1. Rappels de 3e : fonctions linéaires et affines

Ex. 1 ★☆☆ **Automatisme : reconnaître et lire m et p**

(a) $f(x) = -6x + 4$: la fonction est affine, avec $m = -6$ (le nombre qui multiplie x, avec son signe) et $p = 4$. Elle n'est ni linéaire ni constante.

(b) $g(x) = \frac{2}{5}x$: $m = \frac{2}{5}$ et $p = 0$. La fonction est linéaire.

(c) $h(x) = 3x + 6 - 3x = 6$: $m = 0$ et $p = 6$. La fonction est constante.

(d) $k(x) = x^2 + 3x + x + 3 - x^2 = 4x + 3$: la fonction est affine, avec $m = 4$ et $p = 3$. Elle n'est ni linéaire ni constante.

(e) $u(x) = x^2 - 4x$: il reste un terme en x^2, donc u n'est pas affine.

(f) $v(x) = 7x - 2x - 3 = 5x - 3$: la fonction est affine, avec $m = 5$ et $p = -3$. Elle n'est ni linéaire ni constante.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatisme : image, antécédent, point de la courbe**

(a) $f(-2) = -4 \times (-2) + 9 = 8 + 9 = 17$.

(b) $f(-0{,}5) = -4 \times (-0{,}5) + 9 = 2 + 9 = 11$.

(c) Je résous $-4x + 9 = 1 \iff -4x = -8 \iff x = 2$. L'antécédent de 1 est 2.

(d) Je résous $-4x + 9 = -3 \iff -4x = -12 \iff x = 3$. L'antécédent de -3 est 3. Calculer $f(-3) = 21$ donnerait l'image de -3, pas son antécédent.

(e) 1,5 est l'antécédent et 3 est l'image. Vérification : $f(1{,}5) = -4 \times 1{,}5 + 9 = -6 + 9 = 3$.

(f) $f(-1) = -4 \times (-1) + 9 = 13$. Or l'ordonnée de A est 12, et $13 \neq 12$.
Donc A n'appartient pas à C_f.

Ex. 3 ★★☆ **Les cerises du marché**

(a) Le prix est proportionnel à la masse, donc $P(x) = ax$ et P est linéaire. De $P(2{,}5) = 15$, je tire $a = \frac{15}{2{,}5} = 6$.
Donc $P(x) = 6x$: le coefficient 6 est le prix unitaire, 6 € par kg.

(b) $P(0) = 6 \times 0 = 0$: 0 kg de cerises coûte 0 €. L'image de 0 par une fonction linéaire est toujours 0.

Ex. 3 (suite)

(c) Augmenter de 15 % revient à multiplier par 1,15.
Donc $Q(x) = 1{,}15 \times 6x = 6{,}9x$. La fonction Q est encore linéaire, de coefficient 6,9 € par kg.

(d) Je résous $6{,}9x = 20{,}70 \iff x = \frac{20{,}70}{6{,}9} = 3$. Noé peut acheter 3 kg de cerises.

Ex. 4 ★★☆ **Deux loueurs de trottinettes**

(a) Pour A : $\frac{3{,}5}{1} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4} = 3{,}5$, donc c'est un tableau de proportionnalité, de coefficient 3,5 € par heure. Pour B : $\frac{6}{1} = 6$ mais $\frac{8}{2} = 4$, donc ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

(b) De 2 h à 4 h, le prix passe de 8 € à 12 € : $\frac{12-8}{4-2} = 2$ € par heure. De 1 h à 2 h, le prix augmente aussi de 2 €.
Donc $g(x) = 2x + p$ avec $g(1) = 6$, d'où $p = 6 - 2 \times 1 = 4$. Ainsi $g(x) = 2x + 4$. Vérification : $g(4) = 2 \times 4 + 4 = 12$.

(c) $g(x) = 2x + 4$: $x \mapsto 2x$ est linéaire, c'est le prix de la location à 2 € par heure. 4 est une constante : ce sont les frais fixes de 4 €, payés quelle que soit la durée.

(d) Je résous $3{,}5x = 2x + 4 \iff 1{,}5x = 4 \iff x = \frac{8}{3}$.
Comme $\frac{8}{3}$ h = 2 h + $\frac{2}{3}$ h, les deux loueurs font payer le même prix pour 2 h 40 min de location.

Ex. 5 ★★★ **Vrai ou faux : linéaire, affine, paramètre**

(a) f est linéaire, donc $f(x) = mx$. Avec $f(6) = -9$: $6m = -9$, d'où $m = \frac{-9}{6} = -1{,}5$. Alors $f(-4) = -1{,}5 \times (-4) = 6$. L'affirmation est vraie.

(b) L'affirmation est fausse. Contre-exemple : $h(x) = x + 3$ est affine et $h(5) = 5 + 3 = 8$, mais $h(10) = 10 + 3 = 13 \neq 16$. Doubler x double l'image seulement si la fonction est linéaire, et ici rien ne l'impose.

(c) w est linéaire si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle : $k^2 - 9 = 0 \iff k^2 = 9 \iff k = 3$ ou $k = -3$. Pour $k = 3$: $w(x) = 4x$. Pour $k = -3$: $w(x) = -2x$. Il y a deux valeurs de k, donc l'affirmation est fausse.

(d) $v(x) = mx + p$. Dans $v(3) = 7$, 3 est l'antécédent et 7 l'image. $m = \frac{v(7)-v(3)}{7-3} = \frac{3-7}{4} = -1$. Avec $v(3) = 7$: $-1 \times 3 + p = 7$, donc $p = 10$. Contrôle : $v(7) = -1 \times 7 + 10 = 3$.
Donc $v(0) = p = 10$: l'affirmation est vraie.

Ex. 6 ★★★ **Ramettes de papier et livraison**

(a) Augmenter de 20 % revient à multiplier par 1,2. Une ramette coûte donc $4{,}5 \times 1{,}2 = 5{,}4$ € TTC. Le prix de x ramettes est $T(x) = 5{,}4x$: il est proportionnel à x. T est donc linéaire, de coefficient 5,4 (prix d'une ramette en € TTC).

(b) $C(x) = 5{,}4x + 6$. C'est une fonction affine ($m = 5{,}4$ et $p = 6$) : une fonction linéaire plus une constante. Elle n'est pas linéaire, car $C(0) = 5{,}4 \times 0 + 6 = 6 \neq 0$.

(c) On résout $C(x) = 87$: $5{,}4x + 6 = 87 \iff 5{,}4x = 81 \iff x = \frac{81}{5{,}4} = 15$. Mia a commandé 15 ramettes.

(d) Pour 15 ramettes : $\frac{87}{15} = 5{,}8$ € par ramette. Pour 30 ramettes : $C(30) = 5{,}4 \times 30 + 6 = 168$, et $\frac{168}{30} = 5{,}6$ € par ramette. Les prix moyens sont différents : le coût total n'est pas proportionnel à x. Les 6 € de livraison sont partagés entre plus de ramettes quand on en commande davantage.

Ex. 7 ★★★ **La bougie qui se consume**

(a) $\frac{21}{1} = 21$ et $\frac{15}{3} = 5$: les quotients $\frac{h(t)}{t}$ ne sont pas égaux. Ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité, et h n'est pas linéaire.

(b) $\frac{15-21}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3$ et $\frac{6-12}{6-4} = \frac{-6}{2} = -3$. Les taux sont égaux : on conjecture que h est affine, de coefficient directeur -3.

