1re tronc commun / Fonctions affines et lectures graphiques — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Rappels de 2nde : fonctions linéaires et affines*

Ex. 1 ★☆☆ **Reconnaître une fonction affine**

(a) Le nombre qui multiplie x est -3 : $m = -3$. Le nombre seul est 7 : $p = 7$.

(b) $g(x) = 0 \times x + (-4)$: $m = 0$ et $p = -4$. g est affine (constante).

(c) $h(0) = -1$, $h(1) = 0$, $h(2) = 3$. Quand x augmente de 1, $h(x)$ varie de $+1$ puis de $+3$: la variation n'est pas constante. h n'est pas affine (il y a un terme en x^2).

(d) Faux. $k(1) = 6$, $k(2) = 3$, $k(3) = 2$: $k(x)$ varie de -3 puis de -1, pas de façon constante. $\frac{6}{x}$ n'est pas de la forme mx : k n'est ni linéaire ni affine.

(e) $\ell(x) = 0{,}2x + 1{,}5$, donc $m = 0{,}2$. Comme $m > 0$, ℓ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(f) $q(x) = 0{,}25x$: q est linéaire, de coefficient 0,25. $q(0) = 0$, donc sa droite passe par l'origine.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : images, antécédents, droites**

(a) $f(-4) = -5 \times (-4) + 2 = 20 + 2 = 22$.

(b) On résout $4x + 7 = -5$: $4x = -12$, donc $x = -3$. L'antécédent de -5 est -3.

(c) $m = \frac{8-(-2)}{5-1} = \frac{10}{4} = 2{,}5$.

(d) $-4 \times (-2) + 3 = 8 + 3 = 11 = y_E$: le point E appartient à la droite.

(e) $N(x) = \left(1 + \frac{8}{100}\right) x = 1{,}08x$: N est linéaire, de coefficient 1,08.

(f) $h(x) = mx$ avec $m = \frac{12}{5} = 2{,}4$. Donc $h(-2) = 2{,}4 \times (-2) = -4{,}8$.

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs d'Inès**

(a) $f(x) = -0{,}5x + 6$: le nombre qui multiplie x est $-0{,}5$, donc $m = -0{,}5$, et le nombre seul est 6, donc $p = 6$. Inès a inversé m et p.

(b) Non. $m = -0{,}5 < 0$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 3 (suite)

(c) Inès a calculé l'image de 8 au lieu de son antécédent. Pour trouver l'antécédent, on résout $6 - 0{,}5x = 8$: $-0{,}5x = 2$, donc $x = \frac{2}{-0{,}5} = -4$. L'antécédent de 8 par f est -4.

(d) $f(-6) = 6 - 0{,}5 \times (-6) = 6 + 3 = 9$.

(e) $f(14) = 6 - 0{,}5 \times 14 = 6 - 7 = -1 = y_P$: le point P appartient à C_f.

Ex. 4 ★★☆ **Location de voiture**

(a) $P(x) = 0{,}25x + 35$: $m = 0{,}25$ (prix par km) et $p = 35$ (forfait).

(b) $P(180) = 0{,}25 \times 180 + 35 = 45 + 35 = 80$. Pour 180 km, Zoé paie 80 €.

(c) On résout $0{,}25x + 35 = 97{,}5$: $0{,}25x = 62{,}5$, donc $x = 250$. Zoé a parcouru 250 km.

(d) $P(100) = 60$ et $P(200) = 85$. La distance double, mais pas le prix ($2 \times 60 = 120 \neq 85$). Le prix n'est pas proportionnel au nombre de kilomètres, à cause du forfait.

(e) $Q(x) = 1{,}04 \times (0{,}25x + 35) = 0{,}26x + 36{,}4$. Le nouveau tarif est donc de 36,40 € de forfait plus 0,26 € par km.

Ex. 5 ★★★ **Trois formules de vélo électrique**

(a) $A(x) = 0{,}4x$: le prix est proportionnel à la distance et la droite passe par l'origine, donc A est linéaire (et donc aussi affine, avec $p = 0$). $B(x) = 0{,}15x + 12$: B est affine, avec $m = 0{,}15$ et $p = 12$, mais pas linéaire car $B(0) = 12 \neq 0$. $C(x) = 30$: C est affine, avec $m = 0$ et $p = 30$ (fonction constante), mais pas linéaire.

(b) On cherche l'antécédent de 21 par B (et non $B(21)$) : $12 + 0{,}15x = 21$, donc $0{,}15x = 9$ et $x = \frac{9}{0{,}15} = 60$. Juliette a parcouru 60 km.

