1re tronc commun / Fonctions affines et lectures graphiques

benprof particulier.fr

42 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 2nde : fonctions linéaires et affines*

À retenir : $f(x) = mx + p$: m multiplie x, p est le nombre seul ($4 - 7x$: $m = -7$, $p = 4$). Si $p = 0$, f est linéaire (proportionnalité). Antécédent de k : on résout $f(x) = k$. A est sur C_f si $f(x_A) = y_A$. Hausse de t % : $\times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Ex. 1 ★☆☆ **Reconnaître une fonction affine** — Pour chaque fonction définie sur son ensemble de définition, réponds à la question posée.

a) $f(x) = 7 - 3x$: donne le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p.

b) $g(x) = -4$: g est-elle affine ? Justifie en donnant m et p.

c) $h(x) = x^2 - 1$: h est-elle affine ? Justifie à l'aide de $h(0)$, $h(1)$ et $h(2)$.

d) $k(x) = \frac{6}{x}$: vrai ou faux ? « k est linéaire de coefficient 6. » Justifie avec $k(1)$, $k(2)$ et $k(3)$.

e) $\ell(x) = 1{,}5 + 0{,}2x$: donne le sens de variation de ℓ sur $\mathbb{R}$. Justifie.

f) $q(x) = \frac{x}{4}$: q est-elle linéaire ? Sa droite passe-t-elle par l'origine ? Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : images, antécédents, droites** — Réponds en détaillant ton calcul sur une ligne.

a) Soit $f(x) = -5x + 2$. Calcule $f(-4)$.

b) Soit $g(x) = 4x + 7$. Détermine l'antécédent de -5 par g.

c) Calcule le coefficient directeur de la droite (AB), avec $A(1\,;-2)$ et $B(5\,;8)$.

d) Le point $E(-2\,;11)$ appartient-il à la droite d'équation $y = -4x + 3$? Justifie par un calcul.

e) Un prix x augmente de 8 %. Exprime le nouveau prix $N(x)$ en fonction de x et donne la nature de N.

f) h est une fonction linéaire telle que $h(5) = 12$. Calcule $h(-2)$.

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs d'Inès** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6 - 0{,}5x$. Inès a rédigé : « $m = 6$ et $p = -0{,}5$, donc f est croissante. L'antécédent de 8 par f est $f(8) = 2$. »

a) Corrige les valeurs de m et de p données par Inès.

b) Inès affirme que f est croissante. A-t-elle raison ? Justifie.

c) Explique l'erreur d'Inès sur l'antécédent de 8, puis calcule le bon antécédent.

d) Calcule $f(-6)$ en écrivant les parenthèses.

e) Le point $P(14\,;-1)$ appartient-il à C_f ? Justifie par un calcul.

Ex. 4 ★★☆ **Location de voiture** — Zoé loue une voiture. Le loueur facture un forfait de 35 € plus 0,25 € par kilomètre parcouru. On note $P(x)$ le prix payé, en euros, pour x kilomètres.

a) Exprime $P(x)$ en fonction de x, puis donne m et p.

b) Calcule le prix payé pour 180 km.

c) Zoé a payé 97,50 €. Combien de kilomètres a-t-elle parcourus ?

d) Le prix est-il proportionnel au nombre de kilomètres ? Justifie avec $P(100)$ et $P(200)$.

e) Le loueur augmente tous ses prix de 4 %. Exprime le nouveau prix $Q(x)$ sous la forme $mx + p$.

Ex. 5 ★★★ **Trois formules de vélo électrique** — Une ville propose trois formules de location de vélo électrique. Formule A : 0,40 € par km. Formule B : abonnement de 12 € plus 0,15 € par km. Formule C : forfait de 30 €, quelle que soit la distance. On note $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ le prix payé, en euros, pour x km parcourus.

a) Exprime $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ en fonction de x. Pour chacune, dis si elle est linéaire, affine ou les deux. Justifie.

b) Juliette a choisi la formule B et a payé 21 €. Combien de kilomètres a-t-elle parcourus ? Justifie par un calcul.

c) Pour quelles distances la formule B est-elle moins chère que la formule A ? Résous une inéquation.

d) Pour quelles distances la formule B coûte-t-elle au plus autant que la formule C ? Résous une inéquation.

e) L'an prochain, le prix de la formule A augmente de 5 %. Exprime le nouveau prix $A_2(x)$. Est-ce encore une fonction linéaire ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Le réservoir du groupe électrogène** — Le réservoir d'un groupe électrogène se vide régulièrement. Le volume de carburant restant, en litres, au bout de t heures est donné par une fonction affine V. Au bout de 2 h, il reste 48 L ; au bout de 7 h, il reste 33 L.