(c) $m = -3$. Avec $h(1) = 21$: $-3 \times 1 + p = 21$, donc $p = 24$. Contrôle : $h(6) = -3 \times 6 + 24 = 6$, c'est bien la valeur du tableau.
Donc $h(t) = -3t + 24$. La bougie mesurait 24 cm à l'allumage, et elle perd 3 cm par heure.

(d) On résout $h(t) = 0$: $-3t + 24 = 0 \iff t = 8$. La bougie est entièrement consumée au bout de 8 h. Le modèle a un sens pour $t \in [0\,;\,8]$.

(e) On résout $h(t) = 13{,}5$: $-3t + 24 = 13{,}5 \iff -3t = -10{,}5 \iff t = 3{,}5$. La bougie mesure 13,5 cm au bout de 3 h 30 min.

2. *Reconnaître une fonction affine, image et antécédent*

Ex. 8 ★☆☆ **Affine ou pas ? Lire m et p**

(a) $f_1(x) = -3x + 4$: affine, $m = -3$ (le nombre qui multiplie x, avec son signe) et $p = 4$.

(b) $f_2(x) = \frac{1}{5}x$: linéaire (donc affine), $m = \frac{1}{5}$ et $p = 0$.

(c) $f_3(x) = 0 \times x - 7$: constante (donc affine), $m = 0$ et $p = -7$.

Ex. 8 (suite)

(d) $f_4(x) = 3x - 6 + 2x = 5x - 6$: affine, $m = 5$ et $p = -6$.

(e) $f_5(x) = x^2 + 3x$: il y a un terme en x^2, donc f_5 n'est pas affine.

(f) x est au dénominateur : f_6 n'est pas affine.

(g) $f_7(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$: affine, $m = 4$ et $p = 4$.

Ex. 9 ★★☆ **Image, antécédent, point de la courbe**

(a) $f(-3) = -4 \times (-3) + 9 = 12 + 9 = 21$.

(b) $f\left(\frac{3}{4}\right) = -4 \times \frac{3}{4} + 9 = -3 + 9 = 6$.

(c) $-4x + 9 = 1 \iff -4x = -8 \iff x = 2$.
L'antécédent de 1 est 2.

(d) $-4x + 9 = 15 \iff -4x = 6 \iff x = -\frac{3}{2}$.
L'antécédent de 15 est $-\frac{3}{2}$.

(e) $f(2{,}5) = -4 \times 2{,}5 + 9 = -10 + 9 = -1$: c'est l'ordonnée de A, donc $A \in C_f$.

(f) $f(-1) = -4 \times (-1) + 9 = 13 \neq 12$, donc $B \notin C_f$.

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur les fonctions affines**

(a) Faux. Je développe : $2x^2 - 2x - 2x^2 = -2x$. La fonction est linéaire ($m = -2$, $p = 0$), donc affine.

(b) Faux. $h(x) = -5x + 2$: $m = -5$ (le nombre qui multiplie x, avec son signe) et $p = 2$.

(c) Faux. $v(x) = \frac{x}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4}x - 2$: $m = \frac{1}{4}$ mais $p = -2$.

(d) Faux. Pour tout réel x, $c(x) = 4$: tous les réels sont des antécédents de 4 (et 1, par exemple, n'en a aucun).

(e) Vrai. $m = 0{,}5 \neq 0$, donc l'équation $0{,}5x - 3 = k$ a une seule solution. Pour $k = 1$: $0{,}5x = 4 \iff x = 8$.

Ex. 11 ★★☆ **L'erreur de Lina**

(a) 1re erreur : elle a mal développé, car $3 \times (-2x) = -6x$ et non $-2x$. 2e erreur : m est le nombre qui multiplie x, et non le premier nombre écrit. Elle a inversé m et p.

(b) $f(x) = 3 - 6x + 8x = 2x + 3$, donc $m = 2$ et $p = 3$.

(c) $2x + 3 = -4 \iff 2x = -7 \iff x = -\frac{7}{2}$.
L'antécédent de -4 est $-\frac{7}{2}$.

(d) Non. $f(4) = 2 \times 4 + 3 = 11$ et $f(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$, mais $2 \times 7 = 14 \neq 11$. f est affine, mais pas linéaire ($p \neq 0$) : doubler x ne double pas $f(x)$.

Ex. 12 ★★☆ **Degrés Celsius et degrés Fahrenheit**

(a) $f(10) = 1{,}8 \times 10 + 32 = 50$ et $f(20) = 1{,}8 \times 20 + 32 = 68 \neq 2 \times 50$. Clara a tort : f est affine mais pas linéaire ($p = 32 \neq 0$), il n'y a pas proportionnalité.

(b) $f(37) = 1{,}8 \times 37 + 32 = 66{,}6 + 32 = 98{,}6$. 37 °C correspondent à 98,6 °F.

(c) $1{,}8x + 32 = 212 \iff 1{,}8x = 180 \iff x = \frac{180}{1{,}8} = 100$. L'eau bout à 100 °C.

(d) $f(-15) = 1{,}8 \times (-15) + 32 = -27 + 32 = 5$, qui est l'ordonnée de A.
Donc $A \in C_f$: −15 °C correspondent à 5 °F.

(e) On cherche x tel que $f(x) = x$: $1{,}8x + 32 = x \iff 0{,}8x = -32 \iff x = -40$. Oui : −40 °C = −40 °F.

Ex. 13 ★★★ **Une famille de fonctions affines**

(a) f_k est constante si et seulement si son coefficient directeur est nul : $2 - k = 0 \iff k = 2$. Alors $f_2(x) = 0 \times x + 2 \times 2 - 10 = -6$. Pour $k = 2$, f_2 est la fonction constante égale à -6.

(b) f_k est linéaire si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle : $2k - 10 = 0 \iff k = 5$. Alors $f_5(x) = (2 - 5)x + 0 = -3x$. Pour $k = 5$, $f_5(x) = -3x$ est linéaire.

(c) $f_k(2) = (2 - k) \times 2 + 2k - 10 = 4 - 2k + 2k - 10 = -6$. Donc, quel que soit k, $f_k(2) = -6 \neq 4$. Aucune valeur de k ne convient : A n'est sur aucune droite C_k (elles passent toutes par le point $(2\,;\,-6)$).

(d) $f_k(3) = (2 - k) \times 3 + 2k - 10 = 6 - 3k + 2k - 10 = -k - 4$. $B \in C_k \iff f_k(3) = 1 \iff -k - 4 = 1 \iff k = -5$. Pour $k = -5$: $f_{-5}(x) = (2 - (-5))x + 2 \times (-5) - 10 = 7x - 20$, et on vérifie que $f_{-5}(3) = 21 - 20 = 1$.

(e) $f_7(x) = (2 - 7)x + 2 \times 7 - 10 = -5x + 4$, donc $m = -5$ et $p = 4$. $-5x + 4 = 0 \iff -5x = -4 \iff x = \frac{4}{5} = 0{,}8$. L'antécédent de 0 par f_7 est 0,8.

Ex. 14 ★★★ **Des carrés… et pourtant affine ?**

(a) $g(x) = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 2x + 1) = x^2 + 6x + 9 - x^2 + 2x - 1 = 8x + 8$. Après développement, $g(x)$ s'écrit $mx + p$ avec $m = 8$ et $p = 8$: g est affine.