(c) $0{,}15x + 12 < 0{,}4x \iff 12 < 0{,}25x \iff x > \frac{12}{0{,}25} = 48$. La formule B est moins chère que la formule A pour plus de 48 km. Contrôle : pour 50 km, B coûte 19,5 € et A coûte 20 €.

(d) $12 + 0{,}15x \leqslant 30 \iff 0{,}15x \leqslant 18 \iff x \leqslant 120$. La formule B coûte au plus autant que la formule C jusqu'à 120 km. Contrôle : pour 100 km, B coûte 27 €, donc moins de 30 €.

Ex. 5 **(suite)**

(e) Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$. Donc $A_2(x) = 1{,}05 \times 0{,}4x = 0{,}42x$. C'est encore une fonction linéaire, de coefficient 0,42.

Ex. 6 ★★★ **Le réservoir du groupe électrogène**

(a) $m = \frac{33-48}{7-2} = \frac{-15}{5} = -3$. Chaque heure, le réservoir perd 3 L. Comme $m < 0$, V est décroissante.

(b) $V(t) = -3t + p$ et $V(2) = 48$, donc $-3 \times 2 + p = 48$, soit $p = 54$. Ainsi $V(t) = -3t + 54$. Comme $p = V(0) = 54$, le réservoir contient 54 L au départ.

(c) On résout $V(t) = 0$: $-3t + 54 = 0 \iff 3t = 54 \iff t = 18$. Le réservoir est vide au bout de 18 h.

(d) $V(10) = -3 \times 10 + 54 = 24$ et $24 \neq 25$, donc le point E n'appartient pas à la droite.

(e) $V(9) = -3 \times 9 + 54 = 27$ et la moitié du volume de départ vaut $\frac{54}{2} = 27$. Léo a raison.

2. *Lire une courbe : images, antécédents, signe, variations*

Ex. 7 ★☆☆ **Automatismes : lire un tableau de valeurs**

(a) L'image se lit sur la 2e ligne : $g(4) = 0$.

(b) On cherche 4 sur la 2e ligne et on lit l'abscisse au-dessus. 4 n'y apparaît qu'une fois : le seul antécédent de 4 lu dans le tableau est -3.

(c) La valeur -2 apparaît deux fois sur la 2e ligne : les antécédents de -2 sont -1 et 2.

(d) $g(5) = 3$.

(e) Un nombre a une seule image : $g(0) = 1$. Le 4 est un nombre de départ dont l'image vaut 0 : c'est un antécédent de 0, pas une image.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : point sur une courbe**

(a) $h(-2) = (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$.

(b) $h(2) = 4 - 6 + 1 = -1$: c'est bien l'ordonnée de A, donc $A \in C_h$.

(c) $h(-1) = 1 + 3 + 1 = 5$ et $5 \neq 3$, donc $B \notin C_h$.

(d) $h(0{,}5) = 0{,}25 - 1{,}5 + 1 = -0{,}25$.

(e) $x^2 - 3x + 1 = 1$ donne $x^2 - 3x = 0$, soit $x(x-3) = 0$. Produit nul : $x = 0$ ou $x = 3$. Les antécédents de 1 sont 0 et 3.

Ex. 9 ★★☆ **Exploiter un tableau de variations**

(a) La plus grande valeur de la 2e ligne est 4 : le maximum de f est 4, atteint en $x = 2$.

(b) On compare les valeurs aux bornes : $-4 < -1$. Le minimum de f est -4, atteint en $x = -5$, à une borne.

(c) -4 et -2 sont dans $[-5\,;2]$, où f est croissante. Comme $-4 < -2$, on a $f(-4) < f(-2)$.

(d) Sur $[2\,;6]$, f décroît de $f(2) = 4$ à $f(6) = -1$. Donc, pour tout $x \in [2\,;6]$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

(e) Sur $[-5\,;2]$, f croît de -4 à 4 : elle prend la valeur -2 une seule fois. Sur $[2\,;6]$, f décroît de 4 à -1, donc $f(x) \geqslant -1 > -2$: aucune solution. L'équation $f(x) = -2$ a donc une seule solution.

Ex. 10 ★★☆ **Température relevée pendant la nuit**

(a) Le point d'abscisse 7 a pour ordonnée 2 : $T(7) = 2$ °C.

(b) Les points d'ordonnée 0 ont pour abscisses 2 et 6 : la température vaut 0 °C à 2 h et à 6 h.