(a) Calcule le coefficient directeur de V. Que signifie-t-il pour le réservoir ? Donne le sens de variation de V.

(b) Détermine l'ordonnée à l'origine, puis l'expression de $V(t)$. Que représente ce nombre pour le réservoir ?

(c) Au bout de combien de temps le réservoir est-il vide ? Justifie par un calcul.

(d) Le point $E(10\,;25)$ appartient-il à la droite représentant V ? Justifie par un calcul.

(e) Léo affirme : « Au bout de 9 h, il reste la moitié du volume de départ. » A-t-il raison ? Justifie.

2. *Lire une courbe : images, antécédents, signe, variations*

À retenir : Image de a : ordonnée du point d'abscisse a (une seule). Antécédents de b : toutes les abscisses des points d'ordonnée b. $f(x) \geqslant 0$ où C_f est sur ou au-dessus de l'axe des abscisses. Un minimum peut être atteint à une borne.

Ex. 7 ★☆☆ **Automatismes : lire un tableau de valeurs** — Voici un tableau de valeurs d'une fonction g. Réponds à l'aide du tableau.

x	-3	-1	0	2	4	5
g(x)	4	-2	1	-2	0	3

(a) Lis l'image de 4 par g.

(b) Donne le ou les antécédents de 4 par g lus dans le tableau.

(c) Donne tous les antécédents de -2 par g lus dans le tableau.

(d) Lis $g(5)$.

(e) Mila affirme : « 0 a deux images, 1 et 4 ». Corrige son erreur.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : point sur une courbe** — Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - 3x + 1$. On note C_h sa courbe représentative.

(a) Calcule l'image de -2 par h.

(b) Le point $A(2\,;-1)$ appartient-il à C_h ? Justifie par un calcul.

(c) Le point $B(-1\,;3)$ appartient-il à C_h ? Justifie par un calcul.

(d) Calcule l'ordonnée du point de C_h d'abscisse 0,5.

(e) Détermine par le calcul tous les antécédents de 1 par h.

Ex. 9 ★★☆ **Exploiter un tableau de variations** — Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-5\,;6]$.

x	-5		2		6
f(x)	-4	↗	4	↘	-1

(a) Donne le maximum de f sur $[-5\,;6]$ et la valeur de x en laquelle il est atteint.

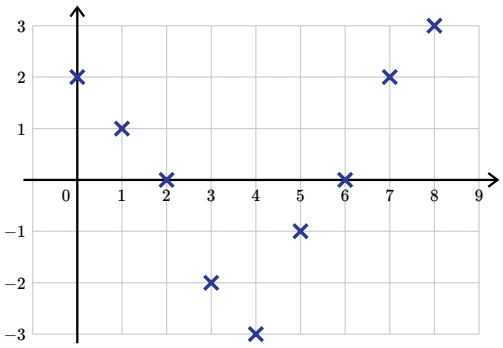
(b) Donne le minimum de f sur $[-5\,;6]$ et la valeur de x en laquelle il est atteint.

(c) Compare $f(-4)$ et $f(-2)$. Justifie.

(d) Donne un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [2\,;6]$.

(e) Combien de solutions l'équation $f(x) = -2$ a-t-elle sur $[-5\,;6]$? Justifie.

Ex. 10 ★★☆ **Température relevée pendant la nuit** — Inès relève la température $T(t)$, en °C, t heures après minuit, de $t = 0$ à $t = 8$. Entre deux relevés, on suppose que la température varie régulièrement.



(a) Lis $T(7)$.

(b) Donne toutes les heures du relevé où la température vaut 0 °C.

(c) Zoé dit : « $T(t)$ est positive, car t est positif ». Corrige-la et donne le signe de $T(t)$ sur $[0\,;8]$.

(d) Donne la température minimale relevée et l'heure à laquelle elle est atteinte.

(e) Donne tous les instants où la température vaut 1 °C, en valeur approchée si besoin.

Ex. 11 ★★★ **Juger des affirmations sur un tableau de variations** — Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-2\,;8]$. Justifie chaque réponse à l'aide du tableau.

x	-2		3		8
f(x)	3	↘	-4	↗	-1

(a) Ben affirme que $f(0) = 1$. Peut-on l'affirmer à partir du tableau ? Justifie.