(b) Non. Il est vrai que $g(-1) = 8 \times (-1) + 8 = 0$, mais une fonction linéaire vérifie $g(0) = 0$, c'est-à-dire $p = 0$. Or $g(0) = 8 \times 0 + 8 = 8 \neq 0$: g n'est pas linéaire, et Ben a tort.

(c) $8x + 8 = -10 \iff 8x = -18 \iff x = -\frac{18}{8} = -\frac{9}{4}$. L'antécédent de -10 par g est $-2{,}25$.

Ex. 14 (suite)

(d) $g(-1{,}25) = 8 \times (-1{,}25) + 8 = -10 + 8 = -2$, qui est bien l'ordonnée de B.
Donc B appartient à C_g.

(e) $t(0) = 0$, $t(1) = 1 \times 6 = 6$, $t(2) = 2 \times 7 = 14$. Si t était affine, on aurait $p = t(0) = 0$, puis $m \times 1 + 0 = 6$, donc $m = 6$ et $t(2) = 6 \times 2 = 12$. Or $t(2) = 14 \neq 12$: t n'est pas affine (d'ailleurs $t(x) = x^2 + 5x$).

3. *Coefficient directeur, taux d'accroissement : déterminer une fonction affine*

Ex. 15 ★★★ **Trouver le coefficient directeur**

(a) $m = \frac{17-5}{4-1} = \frac{12}{3} = 4$.

(b) $m = \frac{-8-7}{3-(-2)} = \frac{-15}{5} = -3$
(même ordre en haut et en bas).

(c) $g(9) - g(1) = m \times (9 - 1) = 8m$, donc $8m = 20$ et $m = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$.

(d) $h(x + 1) - h(x) = m \times (x + 1 - x) = m$, donc $m = -6$.

(e) $6m = -10$, donc $m = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$
(on laisse la fraction, pas −1,67).

(f) $q(5) - q(2) = 3 \times (5 - 2) = 9$.

Ex. 16 ★★☆ **Retrouver f avec m et une image**

(a) $p = f(2) - 4 \times 2 = 3 - 8 = -5$, donc $f(x) = 4x - 5$.

(b) $p = 11 - (-2) \times (-3) = 11 - 6 = 5$, donc $g(x) = -2x + 5$.

(c) $m = -5$ et $p = -5 - (-5) \times 1 = 0$, donc $h(x) = -5x$: h est linéaire.

(d) $p = 2 - \frac{3}{4} \times 8 = 2 - 6 = -4$, donc $k(x) = \frac{3}{4}x - 4$.

(e) $m = 0$ et $p = 7 - 0 \times 4 = 7$, donc $r(x) = 7$: r est constante.

(f) $s(5) - s(1) = 4m = -2$, donc $m = -\frac{1}{2}$. Puis $p = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{7}{2}$.
Donc $s(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Ex. 17 ★★☆ **Repérer l'erreur et retrouver f**

(a) Non : Inès met $f(3) - f(-1)$ en haut mais $(-1) - 3$ en bas. L'ordre est mélangé, elle obtient $-m$. Le bon calcul : $m = \frac{-2-6}{3-(-1)} = \frac{-8}{4} = -2$.

(b) Théo divise l'écart des x par l'écart des images. C'est l'inverse de la règle : m = écart des images ÷ écart des x. Il obtient $\frac{1}{m}$ au lieu de $m = -2$.

Ex. 17 (suite)

(c) $p = f(-1) - m \times (-1) = 6 - (-2) \times (-1) = 6 - 2 = 4$. Donc $f(x) = -2x + 4$.

(d) $f(3) = -2 \times 3 + 4 = -2$: on retrouve bien l'image donnée, donc l'expression est juste.

(e) $f(x+3) - f(x) = 3m = 3 \times (-2) = -6$. Quand x augmente de 3, $f(x)$ diminue de 6, quel que soit le x de départ.

Ex. 18 ★★☆ Taux d'accroissement : affine ou pas ?

(a) $f(u) - f(v) = (mu + p) - (mv + p) = mu + p - mv - p = mu - mv = m(u - v)$. Pour $u \neq v$, le taux $\frac{f(u)-f(v)}{u-v}$ vaut donc toujours m.

(b) Entre 0 et 2 : $\frac{7-1}{2-0} = 3$. Entre 2 et 5 : $\frac{16-7}{5-2} = 3$. Entre 5 et 9 : $\frac{28-16}{9-5} = 3$.

(c) Oui : le taux vaut toujours 3. On prend $m = 3$ et $p = g(0) = 1$, donc $g(x) = 3x + 1$. Vérification : $3 \times 9 + 1 = 28$. C'est bien $g(9)$.

(d) Non. Entre 0 et 2 : $\frac{0-4}{2} = -2$. Entre 2 et 5 : $\frac{-6-0}{3} = -2$. Mais entre 5 et 9 : $\frac{-13-(-6)}{4} = -\frac{7}{4}$. Le taux change, or celui d'une fonction affine vaut toujours m.
Donc h n'est pas affine.

Ex. 19 ★★★ Accroissements proportionnels : démontrer puis exploiter

(a) $f(x+1) - f(x) = mx + m + p - mx - p = m$. Donc, quand x augmente de 1, $f(x)$ varie toujours de m, quel que soit x.

(b) D'après la propriété des accroissements proportionnels, $f(7) - f(2) = m(7 - 2) = 5m$.
Donc $5m = -4$ et $m = -\frac{4}{5}$.

(c) D'après la propriété des accroissements proportionnels, $f(x+10) - f(x) = m \times 10 = 10 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -8$. Quand x augmente de 10, $f(x)$ diminue de 8, quel que soit le point de départ.

(d) $p = f(2) - m \times 2 = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right) \times 2 = 1 + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$.
Donc $f(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$. Contrôle :
$f(7) = -\frac{28}{5} + \frac{13}{5} = -3$, et $f(7) - f(2) = -3 - 1 = -4$.
C'est bien vérifié.

Ex. 20 ★★★ La bougie qui se consume

(a) Le calcul est faux : Lou a divisé l'écart des temps par l'écart des hauteurs. Il faut faire l'écart des images divisé par l'écart des t : $m = \frac{14-19}{90-40} = \frac{-5}{50} = -0{,}1$. La bougie perd 0,1 cm par minute, donc $m = -0{,}1$ cm/min.

Ex. 20 (suite)

(b) $p = h(40) - m \times 40 = 19 - (-0{,}1) \times 40 = 19 + 4 = 23$. Donc $h(t) = -0{,}1t + 23$. Contrôle :
$h(90) = -9 + 23 = 14$. C'est bien vérifié. $p = h(0) = 23$: c'est la hauteur de la bougie à l'allumage, 23 cm.

(c) $h(t) = 0 \iff -0{,}1t + 23 = 0 \iff t = \frac{23}{0{,}1} = 230$. La bougie est entièrement consumée au bout de 230 min (3 h 50 min). Le modèle est valable pour $t \in [0\,;\,230]$.

(d) $-0{,}1t + 23 < 5 \iff -0{,}1t < -18 \iff t > 180$. On a divisé par $-0{,}1$, un nombre négatif, donc le sens de l'inégalité change. Sur le domaine, $S =]180\,;\,230]$: la bougie mesure moins de 5 cm après 180 min (3 h) et jusqu'à ce qu'elle soit entièrement consumée.

Ex. 21 ★★★ Images négatives et coefficient fractionnaire

(a) $m = \frac{f(6)-f(-3)}{6-(-3)} = \frac{-1-(-7)}{6+3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. On garde l'ordre 6 puis -3 en haut et en bas.