(c) Le signe de $T(t)$ dépend de la position des points par rapport à l'axe des abscisses, pas du signe de t. $T(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;2]$ et sur $[6\,;8]$, et $T(t) < 0$ sur $]2\,;6[$.

(d) La plus petite ordonnée est -3 : la température minimale est -3 °C, atteinte à $t = 4$, donc à 4 h.

(e) Le point d'abscisse 1 a pour ordonnée 1 : $T(1) = 1$ °C. Entre 6 h et 7 h, la température passe de 0 °C à 2 °C : elle vaut 1 °C vers $t \approx 6{,}5$. Ailleurs, elle ne vaut jamais 1 °C. Les instants cherchés sont donc 1 h et environ 6 h 30.

Ex. 11 ★★★ **Juger des affirmations sur un tableau de variations**

(a) Non. Le tableau donne seulement $f(-2) = 3$ et $f(3) = -4$. Comme f est décroissante sur $[-2\,;3]$ et que $-2 < 0 < 3$, on sait seulement que $-4 \leqslant f(0) \leqslant 3$. La valeur $f(0) = 1$ est possible, mais le tableau ne permet pas de l'affirmer : il ne donne pas les valeurs intermédiaires.

(b) Vrai. -1 et 2 sont tous les deux dans $[-2\,;3]$, où f est décroissante. Comme $-1 < 2$, l'ordre est inversé : $f(-1) > f(2)$.

(c) Non. 0 est dans $[-2\,;3]$ et 6 est dans $[3\,;8]$: f ne garde pas le même sens de variation entre 0 et 6. On sait seulement que $-4 \leqslant f(0) \leqslant 3$ et $-4 \leqslant f(6) \leqslant -1$. Par exemple, $f(0)$ peut valoir 2, et alors $f(0) > f(6)$. On ne peut donc pas comparer $f(0)$ et $f(6)$.

Ex. 11 **(suite)**

(d) 8 est une abscisse (une borne de l'intervalle), pas une valeur de f. Le maximum est la plus grande valeur de la 2e ligne : c'est 3, atteint en $x = -2$ (à une borne). Le minimum de f est -4, atteint en $x = 3$.

(e) Sur $[-2\,;3]$, f décroît de 3 à -4 : elle passe une seule fois par 0, en un nombre α compris entre -2 et 3. Sur $[3\,;8]$, f croît de -4 à -1, donc $f(x) \leqslant -1 < 0$: pas de solution. L'équation a donc une seule solution. Signe :

x	-2	α	8
f(x)	+	0	−

Donc $f(x) > 0$ sur $[-2\,;\alpha[$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha\,;8]$.

Ex. 12 ★★★ **Le vol d'un drone**

(a) On part de $t = 6$ sur l'axe des abscisses et on lit l'ordonnée du point : $h(6) = 2$. Le drone est à $2 \times 10 = 20$ m.

(b) On lit les abscisses des points d'ordonnée 5 : $t = 2$ et $t = 4$. Il y a donc deux antécédents de 5. Aucun point n'a pour ordonnée 7 (la plus grande ordonnée est 6) : 7 n'a aucun antécédent.

(c) La plus grande ordonnée est 6, au point d'abscisse 3. L'altitude maximale est donc $6 \times 10 = 60$ m, atteinte à $t = 3$ min.

(d) $h(0) = 1 < 3$ et $h(1) = 3$: l'altitude atteint 3 à $t = 1$. Ensuite $h(t) \geqslant 3$ jusqu'à $t = 5$, car $h(5) = 3{,}5$. Entre $t = 5$ et $t = 6$, h passe de 3,5 à 2 : elle perd 1,5 en 1 min. Pour perdre 0,5, il faut $\frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}$ min, soit 20 s.
Donc $h(t) \geqslant 3$ sur $[1\,;\frac{16}{3}]$: de 1 min à 5 min 20 s.

(e) h est croissante sur $[0\,;3]$ et décroissante sur $[3\,;7]$:

t	0		3		7
h(t)	1	↗	6	↘	0,5

Le minimum de h est 0,5, atteint à $t = 7$ (une borne), soit 5 m. Ce n'est pas 1 : la valeur au départ est plus grande que celle à l'arrivée.

3. *Fonctions affines et coefficient directeur*

Ex. 13 ★☆☆ **Automatismes : lire m et p**

(a) $f(x) = -3x + 7$: le coefficient directeur est $m = -3$ (le nombre qui multiplie x), et l'ordonnée à l'origine est $p = 7$.