(b) Vrai ou faux : $f(-1) > f(2)$. Justifie.

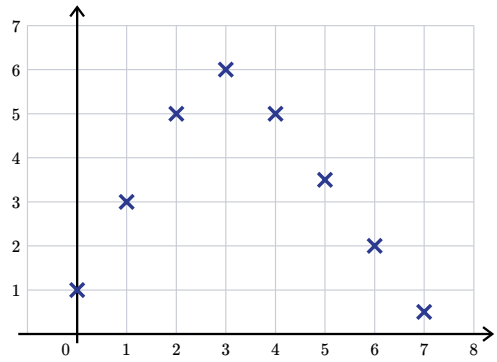
(c) Lina écrit : « $0 < 6$, donc $f(0) < f(6)$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 11 **(suite)**

(d) Tom affirme : « Le maximum de f est 8. » Corrige son erreur, puis donne le minimum de f et la valeur de x où il est atteint.

(e) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle sur $[-2\,;8]$? Justifie, puis donne le signe de $f(x)$ sur $[-2\,;8]$.

Ex. 12 ★★★ **Le vol d'un drone** — Yanis fait voler un drone depuis une terrasse. On note $h(t)$ son altitude, en dizaines de mètres, t minutes après le départ. Elle est relevée chaque minute, de $t = 0$ à $t = 7$. Entre deux relevés, on suppose que l'altitude varie régulièrement.



(a) Lis $h(6)$, puis donne l'altitude du drone en mètres à cet instant.

(b) Donne tous les instants relevés où $h(t) = 5$, puis ceux où $h(t) = 7$.

(c) Quelle est l'altitude maximale du drone, en mètres ? À quel instant est-elle atteinte ?

(d) Sur quel intervalle de temps a-t-on $h(t) \geqslant 3$? Justifie par un calcul, puis donne la borne de droite en minutes et secondes.

(e) Dresse le tableau de variations de h sur $[0\,;7]$, puis donne le minimum de h et l'instant où il est atteint.

3. *Fonctions affines et coefficient directeur*

À retenir : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$: même ordre en haut et en bas. m est la variation de $f(x)$ quand x augmente de 1 ; $m > 0$: croissante, $m < 0$: décroissante. Dans $4 - x$, $m = -1$, pas 4.

Ex. 13 ★☆☆ **Automatismes : lire m et p** — Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. Réponds en une ligne.

(a) Pour $f(x) = 7 - 3x$, donne le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

(b) La fonction $g(x) = \frac{x}{4} - 6$ est-elle croissante, décroissante ou constante ? Justifie.

(c) La fonction $h(x) = -9$ est-elle croissante, décroissante ou constante ? Justifie.

Ex. 13 **(suite)**

(d) Développe $k(x) = 2(x - 5)$, puis donne son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

(e) Donne l'expression de la fonction affine v de coefficient directeur -5 et d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{2}$.

Ex. 14 ★☆☆ **Automatismes : coefficient directeur à partir de deux points** — Calcule, s'il existe, le coefficient directeur de la droite qui passe par les deux points.

(a) $A(1\,;4)$ et $B(3\,;10)$.

(b) $C(-2\,;5)$ et $D(1\,;-7)$.

(c) $E(-5\,;-1)$ et $F(-1\,;-7)$.

(d) $G(0\,;3)$ et $H(6\,;3)$.

(e) $K(4\,;1)$ et $L(4\,;9)$.

(f) $M(-6\,;-2)$ et $N(2\,;4)$.

Ex. 15 ★★☆ **Trois élèves, une droite** — On cherche le coefficient directeur m de la droite (PQ), avec $P(-3\,;2)$ et $Q(1\,;-6)$. Inès écrit : $m = \frac{-6-2}{1-3} = \frac{-8}{-2} = 4$.

(a) Repère l'erreur d'Inès, puis calcule la bonne valeur de m.

(b) Hugo écrit $m = \frac{1-(-3)}{-6-2}$. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Lucas écrit $m = \frac{2-(-6)}{1-(-3)} = 2$. A-t-il raison ? Justifie.

(d) La fonction affine représentée par (PQ) est-elle croissante ou décroissante ? Justifie.

Ex. 16 ★★☆ **Location de vélo** — Nora loue un vélo. Le prix, en euros, pour x heures de location est $f(x) = mx + p$. Une location de 3 h coûte 13,20 €, et une location de 8 h coûte 25,20 €.