(b) $p = f(-3) - m \times (-3) = -7 - \frac{2}{3} \times (-3) = -7 + 2 = -5$.
Donc $f(x) = \frac{2}{3}x - 5$. Contrôle : $f(6) = \frac{2}{3} \times 6 - 5 = 4 - 5 = -1$. C'est bien vérifié.

(c) D'après la propriété des accroissements proportionnels, quand x augmente de d, $f(x)$ augmente de $\frac{2}{3}d$.
Donc $\frac{2}{3}d = 10$ et $d = 10 \times \frac{3}{2} = 15$. Ainsi $f(6 + 15) = -1 + 10 = 9$: l'antécédent de 9 par f est 21.

(d) Faux. Entre -3 et 3, le taux d'accroissement de g vaut $\frac{-2-(-7)}{3-(-3)} = \frac{5}{6}$. Entre 3 et 6, il vaut $\frac{-1-(-2)}{6-3} = \frac{1}{3}$. Le taux change, donc g n'est pas affine et ne peut pas être égale à f. D'ailleurs, $f(3) = 2 - 5 = -3 \neq g(3)$.

4. *La droite représentative : points, lire m et p*

Ex. 22 ★☆☆ Lire m et p avec deux points

(a) $p = 3$; $m = \frac{7-3}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$; $f(x) = 2x + 3$.

(b) $p = 5$; $m = \frac{-1-5}{3-0} = \frac{-6}{3} = -2$ (la droite descend) ; $f(x) = -2x + 5$.

(c) $p = 0$; $m = \frac{6-0}{4-0} = 1{,}5$; $f(x) = 1{,}5x$: la fonction est linéaire, sa droite passe par l'origine.

(d) $p = -2$; $m = \frac{-2-(-2)}{5-0} = 0$; $f(x) = -2$: la fonction est constante, sa droite est horizontale.

(e) $p = -1$ (c'est le point situé sur l'axe des ordonnées) ; $m = \frac{-1-1}{0-(-4)} = \frac{-2}{4} = -0{,}5$; $f(x) = -0{,}5x - 1$.

(f) $p = -3$; $m = \frac{1-(-3)}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$.

Ex. 23 ★☆☆ **Où la droite coupe-t-elle les axes ?**

(a) Axe des ordonnées : $(0\,;\,6)$ car $p = 6$. Axe des abscisses : $-3x + 6 = 0$ donne $x = 2$, d'où le point $(2\,;\,0)$.

(b) Axe des ordonnées : $(0\,;\,2)$. Axe des abscisses : $4x + 2 = 0$ donne $x = -\frac{2}{4} = -0{,}5$, d'où le point $(-0{,}5\,;\,0)$.

(c) Axe des ordonnées : $(0\,;\,-2)$. Axe des abscisses : $0{,}4x - 2 = 0$ donne $x = \frac{2}{0{,}4} = 5$, d'où le point $(5\,;\,0)$.

(d) Axe des ordonnées : $(0\,;\,-5)$. Axe des abscisses : $-2x - 5 = 0$ donne $x = -2{,}5$, d'où le point $(-2{,}5\,;\,0)$.

(e) Les deux points sont l'origine $(0\,;\,0)$, car l est linéaire. Il faut un second point pour tracer la droite, par exemple $(1\,;\,7)$.

(f) Axe des ordonnées : $(0\,;\,3)$. La fonction est constante : sa droite est horizontale et ne coupe pas l'axe des abscisses. Pour la tracer, on prend un autre point, par exemple $(2\,;\,3)$.

Ex. 24 ★★☆ **Lire une droite sur un nuage de points**

(a) La droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;\,-3)$, donc $p = -3$.

(b) De $(0\,;\,-3)$ à $(2\,;\,2)$, on avance de 2 et on monte de 5 : $m = \frac{5}{2} = 2{,}5$. Le coefficient est positif car la droite monte. Contrôle avec $(4\,;\,7)$: $2{,}5 \times 4 - 3 = 7$.

(c) $f(x) = 2{,}5x - 3$.

(d) $2{,}5x - 3 = 0$ donne $x = \frac{3}{2{,}5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$. Le point est $(1{,}2\,;\,0)$. Ce n'est pas un point du nuage : il fallait le calculer.

(e) $f(10) = 2{,}5 \times 10 - 3 = 22$. C'est bien l'ordonnée de A, donc A appartient à la droite.

Ex. 25 ★★☆ **Quatre séries de points**

(a) Ligne B : tous les points ont la même ordonnée 4, ils sont sur une droite horizontale. La fonction est $x \mapsto 4$.

(b) De 2 en 2 sur x, l'ordonnée augmente toujours de 3 : les points sont alignés et $m = \frac{3}{2} = 1{,}5$. La droite passe par $(0\,;\,0)$, donc $p = 0$. La fonction linéaire est $x \mapsto 1{,}5x$.

(c) De 2 en 2 sur x, les écarts verticaux valent $5 - 7 = -2$, puis $2 - 5 = -3$ et $-1 - 2 = -3$. Ils ne sont pas constants, donc les points ne sont pas alignés.

(d) De 2 en 2 sur x, l'ordonnée diminue toujours de 1 : $m = \frac{-1}{2} = -0{,}5$. Le point $(0\,;\,5)$ donne $p = 5$. On obtient $f(x) = -0{,}5x + 5$.

Ex. 25 (suite)

(e) Non. 5 est l'ordonnée à l'origine, qui se lit sur l'axe des ordonnées. Sur l'axe des abscisses, $-0{,}5x + 5 = 0$ donne $x = 10$: la droite coupe cet axe au point $(10\,;\,0)$.

Ex. 26 ★★★ **Corriger la lecture de Malik**

(a) $3{,}5 - 5 = 2 - 3{,}5 = 0{,}5 - 2 = -1 - 0{,}5 = -2{,}5 - (-1) = -1{,}5$. Quand x augmente de 1, y varie toujours de $-1{,}5$. Les accroissements de y sont donc proportionnels à ceux de x : les points sont sur la droite d'une fonction affine f.

(b) Malik a inversé le quotient : $m = \frac{\text{écart vertical}}{\text{écart horizontal}} = \frac{-1-5}{4-0} = \frac{-6}{4} = -1{,}5$. On trouve bien $m < 0$, car la droite descend. Il a aussi lu p sur le mauvais axe : p se lit sur l'axe des ordonnées, au point $(0\,;\,5)$, donc $p = 5$. Conclusion : $f(x) = -1{,}5x + 5$.

(c) On résout $-1{,}5x + 5 = 0$, soit $x = \frac{5}{1{,}5} = \frac{10}{3}$. La droite coupe l'axe des abscisses au point $\left(\frac{10}{3}\,;\,0\right)$. Ce nombre est différent de $p = 5$.

(d) $f(-7) = -1{,}5 \times (-7) + 5 = 10{,}5 + 5 = 15{,}5$. Or $15{,}5 \neq 15{,}4$, donc B n'est pas sur la droite. Un écart de 0,1 ne se voit pas sur une figure : seul le calcul permet de conclure.

Ex. 27 ★★★ **La bougie d'Inès**

(a) $m = \frac{h(5)-h(2)}{5-2} = \frac{15-21}{3} = -2$, soit -2 cm/h. Comme $m < 0$, la bougie perd 2 cm par heure : la droite descend.

