et pour $x < x_0$.

(c) Lucas affirme : « une expression affine est toujours négative puis positive ». Dresse le tableau de signes de $h(x)$ et dis s'il a raison. Contrôle avec un point test.

(d) Zoé affirme : « la droite représentative de c coupe l'axe des abscisses, comme toutes les droites des fonctions affines ». A-t-elle raison ? Justifie et donne le signe de $c(x)$.

(e) Résous $h(x) > -7$ à la main. Indique l'étape où le sens de l'inégalité change et pourquoi.

Ex. 41 ★★★ **Deux bougies qui se consument** — Nora allume en même temps deux bougies. La bougie A mesure 30 cm et perd 1,5 cm par heure. La bougie B mesure 24 cm et perd 0,9 cm par heure. On note t le temps écoulé, en heures, depuis l'allumage.

(a) Exprime la hauteur $a(t)$ de la bougie A et la hauteur $b(t)$ de la bougie B en fonction de t. Donne m (avec son unité) et p pour chacune.

(b) Détermine le domaine de validité de chaque modèle, c'est-à-dire l'intervalle de temps pendant lequel la bougie n'est pas entièrement consumée.

(c) Sur le domaine de validité du modèle A, étudie le signe de $a(t) - b(t)$. Déduis-en à quel moment chaque bougie est la plus haute.

(d) Nora veut que la bougie A mesure au moins 12 cm. Résous $a(t) \geqslant 12$ par le calcul et conclus.

(e) Pendant combien de temps les deux bougies mesurent-elles toutes les deux plus de 18 cm ? Donne la réponse en heures et minutes.

Ex. 42 ★★★ **Une fonction affine à paramètre** — Soit k un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - k)x + 6$. On considère aussi $g(x) = x - 6$.

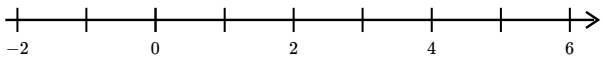
(a) Pour quelle valeur de k la fonction f est-elle constante ? Donne alors le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Détermine les valeurs de k pour lesquelles f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Justifie en citant le théorème du cours.

(c) Détermine k pour que $f(x)$ s'annule en $x = 2$.

(d) Pour la valeur de k trouvée à la question précédente, dresse le tableau de signes de $f(x)$. Contrôle avec un point test.

(e) Pour cette même valeur de k, résous $f(x) \leqslant g(x)$ en étudiant le signe de $f(x) - g(x)$, puis représente S sur la droite graduée .



7. *Modéliser une variation constante*

À retenir : p = valeur de départ, m = variation pour une unité de x, avec son unité : 9 € puis 2 € par heure donne $P(t) = 2t + 9$, pour $t \geqslant 0$. Proportionnel seulement si $p = 0$. Tableau : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ constant. Une hausse de 5 % par an n'est pas affine.

Ex. 43 ★☆☆ **Écrire et utiliser un modèle affine** — Réponds à chaque question par un calcul court, sans oublier l'unité.

(a) Un abonnement de vélo en libre-service coûte 8 € à l'inscription, puis 1,5 € par trajet. Écris le prix $P(x)$, en €, pour x trajets.

Ex. 43 (suite)

(b) Une bougie mesure 18 cm et raccourcit de 1,2 cm par heure. Sa hauteur après t heures est $h(t) = mt + p$. Donne m et p avec leurs unités.

(c) Un réservoir contient 60 L et se vide de 4 L par minute : $V(t) = -4t + 60$. Sur quel intervalle de temps ce modèle a-t-il un sens ?

(d) Au pied d'une montagne, il fait 14 °C, et la température baisse de 6,5 °C par km d'altitude. Calcule la température à 2,4 km d'altitude.

(e) Un taxi facture $P(d) = 1{,}8d + 3{,}2$ euros pour d km. Quelle distance a-t-on parcourue pour 25,70 € ?

(f) Un cybercafé facture 0,15 € par page imprimée, sans frais fixes. Écris le prix $P(x)$ pour x pages. Est-ce une fonction linéaire ? Justifie.

Ex. 44 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les modèles** — Vrai ou faux ? Justifie par un calcul ou un argument.

(a) On place 2 500 € sur un livret qui rapporte 4 % par an. Le capital est une fonction affine du nombre d'années.

(b) Une trottinette se loue 1 € pour le déverrouillage, puis 0,25 € par minute. 20 minutes coûtent le double de 10 minutes.

(c) Si $y = -3x + 40$, alors y diminue de 3 chaque fois que x augmente de 1.

(d) Un forfait téléphonique coûte 15 € par mois, plus 0,05 € par SMS. Le coefficient directeur du prix mensuel est $m = 15$.

(e) Un plombier facture 45 € de déplacement, puis 38 € par heure. Pour 2 h 30 de travail, il demande 132,40 €.

(f) Une plante pousse à vitesse constante. Elle mesure 12 cm le premier jour et 15,5 cm cinq jours plus tard. Elle pousse donc de 0,7 cm par jour.