(a) Calcule le coefficient directeur m de f.

(b) Explique ce que représente m pour la location, avec l'unité.

(c) Calcule p, puis explique ce qu'il représente.

(d) Nora a payé 30 €. Combien d'heures a duré sa location ?

Ex. 17 ★★★ **Le réservoir du camping-car** — Le réservoir d'eau d'un camping-car se vide à débit constant. On note $f(t)$ le volume d'eau restant, en litres, au bout de t minutes. La fonction f est affine : $f(t) = mt + p$. Au bout de 4 min, il reste 52 L. Au bout de 10 min, il reste 37 L.

(a) Calcule le coefficient directeur m. Interprète-le dans le contexte, avec son unité.

(b) Déduis-en p, puis l'expression de $f(t)$. Que représente p pour le réservoir ?

(c) Donne le sens de variation de f et justifie-le.

(d) Yanis affirme : « $f(t+1) - f(t)$ dépend de t. » A-t-il raison ? Justifie par un calcul.

Ex. 17 (suite)

(e) Au bout de combien de temps le réservoir est-il vide ? Donne la réponse en minutes et en secondes.

Ex. 18 ★★★ **Enquête sur cinq points** — Dans un repère, on donne les points $A(-4\,;3)$, $B(2\,;6)$, $C(2\,;-1)$, $D(8\,;6)$ et $E(-10\,;1)$.

(a) Calcule le coefficient directeur de la droite (AB).

(b) Sur la droite (AB), de combien varie l'ordonnée y quand x augmente de 4 ? Justifie.

(c) Lila affirme : « La droite (BC) a pour coefficient directeur 0. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Calcule le coefficient directeur de (BD). Que peux-tu dire de la fonction affine représentée par (BD) ?

(e) Calcule le coefficient directeur de (AE). Les points A, B et E sont-ils alignés ? Justifie.

4. *Résoudre graphiquement $f(x) = k$ et $f(x) < k$*

À retenir : $f(x) = k$: je trace $y = k$ et je lis les abscisses des points communs. $f(x) < k$: abscisses des points strictement sous la droite, crochets ouverts ; avec $\leqslant$ ou $\geqslant$, crochets fermés. Ex. : $x^2 < 4$ donne $]-2\,;2[$.

Ex. 19 ★☆☆ **Lire un tableau de variations** — Une fonction f est définie sur $[-3\,;4]$. Voici son tableau de variations.

x	-3		1		4
f(x)	5	↘	-1	↗	2

Réponds sans justifier.

(a) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle sur $[-3\,;4]$?

(b) Combien de solutions l'équation $f(x) = 3$ a-t-elle sur $[-3\,;4]$?

(c) Résous l'équation $f(x) = -1$.

(d) Résous l'inéquation $f(x) \leqslant 5$.

(e) Encadre $f(x)$ pour tout x de $[-3\,;4]$.

(f) Résous l'inéquation $f(x) < -1$.

Ex. 20 ★☆☆ **Avec la fonction carré** — Résous chaque équation ou inéquation en t'aidant de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite horizontale qui convient.

(a) $x^2 = 16$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $x^2 = 16$ sur l'intervalle $[-1\,;6]$.

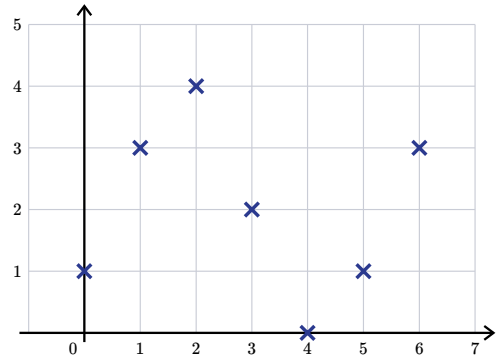
(c) $x^2 \leqslant 9$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $x^2 > 2{,}25$ sur $\mathbb{R}$.

(e) $x^2 < -4$ sur $\mathbb{R}$.

(f) $x^2 \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 21 ★★☆ **Le réservoir d'eau** — Le nuage donne la hauteur d'eau $h(t)$, en mètres, dans un réservoir t heures après midi, pour t dans $[0\,;6]$. On relie les points voisins par des segments.



(a) Résous l'équation $h(t) = 3$.

(b) Résous l'inéquation $h(t) < 1$.

(c) Résous l'inéquation $h(t) \geqslant 2$.