(b) $h(t) = -2t + p$ et $h(2) = 21$, donc $-2 \times 2 + p = 21$, d'où $p = 25$. On a donc $h(t) = -2t + 25$. Vérification : $h(5) = -10 + 25 = 15$. Interprétation : $p = h(0) = 25$, la bougie mesurait 25 cm à l'allumage.

(c) On résout $-2t + 25 = 0$, soit $t = 12{,}5$. La droite coupe l'axe des abscisses en $(12{,}5\,;\,0)$: la bougie est entièrement consumée au bout de 12 h 30 min. Le modèle est donc valable pour $t \in [0\,;\,12{,}5]$.

(d) $h(0{,}5) = -2 \times 0{,}5 + 25 = 24$. Les points $(0\,;\,25)$ et $(0{,}5\,;\,24)$ sont trop proches : la moindre imprécision fausse le tracé. Il vaut mieux prendre une image éloignée, par exemple $h(10) = -2 \times 10 + 25 = 5$, ce qui donne le point $(10\,;\,5)$.

(e) $h(8) = -2 \times 8 + 25 = 9$. Or $9 \neq 9{,}5$, donc le point n'est pas sur la droite. Au bout de 8 h, la bougie mesure 9 cm, et non 9,5 cm.

Ex. 28 ★★★ **Une famille de droites**

(a) La droite est horizontale lorsque le coefficient directeur est nul : $k-3=0$, soit $k=3$. On a alors $f_3(x)=0\times x+2\times 3-4=2$: f_3 est la fonction constante égale à 2.

(b) La droite passe par l'origine lorsque l'ordonnée à l'origine est nulle : $2k-4=0$, soit $k=2$. On a alors $f_2(x)=(2-3)x+0=-x$: f_2 est une fonction linéaire.

(c) $f_k(1)=(k-3)\times 1+2k-4=3k-7$. On veut $3k-7=5$, soit $k=4$. On a alors $f_4(x)=x+4$. Vérification : $f_4(1)=5$.

(d) $f_k(-2)=(k-3)\times(-2)+2k-4=-2k+6+2k-4=2$. Ce résultat ne dépend pas de k : toutes les droites D_k passent par le point $(-2\,;\,2)$.

(e) Pour $k=1$, on a $f_1(x)=(1-3)x+2\times 1-4=-2x-2$. Le coefficient directeur vaut $m=-2<0$, donc la droite D_1 descend. Zoé a tort : c'est le signe du coefficient directeur $k-3$ qui compte, pas celui de k.

5. *Sens de variation*

Ex. 29 ★☆☆ **Le signe de m d'abord**

(a) $f(x)=-6x+11$. f est affine de coefficient directeur $m=-6<0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

(b) $m=0{,}4>0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le signe de $p=-9$ ne compte pas.

(c) $h(x)=0\times x-7$: $m=0$, donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

(d) $j(x)=x^2+10x+25-x^2=10x+25$: $m=10>0$, donc j est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(e) $q(x)=4x-4-6x=-2x-4$: $m=-2<0$, donc q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

(f) $r(x)=-\frac{1}{3}x+8$: $m=-\frac{1}{3}<0$, donc r est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 30 ★☆☆ **Comparer sans calculer**

(a) $m=-4<0$, donc f est strictement décroissante et renverse l'ordre. Comme $2{,}6<3{,}1$, on a $f(2{,}6)>f(3{,}1)$.

(b) $m=2{,}5>0$, donc g est strictement croissante. Comme $-3<-1$, on a $g(-3)<g(-1)$.

(c) $h(x)=-x+9$: $m=-1<0$, donc h est strictement décroissante. Comme $-2<-0{,}5$, on a $h(-2)>h(-0{,}5)$.

Ex. 30 (suite)

(d) $m=0{,}1>0$, donc j est strictement croissante. Comme $1{,}4<1{,}41$, on a $j(1{,}4)<j(1{,}41)$.

(e) $m=0$, donc q est constante : $q(-100)=q(100)$.

(f) $m=-\frac{2}{5}<0$, donc r est strictement décroissante. Comme $0<3$, on a $r(0)>r(3)$.

Ex. 31 ★★☆ **Vrai ou faux ?**

(a) Faux. f est bien décroissante, car $m=-3<0$. Mais $f(0)=12>0$: une fonction décroissante peut prendre des valeurs positives.

(b) Faux. Le sens de variation dépend du signe de m, pas de celui de p. Ici, $m=7>0$, donc g est strictement croissante.

(c) Vrai. Le coefficient directeur est $3-k$. Si $k>3$, alors $3-k<0$, donc la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

(d) Vrai. $m=\frac{j(6)-j(2)}{6-2}=\frac{-3-5}{4}=-2<0$, donc j est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 32 ★★☆ **La bougie qui se consume**

(a) $h(t)=-0{,}75t+18$: h est affine de coefficient directeur $m=-0{,}75<0$. Elle est donc strictement décroissante sur $[0\,;\,24]$.

(b) $h(0)=18$ et $h(24)=18-0{,}75\times 24=0$.

t	**0**		**24**
h(t)	18	↘	0

(c) La hauteur maximale est 18 cm, au départ ($t=0$). La hauteur minimale est 0 cm, au bout de 24 heures : la bougie est alors entièrement consumée.

(d) $h(t)=6 \iff 18-0{,}75t=6 \iff -0{,}75t=-12 \iff t=\frac{-12}{-0{,}75}=16$. La bougie mesure 6 cm au bout de 16 heures.

Ex. 33 ★★★ **Développer, puis démontrer**

(a) $f(x)=x^2-8x+16-x^2=-8x+16$. $f(x)$ s'écrit $mx+p$ avec $m=-8$ et $p=16$: f est affine.

(b) $f(v)-f(u)=(-8v+16)-(-8u+16)=-8v+8u=-8(v-u)$.

(c) Comme $u<v$, on a $v-u>0$. Et $-8<0$, donc le produit $-8(v-u)$ est strictement négatif : $f(v)-f(u)<0$, c'est-à-dire $f(u)>f(v)$.
Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 33 **(suite)**

(d) $-8x+16=0 \iff -8x=-16 \iff x=2$. f est strictement décroissante et $f(2)=0$: si $x<2$, alors $f(x)>f(2)=0$; si $x>2$, alors $f(x)<0$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)		+	0	-	

(e) f est strictement décroissante car $m=-8<0$. $f(-1)=-8\times(-1)+16=24$ et $f(5)=-8\times 5+16=-24$.

x	-1		5
f(x)	24	↘	-24

Sur $[-1\,;\,5]$, le maximum de f vaut 24 (atteint en -1) et le minimum vaut -24 (atteint en 5).

Ex. 34 ★★★ **Une fonction qui dépend d'un paramètre**

(a) Pour $k=1$: $6-2\times 1=4$, donc $f(x)=4x-1$. f est affine de coefficient directeur $m=4>0$: d'après le théorème, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) f est strictement décroissante si et seulement si $6-2k<0$, c'est-à-dire $-2k<-6$. On divise par $-2<0$: le sens de l'inégalité change, donc $k>3$. f est strictement décroissante pour $k\in\,]3\,;\,+\infty[$.

(c) f est constante si et seulement si $6-2k=0$, c'est-à-dire $k=3$. Alors $f(x)=0\times x-1=-1$ pour tout réel x.