Ex. 45 ★★☆ **La cuve de récupération d'eau** — Lucas ouvre le robinet d'une cuve d'eau de pluie et relève le volume restant $V(t)$, en litres, après t minutes.

t (min)	0	4	10	15
V(t) (L)	245	217	175	140

(a) Calcule le quotient $\frac{\text{variation de } V}{\text{variation de } t}$ entre les colonnes successives. Que peux-tu conclure ?

(b) Donne m et p avec leurs unités, puis l'expression de $V(t)$.

(c) Calcule le volume d'eau restant au bout de 25 minutes.

(d) Au bout de combien de temps la cuve est-elle vide ? Donne l'intervalle sur lequel le modèle a un sens.

(e) Lucas referme le robinet quand il reste 101,5 L dans la cuve. Au bout de combien de temps l'a-t-il refermé ? Donne la réponse en minutes et secondes.

Ex. 46 ★★☆ **Deux tarifs de vélo électrique** — Nora veut louer un vélo électrique pour t heures, avec $t \geqslant 0$.
Tarif A : 6 € par heure.
Tarif B : 15 € d'adhésion, puis 3,50 € par heure.

(a) Exprime le prix $A(t)$ du tarif A et le prix $B(t)$ du tarif B, en euros. Lequel est proportionnel à la durée ?

(b) Calcule le prix de chaque tarif pour une location de 4 h 30.

(c) Résous l'inéquation $B(t) < A(t)$. Conclus : à partir de quelle durée le tarif B est-il plus avantageux ?

(d) Mila dispose de 40 €. Avec quel tarif peut-elle rouler le plus longtemps ? Justifie.

Ex. 47 ★★★ **Deux bougies allumées ensemble** — Ben allume deux bougies à 19 h 00. Elles se consument à vitesse constante. La bougie A mesure 24 cm et perd 2 cm par heure. La bougie B mesure 18 cm à 19 h 00 et 15,8 cm à 21 h 45. On note $h_A(t)$ et $h_B(t)$ les hauteurs, en cm, des bougies après t heures.

(a) Détermine l'expression de $h_B(t)$. Donne m avec son unité.

(b) Exprime $h_A(t)$. Pour chaque bougie, donne l'intervalle de t sur lequel le modèle a un sens.

(c) Au bout de combien de temps les deux bougies ont-elles la même hauteur ? Quelle est cette hauteur ?

(d) Résous l'inéquation $h_A(t) < h_B(t)$ sur l'intervalle où les deux modèles ont un sens. Conclus par une phrase.

(e) À quelle heure la bougie B mesure-t-elle 3 cm de plus que la bougie A ? Donne l'heure en heures et minutes.

Ex. 48 ★★★ **Taxi, VTC : quel tarif choisir ?** — Pour un trajet de x km, avec $x \in [0\,;\,15]$, Inès compare trois offres. Taxi Alpha : 4,50 € de prise en charge, puis 1,20 € par km. Taxi Bêta : 2,10 € par km, sans prise en charge. VTC : forfait de 18 € pour tout trajet de 15 km au plus. On note $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ les prix, en euros.

(a) Exprime $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$. Laquelle de ces fonctions est linéaire ? Laquelle est constante ?

(b) Inès affirme : « Avec Alpha comme avec Bêta, 10 km coûtent deux fois plus cher que 5 km. » A-t-elle raison ? Justifie par un calcul.

(c) Résous l'inéquation $A(x) < B(x)$ sur $[0\,;\,15]$. Conclus par une phrase.

(d) À partir de quelle distance le VTC est-il moins cher que le taxi Alpha ? Justifie par une inéquation.

(e) Résume en une phrase l'offre la moins chère selon la distance x. Vérifie avec $x = 3$ et $x = 12$.

Ex. 49 ★★★ **La pousse de deux plantes** — Yanis mesure deux jeunes plantes, en cm, j jours après leur mise en terre. Plante Q :

j	**3**	**7**	**12**	**20**
$h_Q(j)$	6,8	9,2	12,2	17

Plante R :

j	**3**	**7**	**12**	**20**
$h_R(j)$	4	6	9	13

(a) Calcule le quotient $\frac{\text{variation de } h_Q}{\text{variation de } j}$ entre les colonnes successives. Qu'en déduis-tu ? Donne m avec son unité.

(b) Détermine l'ordonnée à l'origine p, puis $h_Q(j)$. Que représente p pour la plante ?

(c) La hauteur de la plante R est-elle une fonction affine de j ? Justifie.

(d) Montre que, pour tout j, $h_Q(j+10) - h_Q(j) = 6$. Déduis-en, sans calculer d'image, de combien la plante Q pousse entre le jour 15 et le jour 35.

(e) Le modèle reste valable tant que la plante Q mesure au plus 35 cm. Donne l'intervalle de validité de j, puis la hauteur de la plante au bout de 4 semaines.