(d) Lina dit : « La solution de $h(t) = 4$, c'est 4. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 22 ★★☆ **Deux tarifs de location de vélo** — Une location de vélo coûte $f(x) = 2x + 6$ euros avec le tarif A, et $g(x) = 3{,}5x$ euros avec le tarif B, pour x heures, avec x dans $[0\,;10]$.

(a) Complète ce tableau de valeurs.

x	0	2	6	10
f(x)	…	…	…	…
g(x)	…	…	…	…

(b) Résous $f(x) = g(x)$ par le calcul, puis donne le prix commun aux deux tarifs.

(c) Résous $f(x) < g(x)$ sur $[0\,;10]$. Interprète le résultat.

(d) Hugo a 20 euros. Résous $f(x) \leqslant 20$ pour trouver les durées possibles avec le tarif A.

Ex. 23 ★★★ **Tout ce que dit un tableau de variations** — Une fonction f est définie sur $[-5\,;6]$. Voici son tableau de variations.

x	-5		-1		2		6
f(x)	-2	↗	4	↘	-3	↗	1

On sait aussi que $f(1) = -2$ et $f(4) = -2$.

(a) Résous l'équation $f(x) = -2$. Justifie qu'il n'y a pas d'autre solution que celles que tu donnes.

(b) Résous l'inéquation $f(x) < -2$. Donne la réponse sous forme d'intervalle.

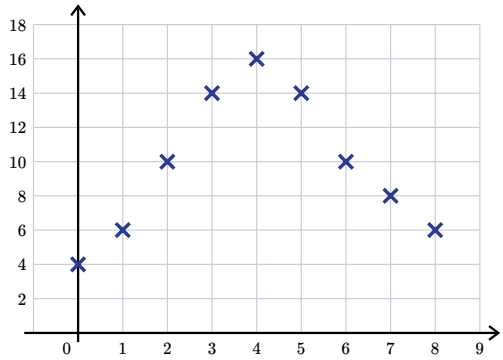
(c) Léa affirme : « Pour tout x de $[-5\,;6]$, on a $-3 < f(x) \leqslant 4$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Combien de solutions l'équation $f(x) = 4$ a-t-elle ? Et l'équation $f(x) = -2{,}5$? Justifie flèche par flèche.

Ex. 23 (suite)

(e) Pour quelles valeurs de k l'équation $f(x) = k$ a-t-elle exactement trois solutions ? Justifie.

Ex. 24 ★★★ **La serre d'Inès** — Inès relève la température $T(t)$, en °C, dans sa serre, t heures après 6 h, pour t dans $[0\,;8]$. Entre deux relevés voisins, la température varie de façon affine : on relie les points par des segments. Dehors, la température est $E(t) = 2t + 2$.



(a) Résous l'équation $T(t) = 10$.

(b) Résous l'inéquation $T(t) \geqslant 14$.

(c) Résous l'inéquation $T(t) < 6$.

(d) Sur $[5\,;6]$, T est affine et passe par $(5\,;14)$ et $(6\,;10)$. Détermine $T(t)$ sur cet intervalle.

(e) Résous $T(t) = E(t)$, puis $T(t) > E(t)$ sur $[0\,;8]$. Justifie à l'aide de quelques valeurs.

5. *Équation réduite d'une droite*

À retenir : Avec un point A et m : $p = y_A - m\,x_A$, puis contrôle avec un autre point. Parallèles $\iff$ même m. $y = c$: droite horizontale ; $x = c$: verticale, sans équation réduite. Ex. : $A(-2\,;1)$, $m = 3$: $p = 1 - 3 \times (-2) = 7$.

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : lire et utiliser une équation réduite** — Réponds à chaque question par un calcul court ou une phrase.

(a) Donne le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p de la droite d'équation $y = 4 - 3x$.

(b) Donne une équation de la droite parallèle à l'axe des abscisses qui passe par $A(5\,;-2)$.

(c) Donne une équation de la droite parallèle à l'axe des ordonnées qui passe par $B(-3\,;7)$, puis explique pourquoi elle n'a pas d'équation réduite.

(d) Les droites $d_1 : y = 6 - 0{,}4x$ et $d_2 : y = -0{,}4x - 1$ sont-elles parallèles ? Justifie.

(e) Pour tracer la droite d'équation $y = -2x + 1$, donne les coordonnées de deux de ses points.