(d) Pour $k=5$: $6-2\times 5=-4$, donc $f(x)=-4x-1$, avec $m=-4<0$: f est strictement décroissante. $f(-2)=-4\times(-2)-1=7$ et $f(3)=-4\times 3-1=-13$.

x	-2		3
f(x)	7	↘	-13

(e) $f(2)=(6-2k)\times 2-1=11-4k$. $f(2)=3 \iff 11-4k=3 \iff -4k=-8 \iff k=2$. Alors $f(x)=2x-1$: $m=2>0$, donc d'après le théorème, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 35 ★★★ **La cuve qui se vide**

(a) $m=\frac{615-840}{15-0}=\frac{-225}{15}=-15$: le volume diminue de 15 L par minute ($m=-15$ L/min). $p=V(0)=840$ L. Donc $V(t)=-15t+840$.

(b) $V(t)=0 \iff -15t+840=0 \iff t=\frac{840}{15}=56$. La cuve est vide au bout de 56 minutes : le modèle est valable pour $t\in[0\,;\,56]$.

Ex. 35 **(suite)**

(c) V est affine de coefficient directeur $m=-15<0$: d'après le théorème, V est strictement décroissante sur $[0\,;\,56]$. $V(0)=840$ et $V(56)=-15\times 56+840=0$.

t	0		56
V(t)	840	↘	0

(d) $23{,}5<32{,}5$ et V est strictement décroissante, donc elle renverse l'ordre : $V(23{,}5)>V(32{,}5)$. La cuve contient plus d'eau au bout de 23,5 min qu'au bout de 32,5 min.

(e) $V(t)\geqslant 300 \iff -15t+840\geqslant 300 \iff -15t\geqslant -540 \iff t\leqslant 36$ (on divise par $-15<0$, le sens change). Avec $t\in[0\,;\,56]$: il reste au moins 300 L jusqu'à $t=36$ minutes.

6. *Signe de $mx+p$ et inéquations*

Ex. 36 ★☆☆ **Racine et signe en ligne**

(a) $4x-10=0 \iff x=-\frac{-10}{4}=\frac{5}{2}$.

(b) Non : il a calculé $\frac{p}{m}$. La racine est $-\frac{p}{m}=-\frac{15}{-5}=3$; contrôle : $-5\times 3+15=0$.

(c) Racine 4 et $m=-3<0$: à droite de 4, l'expression a le signe de m, elle est négative. Point test : $-3\times 5+12=-3<0$.

(d) Racine $-\frac{9}{2}$ et $m=2>0$: à gauche, signe contraire de m, l'expression est négative. Point test : $2\times(-5)+9=-1<0$.

(e) h est constante égale à $p=-7$: $h(x)$ est négative pour tout réel x.

(f) Faux : racine 1 et $m=-1<0$, donc $-x+1$ est positif avant 1 puis négatif après (« + puis − »). Point test : en 0, on obtient $1>0$.

(g) $-2\times 3+p=0$ donc $p=6$. Comme $m=-2<0$, à gauche de A l'expression $-2x+6$ est positive (point test : $-2\times 0+6=6>0$).

Ex. 37 ★☆☆ **Inéquations en ligne**

(a) $3x>15 \iff x>5$, donc $S=]5\,;\,+\infty[$.

(b) $-4x\geqslant -6 \iff x\leqslant \frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$ (division par $-4<0$: le sens change), donc $S=\left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

(c) En divisant par $-2<0$, Léa aurait dû changer le sens : $-2x<-7 \iff x>\frac{7}{2}$, donc $S=\left]\frac{7}{2}\,;\,+\infty\right[$.

(d) $\frac{1}{3}x\leqslant -2 \iff x\leqslant -6$, donc $S=]-\infty\,;\,-6]$.

Ex. 37 (suite)

(e) $-6x > 9 \iff x < -\frac{3}{2}$: Tom n'a pas changé le sens en divisant par -6 et a mis un crochet fermé pour une inégalité stricte. $S = \left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right[$.

(f) $f(x) < 5 \iff 2x + 11 - 5 < 0 \iff 2x + 6 < 0 \iff x < -3$, donc $S =]-\infty\,;\,-3[$.

Ex. 38 ★★☆ Tableau de signes et position de la droite

(a) $-\frac{2}{3}x + 4 = 0 \iff x = -\frac{4}{-\frac{2}{3}} = 6$.

(b) $m = -\frac{2}{3} < 0$: signe contraire de m à gauche, signe de m à droite.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

(c) Pour $x = 0$: $f(0) = 4 > 0$, et $0 < 6$: c'est bien le signe $+$ à gauche de 6.

(d) C_f est au-dessus de l'axe des abscisses là où $f(x) > 0$, soit sur $]-\infty\,;\,6[$.

(e) $f(x) \geqslant -2 \iff -\frac{2}{3}x + 6 \geqslant 0 \iff -\frac{2}{3}x \geqslant -6 \iff x \leqslant 9$ (division par un négatif : le sens change). $S =]-\infty\,;\,9]$.

Ex. 39 ★★☆ Deux tarifs de location de vélo

(a) $f(x) - g(x) = 1{,}5x + 12 - (2{,}5x + 5) = 1{,}5x + 12 - 2{,}5x - 5 = -x + 7$.

(b) $-x + 7 = 0 \iff x = 7$ et $m = -1 < 0$: $+$ puis $-$.

x	0		7		10
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	

(c) $f(x) < g(x) \iff -x + 7 < 0 \iff x > 7$: le tarif A est strictement moins cher pour une durée dans $]7\,;\,10]$, c'est-à-dire plus de 7 heures.

(d) $4 < 7$ donc $f(4) - g(4) > 0$: le tarif B est moins cher. Vérification : $f(4) = 1{,}5 \times 4 + 12 = 18$ € et $g(4) = 2{,}5 \times 4 + 5 = 15$ €. Malik choisit le tarif B.

Ex. 40 ★★★ Démontrer la règle des signes

(a) $f(x_0) = m \times \left(-\frac{p}{m}\right) + p = -p + p = 0$.
Donc x_0 annule bien $f(x)$.

(b) Théorème : si $m < 0$, la fonction affine f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc elle inverse l'ordre. Si $x > x_0$, alors $f(x) < f(x_0) = 0$: $f(x)$ est négatif, du signe de m. Si $x < x_0$, alors $f(x) > f(x_0) = 0$: $f(x)$ est positif, du signe contraire de m. On retrouve la règle : signe de m à droite de la racine, signe contraire à gauche.

Ex. 40 (suite)

(c) $-5x + 3 = 0 \iff x = \frac{3}{5}$. Ici $m = -5 < 0$: $+$ à gauche, $-$ à droite.

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

Points tests : $h(0) = 3 > 0$ et $h(1) = -5 \times 1 + 3 = -2 < 0$. Lucas a tort : « $-$ puis $+$ » n'est vrai que si $m > 0$.

(d) Zoé a tort. $c(x) = 0 \times x - 6 = -6$: c'est une fonction constante ($m = 0$), sa droite est horizontale. Comme $c(x) = -6 < 0$ pour tout réel x, $c(x)$ est strictement négatif sur $\mathbb{R}$. La droite est donc toujours en dessous de l'axe des abscisses et ne le coupe jamais.

(e) $-5x + 3 > -7 \iff -5x > -10 \iff x < \frac{-10}{-5} \iff x < 2$. On divise par -5, un nombre négatif, donc le sens de l'inégalité change. $S =]-\infty\,;\,2[$ (crochet ouvert en 2 car l'inégalité est stricte). Contrôle : $h(0) = 3 > -7$, et 0 est bien dans S.