(b) $g(x) = \frac{1}{4}x - 6$, donc $m = \frac{1}{4} > 0$: g est croissante.

Ex. 13 **(suite)**

(c) $h(x) = 0 \times x - 9$, donc $m = 0$: h est constante.

(d) $k(x) = 2x - 10$, donc $m = 2$ et $p = -10$.

(e) $v(x) = -5x + \frac{1}{2}$, soit $v(x) = -5x + 0{,}5$.

Ex. 14 ★★☆ **Automatismes : coefficient directeur à partir de deux points**

(a) $m = \frac{10-4}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$.

(b) $m = \frac{-7-5}{1-(-2)} = \frac{-12}{3} = -4$.

(c) $m = \frac{-7-(-1)}{-1-(-5)} = \frac{-6}{4} = -1{,}5$.

(d) $m = \frac{3-3}{6-0} = 0$: la droite est horizontale et la fonction est constante.

(e) $x_L - x_K = 4 - 4 = 0$: on ne peut pas diviser par 0. La droite est verticale, donc elle n'a pas de coefficient directeur.

(f) $m = \frac{4-(-2)}{2-(-6)} = \frac{6}{8} = 0{,}75$.

Ex. 15 ★★☆ **Trois élèves, une droite**

(a) Inès a oublié le signe de $x_P = -3$: $1 - (-3) = 4$, pas $1 - 3$.
Donc $m = \frac{-6-2}{1-(-3)} = \frac{-8}{4} = -2$.

(b) Non : Hugo a inversé le calcul. Il obtient $\frac{4}{-8} = -0{,}5$. Or on divise la variation des ordonnées par celle des abscisses, et le bon résultat est $m = -2$.

(c) Non : en haut, il calcule $y_P - y_Q$, et en bas $x_Q - x_P$. L'ordre n'est pas le même en haut et en bas, donc le signe est faux : $m = -2$ et non 2.

(d) Comme $m = -2 < 0$, la fonction est décroissante : quand x augmente de 1, y diminue de 2.

Ex. 16 ★★☆ **Location de vélo**

(a) $m = \frac{f(8)-f(3)}{8-3} = \frac{25{,}20-13{,}20}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

(b) Quand la durée augmente de 1 h, le prix augmente de 2,40 € : chaque heure de location coûte 2,40 €.

(c) $f(3) = 2{,}4 \times 3 + p = 13{,}20$, donc $p = 13{,}20 - 7{,}20 = 6$. C'est un prix fixe de 6 €, payé quelle que soit la durée de location. On a donc $f(x) = 2{,}4x + 6$.

(d) On résout $2{,}4x + 6 = 30$, soit $2{,}4x = 24$, donc $x = 10$. La location de Nora a duré 10 h.

Ex. 17 ★★★ **Le réservoir du camping-car**

(a) $m = \frac{37-52}{10-4} = \frac{-15}{6} = -2{,}5$. Le volume d'eau diminue de 2,5 L par minute.

Ex. 17 **(suite)**

(b) $f(4) = 52$ donne $-2{,}5 \times 4 + p = 52$, soit $-10 + p = 52$, donc $p = 62$. Ainsi $f(t) = -2{,}5t + 62$. $p = f(0) = 62$: au départ, le réservoir contient 62 L.

(c) $m = -2{,}5 < 0$, donc f est décroissante : le volume d'eau baisse au fil du temps.

(d) $f(t+1) - f(t) = -2{,}5(t+1) + 62 - (-2{,}5t + 62) = -2{,}5t - 2{,}5 + 62 + 2{,}5t - 62 = -2{,}5$. Le résultat vaut toujours $-2{,}5$, c'est-à-dire m : il ne dépend pas de t. Yanis a tort.

(e) $-2{,}5t + 62 = 0 \iff -2{,}5t = -62 \iff t = \frac{-62}{-2{,}5} = 24{,}8$. Comme $0{,}8 \text{ min} = 0{,}8 \times 60 = 48$ s, le réservoir est vide au bout de 24 min 48 s.

Ex. 18 ★★★ **Enquête sur cinq points**

(a) $m = \frac{6-3}{2-(-4)} = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

(b) Quand x augmente de 1, y augmente de $m = 0{,}5$. Donc, quand x augmente de 4, y augmente de $4 \times 0{,}5 = 2$.

(c) $x_B = x_C = 2$, donc $x_C - x_B = 2 - 2 = 0$: on ne peut pas diviser par 0. La droite (BC) est verticale et n'a pas de coefficient directeur. Lila a tort.