(f) Le point $C(-4\,;9)$ appartient-il à la droite d'équation $y = -2{,}5x - 1$? Justifie par un calcul.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : calculer m et p** — Donne le résultat en détaillant le calcul. Attention aux parenthèses autour des coordonnées négatives.

(a) Donne l'équation réduite de la droite qui passe par $A(2\,;-1)$ et dont le coefficient directeur vaut 4.

(b) Calcule l'ordonnée à l'origine de la droite qui passe par $B(-4\,;5)$ et dont le coefficient directeur vaut $-0{,}75$.

(c) Calcule le coefficient directeur de la droite qui passe par $C(-1\,;-6)$ et $D(3\,;2)$.

(d) Une droite passe par $G(3\,;0)$ et $H(0\,;-6)$. Donne son ordonnée à l'origine.

(e) Donne l'équation réduite de la droite parallèle à $y = 5x + 2$ qui passe par $F(1\,;4)$.

Ex. 27 ★★☆ **Repère les erreurs de Lina** — Lina cherche l'équation réduite de la droite (AB), avec $A(-3\,;8)$ et $B(5\,;-4)$. Elle écrit : $m = \frac{-4-8}{5+3} = -1{,}5$, puis $p = 8 - (-1{,}5) \times 3 = 12{,}5$, donc $f(x) = -1{,}5x + 12{,}5$.

(a) Le coefficient directeur trouvé par Lina est-il juste ? Justifie par un calcul.

(b) Vérifie le calcul de p fait par Lina et corrige-le si besoin.

(c) Contrôle ta valeur de p avec le point B.

(d) Lina conclut par « $f(x) = \ldots$ ». Écris correctement l'équation réduite de la droite (AB).

Ex. 28 ★★☆ **Deux droites sécantes** — Dans un repère, la droite d_1 passe par $A(-1\,;-5)$ et $B(3\,;3)$. La droite d_2 a pour équation $y = -0{,}5x + 7$.

(a) Détermine l'équation réduite de d_1 et contrôle-la avec le point B.

(b) Justifie que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

(c) Calcule les coordonnées du point d'intersection I de d_1 et d_2.

(d) Donne l'équation réduite de la droite d_3, parallèle à d_2, qui passe par $C(-2\,;1)$.

Ex. 29 ★★★ **Un quadrilatère dans un repère** — Dans un repère, on considère les points $A(0\,;2)$, $B(4\,;4)$, $C(6\,;-1)$, $D(-4\,;-6)$ et $E(4\,;-3)$. Justifie chaque réponse par un calcul.

(a) Calcule le coefficient directeur de la droite (AB), puis celui de la droite (DC). Que peux-tu en déduire pour ces deux droites ?

(b) Calcule le coefficient directeur de (AD), puis celui de (BC). Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifie.

(c) Détermine l'équation réduite de la droite (DC) en utilisant le point C, puis contrôle-la avec le point D.

(d) Le point $M(-8\,;-9)$ appartient-il à la droite (DC) ? Justifie par un calcul.

Ex. 29 **(suite)**

(e) Donne une équation de la droite (BE). A-t-elle une équation réduite ? Calcule ensuite les coordonnées du point d'intersection de (BE) et (DC).

Ex. 30 ★★★ **Trois cuves** — Le temps x est en heures et le volume y en litres, avec x entre 0 et 11. La cuve A se vide régulièrement : elle contient 900 L à $x = 2$ et 600 L à $x = 5$. La cuve B contient 200 L à $x = 0$ et gagne 50 L par heure. La cuve C contient toujours 700 L.

(a) Le volume de la cuve A est représenté par une droite d_A. Détermine son équation réduite, puis contrôle-la avec le second point.

(b) Que représentent le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de d_A pour la cuve A ?

(c) Donne l'équation réduite de la droite d_B qui représente le volume de la cuve B, puis les coordonnées de deux de ses points pour la tracer.

(d) Au bout de combien de temps les cuves A et B contiennent-elles le même volume ? Quel est ce volume ?

(e) Donne l'équation de la droite d_C associée à la cuve C. Pendant quelle période la cuve A contient-elle moins d'eau que la cuve C ? Justifie.

6. *Signe d'une expression factorisée*

À retenir : Une ligne par facteur : $ax + b$ s'annule en $-\frac{b}{a}$ et a le signe de a à droite de sa racine. Racines rangées dans l'ordre croissant, puis on compte les « − ». Ex. : $4 - x$ est $+$ puis $-$ après 4. Un facteur constant négatif inverse tout.