Ex. 41 ★★★ Deux bougies qui se consument

(a) $a(t) = -1{,}5t + 30$: $m = -1{,}5$ cm/h (la bougie perd 1,5 cm par heure) et $p = 30$ cm (hauteur de départ). $b(t) = -0{,}9t + 24$: $m = -0{,}9$ cm/h et $p = 24$ cm.

(b) $a(t) = 0 \iff t = -\frac{30}{-1{,}5} = 20$ et $a(t) \geqslant 0$ pour $t \leqslant 20$: le modèle A est valable sur $[0\,;\,20]$. $b(t) = 0 \iff t = -\frac{24}{-0{,}9} = \frac{80}{3} \approx 26{,}67$: le modèle B est valable sur $\left[0\,;\,\frac{80}{3}\right]$, soit environ 26 h 40 min.

(c) $a(t) - b(t) = -1{,}5t + 30 - (-0{,}9t + 24) = -0{,}6t + 6$. Il s'annule pour $t = -\frac{6}{-0{,}6} = 10$. Comme $m = -0{,}6 < 0$, on a $+$ avant 10 et $-$ après.
Donc la bougie A est la plus haute sur $[0\,;\,10[$, les deux mesurent 15 cm à $t = 10$ h, et la bougie B est la plus haute sur $]10\,;\,20]$.

(d) $-1{,}5t + 30 \geqslant 12 \iff -1{,}5t \geqslant -18 \iff t \leqslant 12$ (on divise par $-1{,}5 < 0$, donc le sens change). Avec le domaine de validité : $S = [0\,;\,12]$. La bougie A mesure au moins 12 cm pendant les 12 premières heures.

(e) $a(t) > 18 \iff -1{,}5t > -12 \iff t < 8$. $b(t) > 18 \iff -0{,}9t > -6 \iff t < \frac{20}{3}$. Il faut les deux conditions, donc $t \in \left[0\,;\,\frac{20}{3}\right[$. Or $\frac{20}{3}$ h $= 6$ h 40 min. Les deux bougies dépassent 18 cm pendant 6 h 40 min.

Ex. 42 ★★★ **Une fonction affine à paramètre**

(a) f est constante si son coefficient directeur est nul : $3-k=0 \iff k=3$. On a alors $f(x)=6$ pour tout x. Comme $p=6>0$, $f(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

(b) Théorème : une fonction affine est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son coefficient directeur est strictement négatif. Ici, $3-k<0 \iff k>3$.
Donc f est strictement décroissante pour $k \in]3\,;+\infty[$.

(c) La racine de $mx+p$ est $-\frac{p}{m}$ (et non $\frac{p}{m}$). Il faut $-\frac{6}{3-k}=2$, donc $3-k=-3$, d'où $k=6$. Vérification : $f(2)=(3-6)\times 2+6=0$.

(d) Avec $k=6$: $f(x)=-3x+6$, qui s'annule en $x=2$. Comme $m=-3<0$: $+$ à gauche de 2, $-$ à droite.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Points tests : $f(0)=6>0$ et $f(3)=-3\times 3+6=-3<0$.

(e) $f(x)-g(x)=-3x+6-(x-6)=-4x+12$. Il s'annule en $x=3$, et $m=-4<0$, donc on a $+$ avant 3 et $-$ après. Ainsi $f(x)\leqslant g(x) \iff -4x+12\leqslant 0 \iff x\geqslant 3$. $S=[3\,;+\infty[$. Sur la droite graduée : crochet fermé en 3 (inégalité large), demi-droite coloriée vers la droite, ouverte en $+\infty$.

7. *Modéliser une variation constante*

Ex. 43 ★☆☆ **Écrire et utiliser un modèle affine**

(a) $p=8$ € (frais d'inscription) et $m=1{,}5$ € par trajet : $P(x)=1{,}5x+8$, pour x entier positif ou nul.

(b) La hauteur diminue, donc $m<0$: $m=-1{,}2$ cm par heure et $p=18$ cm (hauteur de départ).

(c) Le volume doit rester positif : $-4t+60\geqslant 0$, soit $t\leqslant 15$. Le modèle a un sens pour $t\in[0\,;15]$ (en minutes) : au bout de 15 min, le réservoir est vide.

(d) $T(x)=-6{,}5x+14$, donc $T(2{,}4)=-6{,}5\times 2{,}4+14=-15{,}6+14=-1{,}6$. À 2,4 km d'altitude, il fait $-1{,}6$ °C.

(e) $1{,}8d+3{,}2=25{,}7$ donne $1{,}8d=22{,}5$, donc $d=\frac{22{,}5}{1{,}8}=12{,}5$. On a parcouru 12,5 km.

(f) $P(x)=0{,}15x$. C'est une fonction linéaire, car $p=0$: 0 page coûte 0 €. Le prix est proportionnel au nombre de pages.

Ex. 44 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les modèles**

(a) Faux. Après 1 an : $2\,500\times 1{,}04=2\,600$ € (hausse de 100 €). Après 2 ans : $2\,600\times 1{,}04=2\,704$ € (hausse de 104 €). La hausse n'est pas constante, donc le modèle n'est pas affine.

(b) Faux. $P(10)=0{,}25\times 10+1=3{,}5$ € et $P(20)=0{,}25\times 20+1=6$ €, alors que $2\times 3{,}5=7$ €. Avec $p=1\neq 0$, le prix n'est pas proportionnel à la durée.

(c) Vrai. $-3(x+1)+40-(-3x+40)=-3$: quand x augmente de 1, y varie de $m=-3$.

(d) Faux. 15 € est la valeur de départ : $p=15$ €. Le coefficient directeur est $m=0{,}05$ € par SMS : $P(x)=0{,}05x+15$.

(e) Faux. 2 h 30 = 2,5 h, et non 2,3 h. Le prix est $38\times 2{,}5+45=95+45=140$ €. Le montant 132,40 € vient de l'erreur $38\times 2{,}3+45$.

(f) Vrai. En 5 jours, elle a poussé de $15{,}5-12=3{,}5$ cm, et $\frac{3{,}5}{5}=0{,}7$: elle pousse de 0,7 cm par jour.

Ex. 45 ★★☆ **La cuve de récupération d'eau**

(a) $\frac{217-245}{4-0}=\frac{-28}{4}=-7$; $\frac{175-217}{10-4}=\frac{-42}{6}=-7$; $\frac{140-175}{15-10}=\frac{-35}{5}=-7$. Les quotients sont égaux, même si les temps ne sont pas régulièrement espacés : V est une fonction affine de t.

(b) $m=-7$ L par minute (la cuve se vide) et $p=V(0)=245$ L (volume de départ).
Donc $V(t)=-7t+245$.

(c) $V(25)=-7\times 25+245=-175+245=70$. Au bout de 25 minutes, il reste 70 L dans la cuve.

(d) $-7t+245=0$ donne $t=\frac{245}{7}=35$. La cuve est vide au bout de 35 minutes. Le modèle a un sens pour $t\in[0\,;35]$.

(e) $-7t+245=101{,}5 \iff 7t=143{,}5 \iff t=\frac{143{,}5}{7}=20{,}5$. Or 0,5 min = 30 s : Lucas a refermé le robinet au bout de 20 min 30 s.

Ex. 46 ★★☆ **Deux tarifs de vélo électrique**

(a) $A(t)=6t$ et $B(t)=3{,}5t+15$. Seul le tarif A est proportionnel à la durée : c'est une fonction linéaire ($p=0$).