(d) $m = \frac{6-6}{8-2} = \frac{0}{6} = 0$. Le coefficient directeur est nul : la fonction affine est constante, égale à 6.

(e) $m = \frac{1-3}{-10-(-4)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$. Or $\frac{1}{3} \neq 0{,}5$: les droites (AE) et (AB) n'ont pas le même coefficient directeur. Les points A, B et E ne sont donc pas alignés.

4. *Résoudre graphiquement $f(x) = k$ et $f(x) < k$*

Ex. 19 ★☆☆ **Lire un tableau de variations**

(a) 0 est compris entre 5 et -1 (1re flèche) et entre -1 et 2 (2e flèche) : il y a 2 solutions.

(b) 3 est compris entre 5 et -1, mais il est supérieur à 2 : il y a 1 seule solution, sur $[-3\,;1]$.

(c) -1 est le minimum, atteint seulement en $x = 1$: $S = \{1\}$
(on donne l'abscisse, pas -1).

(d) Le maximum de f vaut 5, donc on a toujours $f(x) \leqslant 5$. La réponse s'arrête aux bornes du tableau : $S = [-3\,;4]$ (et non $\mathbb{R}$).

(e) Pour tout x de $[-3\,;4]$, on a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 5$.

(f) Le minimum vaut -1, donc on n'a jamais $f(x) < -1$: $S = \varnothing$.

Ex. 20 ★★☆ **Avec la fonction carré**

(a) $(-4)^2 = 16$ et $4^2 = 16$: $S = \{-4\,;4\}$.

(b) -4 n'est pas dans $[-1\,;6]$: $S = \{4\}$.

(c) La parabole est sous la droite $y = 9$ entre -3 et 3, bornes comprises : $S = [-3\,;3]$.

(d) $1{,}5^2 = 2{,}25$ et $(-1{,}5)^2 = 2{,}25$. La parabole est strictement au-dessus de la droite $y = 2{,}25$ à gauche de $-1{,}5$ et à droite de 1,5, bornes exclues : $S =]-\infty\,;-1{,}5[\cup]1{,}5\,;+\infty[$.

(e) Un carré n'est jamais négatif, la parabole ne descend jamais sous la droite $y = -4$: $S = \varnothing$.

(f) La parabole ne touche la droite $y = 0$ qu'en un seul point, l'origine : $S = \{0\}$.

Ex. 21 ★★☆ **Le réservoir d'eau**

(a) La droite $y = 3$ passe par les points d'abscisses 1 et 6, et elle coupe le segment qui va de $(2\,;4)$ à $(3\,;2)$ en son milieu, à l'abscisse 2,5.
Donc $S = \{1\,;2{,}5\,;6\}$.

(b) $h(t) = 1$ en $t = 3{,}5$ (milieu du segment de 2 à 0) et en $t = 5$. La courbe est strictement sous la droite entre ces deux valeurs : $S =]3{,}5\,;5[$. En $t = 0$, $h(0) = 1$ n'est pas strictement inférieur à 1.

(c) $h(t) = 2$ en $t = 0{,}5$, en $t = 3$ et en $t = 5{,}5$. Avec les bornes incluses : $S = [0{,}5\,;3] \cup [5{,}5\,;6]$.

(d) Non. 4 est la hauteur. On cherche l'abscisse du point de hauteur 4 : c'est $t = 2$, donc $S = \{2\}$. D'ailleurs $h(4) = 0$.

Ex. 22 ★★☆ **Deux tarifs de location de vélo**

(a) f : 6 ; 10 ; 18 ; 26. g : 0 ; 7 ; 21 ; 35.

(b) $2x + 6 = 3{,}5x$ donne $1{,}5x = 6$, donc $x = 4$: $S = \{4\}$. La solution est l'abscisse du point d'intersection, pas le prix. Le prix commun est $f(4) = 2 \times 4 + 6 = 14$ euros, et $g(4) = 3{,}5 \times 4 = 14$ le confirme.

(c) Les droites se coupent en $x = 4$. Test : $f(2) = 10 > g(2) = 7$, mais $f(6) = 18 < g(6) = 21$. C_f est donc sous C_g après 4 : $S =]4\,;10]$. On exclut 4 (inégalité stricte) et on inclut 10 (borne de l'intervalle). Le tarif A est moins cher au-delà de 4 heures.

(d) $2x + 6 = 20$ donne $x = 7$. La droite monte car $m = 2 > 0$, donc $f(x) \leqslant 20$ pour $x \leqslant 7$: $S = [0\,;7]$. Hugo peut louer le vélo jusqu'à 7 heures.