Ex. 31 ★☆☆ **Automatismes : signe d'un facteur du premier degré** — Réponds en une ligne, sans calculatrice.

(a) Pour quelle valeur de x l'expression $4x - 10$ s'annule-t-elle ?

(b) Léa affirme que $x + 7$ s'annule en 7. A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Pour quelle valeur de x l'expression $-3x + 12$ s'annule-t-elle ? Quel est son signe à droite de cette valeur ?

(d) Sur quel intervalle l'expression $9 - 2x$ est-elle positive ou nulle ?

(e) Sur quel intervalle l'expression $3(x - 5)$ est-elle strictement négative ?

(f) Résous l'inéquation $-x - 8 > 0$.

Ex. 32 ★☆☆ **Automatismes : règle des signes** — Réponds sans développer, en comptant les facteurs négatifs.

(a) Donne le signe de $(x - 4)(x + 2)$ pour $x = 1$.

(b) Range dans l'ordre croissant les deux valeurs qui annulent $(x - 6)(2x + 3)$.

(c) Pour $x = -10$, combien de facteurs de $(x + 4)(x - 1)(x + 12)$ sont négatifs ? Donne le signe du produit.

Ex. 32 **(suite)**

(d) Donne le signe de $-5(x - 2)(x - 7)$ pour x compris strictement entre 2 et 7.

(e) Vrai ou faux ? Pour $x = 3$, l'expression $(1 - x)(x + 6)$ est positive. Justifie.

Ex. 33 ★★☆ **Tableau de signes à compléter** — On considère $A(x) = (-2x + 5)(x + 4)$ et le tableau de signes ci-dessous, à compléter.

x	$-\infty$	?	?	?	?	?	$+\infty$
−2x+5		?	?	?	?	?	
x+4		?	?	?	?	?	
A(x)		?	?	?	?	?	

(a) Donne la valeur qui annule chaque facteur de $A(x)$.

(b) Complète le tableau : les valeurs dans l'ordre croissant, une ligne par facteur, puis la ligne de $A(x)$.

(c) Résous l'inéquation $A(x) \leqslant 0$.

(d) Sans développer, donne le signe de $A(100)$ en utilisant ton tableau. Contrôle par un calcul.

Ex. 34 ★★☆ **L'erreur de Lucas** — Lucas étudie le signe de $B(x) = -3(x - 2)(x + 5)$. Il écrit : « Les racines sont -2 et 5, et $B(x)$ est positif à l'extérieur des racines. »

(a) Quelles sont les deux valeurs qui annulent réellement $B(x)$?

(b) Quel est le signe de $B(x)$ à l'extérieur des racines ? Justifie avec le signe du facteur constant.

(c) Résous l'inéquation $B(x) > 0$.

(d) Calcule $B(3)$ et explique si ce résultat est cohérent avec ta réponse précédente.

Ex. 35 ★★★ **Le bénéfice de l'atelier de bougies** — Un atelier fabrique et vend x centaines de bougies par mois, avec $x \in [0\,;16]$. Son bénéfice, en centaines d'euros, est $B(x) = -0{,}5(x - 2)(x - 14)$. Ne développe pas $B(x)$.

(a) Calcule $B(0)$ et $B(6)$. Interprète $B(0)$ pour l'atelier.

(b) Résous $B(x) = 0$. Que représentent ces valeurs pour l'atelier ?

(c) Dresse le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\,;16]$, avec une ligne par facteur, $-0{,}5$ compris.

(d) Pour quelles quantités l'atelier fait-il un bénéfice strictement positif ? Donne l'ensemble des solutions de $B(x) > 0$.

(e) Inès affirme : « Avec 15 centaines de bougies, l'atelier gagne de l'argent. » Vrai ou faux ? Justifie par le tableau puis par un calcul.

Ex. 36 ★★★ **Un facteur à l'envers** — On considère $E(x) = (9 - 3x)(7 - 2x)$ et $F(x) = 5(x - 3)(7 - 2x)$. Ne développe aucune expression.

(a) Donne la valeur qui annule chaque facteur de $E(x)$, puis range ces valeurs dans l'ordre croissant.

(b) Dresse le tableau de signes de $E(x)$. Justifie le signe de chaque facteur de part et d'autre de sa racine.

(c) Résous $E(x) \leqslant 0$ à l'aide de ton tableau.