(b) 4 h 30 = 4,5 h. $A(4{,}5)=6\times 4{,}5=27$ € et $B(4{,}5)=3{,}5\times 4{,}5+15=15{,}75+15=30{,}75$ €. Pour 4 h 30, le tarif A est moins cher.

Ex. 46 **(suite)**

(c) $3{,}5t + 15 < 6t$ donne $15 < 2{,}5t$, soit $t > \frac{15}{2{,}5} = 6$. $S =]6\,;\,+\infty[$. Le tarif B est plus avantageux pour une location de plus de 6 heures.

(d) Tarif A : $6t = 40$ donne $t = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$ h, soit 6 h 40 min. Tarif B : $3{,}5t + 15 = 40$ donne $t = \frac{25}{3{,}5} = \frac{50}{7} \approx 7{,}14$ h, soit environ 7 h 08 min. Avec le tarif B, Mila roule le plus longtemps.

Ex. 47 ★★★ **Deux bougies allumées ensemble**

(a) De 19 h 00 à 21 h 45, il s'écoule 2 h 45 min, soit $2 + \frac{45}{60} = 2{,}75$ h (et non 2,45 h). La bougie B se consume à vitesse constante, donc h_B est affine, avec $m = \frac{15{,}8-18}{2{,}75-0} = \frac{-2{,}2}{2{,}75} = -0{,}8$ cm par heure (la bougie raccourcit) et $p = h_B(0) = 18$ cm.
Donc $h_B(t) = -0{,}8t + 18$.

(b) La bougie A part de 24 cm et perd 2 cm par heure, donc $h_A(t) = -2t + 24$ ($m = -2$ cm par heure, ce qui traduit une diminution). Elle est consumée quand $-2t + 24 = 0$, soit $t = 12$: le modèle a un sens pour $t \in [0\,;\,12]$. Pour la bougie B, $-0{,}8t + 18 = 0$ donne $t = \frac{18}{0{,}8} = 22{,}5$: le modèle a un sens pour $t \in [0\,;\,22{,}5]$.

(c) $-2t + 24 = -0{,}8t + 18 \iff -1{,}2t = -6 \iff t = 5$. De plus, $h_A(5) = -2 \times 5 + 24 = 14$. Au bout de 5 heures, soit à 0 h 00, les deux bougies mesurent 14 cm.

(d) $-2t + 24 < -0{,}8t + 18 \iff -1{,}2t < -6 \iff t > 5$ (on divise par $-1{,}2 < 0$, donc le sens de l'inégalité change). Vérification avec $t = 6$: $h_A(6) - h_B(6) = 12 - 13{,}2 = -1{,}2 < 0$. Sur $[0\,;\,12]$, on obtient $S =]5\,;\,12]$. La bougie A est plus petite que la bougie B à partir de 5 heures après l'allumage, jusqu'à ce qu'elle soit consumée.

(e) $-0{,}8t + 18 = -2t + 24 + 3 \iff 1{,}2t = 9 \iff t = 7{,}5$, avec $7{,}5 \in [0\,;\,12]$. Or 7,5 h = 7 h 30 min (et non 7 h 50). Contrôle : $h_A(7{,}5) = 9$ et $h_B(7{,}5) = 12 = 9 + 3$. La bougie B mesure 3 cm de plus que la bougie A à 2 h 30 du matin.

Ex. 48 ★★★ **Taxi, VTC : quel tarif choisir ?**

(a) $A(x) = 1{,}2x + 4{,}5$, $B(x) = 2{,}1x$ et $C(x) = 18$, pour $x \in [0\,;\,15]$. B est linéaire ($p = 0$: le prix est proportionnel à la distance) et C est constante ($m = 0$).

Ex. 48 **(suite)**

(b) Pour Bêta, $B(5) = 10{,}5$ et $B(10) = 21 = 2 \times 10{,}5$: c'est vrai, car B est linéaire. Pour Alpha, $A(5) = 6 + 4{,}5 = 10{,}5$ et $A(10) = 12 + 4{,}5 = 16{,}5 \neq 21$: c'est faux, à cause de la prise en charge ($p = 4{,}5 \neq 0$). Inès n'a donc pas raison pour Alpha.

(c) $1{,}2x + 4{,}5 < 2{,}1x \iff 4{,}5 < 0{,}9x \iff x > 5$. Sur $[0\,;\,15]$, $S =]5\,;\,15]$. Alpha est moins cher que Bêta pour un trajet de plus de 5 km. Les deux tarifs coûtent 10,50 € pour exactement 5 km.

(d) $C(x) < A(x) \iff 18 < 1{,}2x + 4{,}5 \iff 13{,}5 < 1{,}2x \iff x > 11{,}25$. Sur $[0\,;\,15]$, $S =]11{,}25\,;\,15]$. Le VTC est moins cher que le taxi Alpha au-delà de 11,25 km.

(e) Bêta est la moins chère sur $[0\,;\,5[$, Alpha sur $]5\,;\,11{,}25[$ et le VTC sur $]11{,}25\,;\,15]$. Pour $x = 3$: $B(3) = 6{,}30$ €, $A(3) = 8{,}10$ € et $C(3) = 18$ €, donc Bêta est bien la moins chère. Pour $x = 12$: $A(12) = 18{,}90$ €, $B(12) = 25{,}20$ € et $C(12) = 18$ €, donc le VTC est bien le moins cher.

Ex. 49 ★★★ **La pousse de deux plantes**

(a) $\frac{9{,}2-6{,}8}{7-3} = \frac{2{,}4}{4} = 0{,}6$; $\frac{12{,}2-9{,}2}{12-7} = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{17-12{,}2}{20-12} = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6$. Les quotients sont tous égaux, même si les écarts entre les jours ne sont pas les mêmes : h_Q est donc une fonction affine de j, avec $m = 0{,}6$ cm par jour.

(b) $h_Q(j) = 0{,}6j + p$ et $h_Q(3) = 6{,}8$, donc $p = 6{,}8 - 0{,}6 \times 3 = 5$. Contrôle : $0{,}6 \times 20 + 5 = 17$. Ainsi, $h_Q(j) = 0{,}6j + 5$. Le nombre $p = h_Q(0) = 5$ est la hauteur de la plante le jour de sa mise en terre : 5 cm.

(c) $\frac{6-4}{7-3} = \frac{2}{4} = 0{,}5$, mais $\frac{9-6}{12-7} = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Les quotients ne sont pas égaux, donc aucune fonction affine ne convient : la hauteur de R n'est pas une fonction affine de j.

(d) $h_Q(j + 10) - h_Q(j) = 0{,}6(j + 10) + 5 - (0{,}6j + 5) = 0{,}6 \times 10 = 6$: 10 jours de plus donnent toujours 6 cm de plus. Du jour 15 au jour 25, puis du jour 25 au jour 35, la plante pousse donc deux fois de 6 cm. Entre le jour 15 et le jour 35, elle pousse de 12 cm.

(e) $0{,}6j + 5 \leqslant 35 \iff 0{,}6j \leqslant 30 \iff j \leqslant 50$. Comme $j \geqslant 0$, le modèle est valable pour $j \in [0\,;\,50]$. 4 semaines font 28 jours : $h_Q(28) = 0{,}6 \times 28 + 5 = 21{,}8$. Au bout de 4 semaines, la plante Q mesure 21,8 cm.