Ex. 23 ★★★ **Tout ce que dit un tableau de variations**

(a) Sur $[-5\,;-1]$, f croît de -2 à 4 : -2 est atteint seulement en $x=-5$ (une borne de l'ensemble de définition). Sur $[-1\,;2]$, f décroît strictement : -2 n'est atteint qu'une fois, en $x=1$. Sur $[2\,;6]$, f croît strictement : -2 n'est atteint qu'une fois, en $x=4$.
Donc $S=\{-5\,;1\,;4\}$.

(b) Sur $[-5\,;-1]$, $f(x)\geqslant -2$: aucune solution. Sur $[-1\,;2]$, f décroît et vaut -2 en 1 : $f(x)<-2$ pour $x\in]1\,;2]$. Sur $[2\,;6]$, f croît et vaut -2 en 4 : $f(x)<-2$ pour $x\in[2\,;4[$. Les bornes 1 et 4 sont exclues car l'inégalité est stricte.
Donc $S=]1\,;4[$.

(c) Faux. Le maximum de f est bien 4, mais son minimum est -3, atteint en $x=2$: $f(2)=-3$, et l'inégalité $-3<f(2)$ est fausse. L'encadrement correct est $-3\leqslant f(x)\leqslant 4$.

(d) $f(x)=4$: 4 est le maximum, atteint seulement en $x=-1$. Sur la troisième flèche, f ne dépasse pas 1. Il y a donc une seule solution. $f(x)=-2{,}5$: sur la première flèche, $f(x)\geqslant -2$, donc aucune solution. $-2{,}5$ est strictement compris entre 4 et -3 (deuxième flèche) : une solution. Il est aussi strictement compris entre -3 et 1 (troisième flèche) : une solution. Il y a donc deux solutions.

(e) Pour avoir trois solutions, il faut une solution sur chacune des trois flèches. Les valeurs prises sont $[-2\,;4]$ sur la première flèche, $[-3\,;4]$ sur la deuxième et $[-3\,;1]$ sur la troisième. Il faut donc $-2\leqslant k\leqslant 1$. Ces valeurs de k sont différentes de 4 et de -3, les valeurs aux points communs $x=-1$ et $x=2$: on ne compte donc aucune solution deux fois. L'équation a exactement trois solutions pour $k\in[-2\,;1]$.

Ex. 24 ★★★ **La serre d'Inès**

(a) La droite $y=10$ coupe la ligne brisée aux points d'abscisses 2 et 6. On donne des instants, pas la valeur 10.
Donc $S=\{2\,;6\}$: il fait 10 °C à 8 h et à 12 h.

(b) Les points sont sur ou au-dessus de la droite $y=14$ de $t=3$ ($T=14$) à $t=5$ ($T=14$), en passant par $T(4)=16$. Les bornes sont incluses car l'inégalité est large.
Donc $S=[3\,;5]$.

Ex. 24 (suite)

(c) $T(0)=4$ et $T(1)=6$: sur $[0\,;1[$, la courbe est strictement sous $y=6$. Ensuite, $T(t)\geqslant 6$, et $T(8)=6$ n'est pas strictement inférieur à 6. La borne 0 de l'ensemble de définition est incluse, mais 1 est exclue.
Donc $S=[0\,;1[$.

(d) $m=\frac{10-14}{6-5}=-4$ et $p=14-(-4)\times 5=34$.
Donc $T(t)=-4t+34$ sur $[5\,;6]$.

(e) Sur chaque intervalle $[n\,;n+1]$, T et E sont affines, donc $T-E$ aussi : son signe se lit aux extrémités. Pour $t=0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5$, $T-E$ vaut $2\,;2\,;4\,;6\,;6\,;2$ (positif). Pour $t=6\,;7\,;8$, il vaut $-4\,;-8\,;-12$ (négatif). Les courbes ne se croisent donc que sur $[5\,;6]$.
On y résout $-4t+34=2t+2$, soit $-6t=-32$ et $t=\frac{16}{3}\approx 5{,}33$.
Donc $T(t)=E(t)$ pour $S=\{\frac{16}{3}\}$, et $T(t)>E(t)$ pour $t\in[0\,;\frac{16}{3}[$. La serre est plus chaude que l'extérieur jusqu'à 11 h 20.

5. *Équation réduite d'une droite*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : lire et utiliser une équation réduite**

(a) $y=4-3x=-3x+4$: le coefficient de x est $m=-3$ (et non 4), et $p=4$.