(d) Noé affirme : « $E(x)$ et $F(x)$ ont le même tableau de signes, car le facteur 5 ne change rien. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Propose une expression $G(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ dont le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
G(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

7. *Équations, inéquations et produit nul*

À retenir : Produit nul : $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$, sans développer. $x^2 = a$ a deux solutions $\pm\sqrt{a}$ si $a > 0$, une seule si $a = 0$ et aucune si $a < 0$. Diviser par un négatif change le sens : $-2x < 6$ donne $x > -3$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : équations du premier degré et quotient** — Résous chaque équation et donne l'ensemble des solutions S.

(a) $5x - 3 = 2x + 9$

(b) $\dfrac{8}{x} = 2{,}5$ (avec $x \neq 0$)

(c) $3x = x$

(d) $4x + 1 = 4x - 6$

(e) $2(x + 3) = 2x + 6$

(f) $1{,}5x + 4 = 0{,}5x - 2$

Ex. 38 ★☆☆ **Automatismes : carrés, produits nuls et inéquations** — Résous chaque équation ou inéquation. Donne S sous forme d'ensemble ou d'intervalle.

(a) $x^2 = 36$

(b) $x^2 = 7$ (valeurs exactes)

(c) $(x - 4)(x + 4) = 0$

(d) $(3x - 6)(5x + 2) = 0$

(e) $-4x + 1 < 21$

(f) $2x - 5 \geqslant 6x + 3$

Ex. 39 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur d'un élève** — Chaque élève s'est trompé. Repère son erreur, puis écris la bonne réponse.

(a) Noé résout $-6x \geqslant 24$ et écrit : « $x \geqslant -4$ ».

(b) Inès affirme : « $x^2 = -9$ a deux solutions, 3 et -3, et $x^2 = 0$ n'en a aucune. »

(c) Pour résoudre $(2x - 1)(x + 3) = 0$, Malik développe, obtient $2x^2 + 5x - 3 = 0$ et reste bloqué. Résous correctement.

Ex. 39 (suite)

(d) Sofia résout $3x - 2 < 10$ et écrit : « $S =]-\infty\,;4]$ ».

Ex. 40 ★★☆ **Deux compagnies de taxi** — Pour un trajet de x km, la compagnie A facture une prise en charge de 2 €, puis 1,60 € par km. La compagnie B facture une prise en charge de 8 €, puis 1,10 € par km.

(a) Calcule le prix d'un trajet de 10 km avec chaque compagnie.

(b) Exprime en fonction de x le prix $A(x)$ payé avec la compagnie A et le prix $B(x)$ payé avec la compagnie B.

(c) Résous l'équation $A(x) = B(x)$.

(d) Résous $B(x) < A(x)$. À partir de quelle distance la compagnie B est-elle plus avantageuse ?

Ex. 41 ★★★ **Le bénéfice d'un atelier de confitures** — Un atelier fabrique et vend x centaines de pots de confiture, avec $0 \leqslant x \leqslant 20$. Son bénéfice, en euros, est donné par $B(x) = -20(x - 3)(x - 15)$.

(a) Calcule $B(5)$ et interprète le résultat.

(b) Résous $B(x) = 0$ sans développer. Interprète les solutions.

(c) Complète le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\,;20]$.

x	0		...		...		20
-20		...	...	...	...	...	
x − 3		...	...	...	...	...	
x − 15		...	...	...	...	...	
B(x)		...	...	...	...	...	

(d) Pour quelles quantités l'atelier réalise-t-il un bénéfice strictement positif ? Donne S sous forme d'intervalle.

(e) Calcule $B(0)$. Montre que $B(x) = B(0)$ équivaut à $x(x - 18) = 0$, puis résous cette équation.

Ex. 42 ★★★ **Le potager d'Ilyès** — Ilyès a un potager carré de x mètres de côté. Il le transforme en rectangle : il allonge un côté de 3 m et raccourcit l'autre de 3 m. On suppose $x > 3$.

(a) Exprime l'aire du rectangle en fonction de x, sous forme développée.

(b) Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle vaut-elle 16 m² ? Justifie.

(c) Mila affirme : « Le rectangle a toujours le même périmètre que le carré. » Vrai ou faux ? Justifie par un calcul.

(d) Ilyès voudrait que le rectangle ait la même aire que le carré. Est-ce possible ? Justifie par une équation.

(e) Quel côté exact donne un carré de 8 m² ? Arrondis au centimètre. Ilyès peut-il alors faire son rectangle ? Justifie.