(b) Tous ses points ont pour ordonnée -2 : l'équation est $y=-2$
(ici $m=0$).

(c) Tous ses points ont pour abscisse -3 : l'équation est $x=-3$. C'est une droite verticale : elle n'a pas de coefficient directeur, donc pas d'équation réduite $y=mx+p$.

(d) d_1 a pour coefficient directeur $-0{,}4$ (le nombre devant x), et d_2 aussi. Elles ont le même m, donc d_1 et d_2 sont parallèles
(et distinctes, car $6\neq -1$).

(e) Pour $x=0$: $y=-2\times 0+1=1$, donc $(0\,;1)$. Pour $x=2$: $y=-2\times 2+1=-3$, donc $(2\,;-3)$. On trace la droite qui passe par ces deux points.

(f) $-2{,}5\times(-4)-1=10-1=9$, et on trouve bien l'ordonnée de C.
Donc C appartient à la droite.

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : calculer m et p**

(a) $p = y_A - m\,x_A = -1 - 4 \times 2 = -9$. Équation réduite : $y = 4x - 9$.

(b) $p = y_B - m\,x_B = 5 - (-0{,}75) \times (-4) = 5 - 3 = 2$.

(c) $m = \frac{2-(-6)}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$.

(d) La droite coupe l'axe des ordonnées en $H(0\,;-6)$, donc $p = -6$ (et non 3, qui est l'abscisse du point sur l'axe des abscisses). Par le calcul : $m = \frac{-6-0}{0-3} = 2$ et $p = 0 - 2 \times 3 = -6$.

(e) Les droites parallèles ont le même coefficient directeur, donc $m = 5$. $p = 4 - 5 \times 1 = -1$. Équation : $y = 5x - 1$.

Ex. 27 ★★☆ **Repère les erreurs de Lina**

(a) $m = \frac{-4-8}{5-(-3)} = \frac{-12}{8} = -1{,}5$. Lina a écrit $5 + 3$, ce qui revient à $5 - (-3)$: son coefficient directeur est juste.

(b) Lina a pris $x_A = 3$ au lieu de $x_A = -3$ (elle a oublié les parenthèses). Calcul correct : $p = 8 - (-1{,}5) \times (-3) = 8 - 4{,}5 = 3{,}5$.

(c) $-1{,}5 \times 5 + 3{,}5 = -7{,}5 + 3{,}5 = -4 = y_B$. Le point B vérifie l'équation, donc $p = 3{,}5$ est correct.

(d) Une droite a une équation en « $y =$ » : la droite (AB) a pour équation réduite $y = -1{,}5x + 3{,}5$ (c'est la courbe de la fonction $f : x \mapsto -1{,}5x + 3{,}5$).

Ex. 28 ★★☆ **Deux droites sécantes**

(a) $m = \frac{3-(-5)}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$, puis $p = -5 - 2 \times (-1) = -5 + 2 = -3$.
Donc $d_1 : y = 2x - 3$. Contrôle avec B : $2 \times 3 - 3 = 3 = y_B$.

(b) d_1 a pour coefficient directeur 2 et d_2 a pour coefficient directeur $-0{,}5$. Comme $2 \neq -0{,}5$, les droites ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

(c) On égale les deux expressions : $2x - 3 = -0{,}5x + 7$, donc $2{,}5x = 10$ et $x = 4$. Puis $y = 2 \times 4 - 3 = 5$ (contrôle : $-0{,}5 \times 4 + 7 = 5$).
Donc $I(4\,;5)$.

(d) d_3 est parallèle à d_2, donc $m = -0{,}5$. $p = 1 - (-0{,}5) \times (-2) = 1 - 1 = 0$.
Donc $d_3 : y = -0{,}5x$.

Ex. 29 ★★★ **Un quadrilatère dans un repère**

(a) $m_{(AB)} = \frac{4-2}{4-0} = \frac{2}{4} = 0{,}5$ et $m_{(DC)} = \frac{-1-(-6)}{6-(-4)} = \frac{5}{10} = 0{,}5$. Les deux droites ont le même coefficient directeur : (AB) et (DC) sont parallèles.

Ex. 29 (suite)

(b) $m_{(AD)} = \frac{-6-2}{-4-0} = \frac{-8}{-4} = 2$ et $m_{(BC)} = \frac{-1-4}{6-4} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$. Ces coefficients sont différents, donc (AD) et (BC) ne sont pas parallèles. $ABCD$ n'est pas un parallélogramme : c'est un trapèze, puisque seules (AB) et (DC) sont parallèles.

(c) $m = 0{,}5$ et $p = y_C - m\,x_C = -1 - 0{,}5 \times 6 = -1 - 3 = -4$. La droite (DC) a pour équation $y = 0{,}5x - 4$. Contrôle avec D : $0{,}5 \times (-4) - 4 = -2 - 4 = -6 = y_D$.

(d) $0{,}5 \times (-8) - 4 = -4 - 4 = -8$ et $-8 \neq -9$. Le point M n'appartient donc pas à (DC).

(e) B et E ont la même abscisse 4 (et $x_E - x_B = 0$) : (BE) est parallèle à l'axe des ordonnées. Elle a pour équation $x = 4$ et n'a pas d'équation réduite, car elle n'a pas de coefficient directeur. Pour l'intersection, on prend $x = 4$ dans $y = 0{,}5x - 4$: $y = 0{,}5 \times 4 - 4 = -2$. Le point d'intersection est $(4\,;-2)$.

Ex. 30 ★★★ **Trois cuves**

(a) $m = \frac{600-900}{5-2} = \frac{-300}{3} = -100$, puis $p = 900 - (-100) \times 2 = 900 + 200 = 1\,100$. La droite d_A a pour équation $y = -100x + 1\,100$. Contrôle avec le point $(5\,;600)$: $-100 \times 5 + 1\,100 = 600$.

(b) $p = 1\,100$: au départ ($x = 0$), la cuve A contient 1 100 L. $m = -100$ est négatif : la cuve perd 100 L par heure.

(c) La droite d_B passe par $(0\,;200)$ et a pour coefficient directeur 50 : son équation est $y = 50x + 200$. Deux points pour la tracer : $(0\,;200)$ et $(4\,;400)$, car $50 \times 4 + 200 = 400$.

(d) On égale les deux expressions : $-100x + 1\,100 = 50x + 200$, d'où $900 = 150x$ et $x = 6$. Ensuite $y = 50 \times 6 + 200 = 500$ (et $-100 \times 6 + 1\,100 = 500$). Au bout de 6 h, les deux cuves contiennent chacune 500 L.

(e) d_C est parallèle à l'axe des abscisses : son équation est $y = 700$ (et $m = 0$). On résout $-100x + 1\,100 < 700$, soit $-100x < -400$. On divise par -100, qui est négatif, donc le sens change : $x > 4$. Contrôle avec $x = 5$: $-100 \times 5 + 1\,100 = 600 < 700$. La cuve A est vide à $x = 11$ ($-100x + 1\,100 = 0$), donc $S =]4\,;11]$: la cuve A contient moins d'eau que la cuve C entre 4 h et 11 h.

6. *Signe d'une expression factorisée*

Ex. 31 ★☆☆ **Automatismes : signe d'un facteur du premier degré**

(a) $4x - 10 = 0$ donne $x = \frac{10}{4} = 2{,}5$.

(b) Non. $x + 7 = 0$ donne $x = -7$. Pour $x = 7$, on obtient $7 + 7 = 14 \neq 0$.

(c) $-3x + 12 = 0$ donne $x = 4$. Le coefficient de x est -3, négatif : à droite de 4, l'expression est négative.

(d) $9 - 2x$ s'annule en 4,5. Le coefficient de x est -2 : l'expression est positive avant 4,5. Elle est positive ou nulle sur $]-\infty\,;4{,}5]$.

(e) Le facteur 3 est positif, il ne change pas le signe : $3(x - 5) < 0$ pour $x - 5 < 0$, donc sur $]-\infty\,;5[$.

(f) $-x > 8$. On divise par -1, qui est négatif : le sens de l'inégalité change. $x < -8$, donc $S =]-\infty\,;-8[$.

Ex. 32 ★☆☆ **Automatismes : règle des signes**

(a) Pour $x = 1$: $x - 4 = -3$ est négatif et $x + 2 = 3$ est positif. Un seul « $-$ » : le produit est négatif (il vaut -9).

(b) $x - 6 = 0$ donne $x = 6$; $2x + 3 = 0$ donne $x = -1{,}5$. Dans l'ordre croissant : $-1{,}5$ puis 6.

(c) Pour $x = -10$: $x + 4 = -6$ et $x - 1 = -11$ sont négatifs, $x + 12 = 2$ est positif. Deux « $-$ », nombre pair : le produit est positif (il vaut 132).

(d) Entre 2 et 7 : $x - 2 > 0$ et $x - 7 < 0$. Avec le facteur -5, on compte deux « $-$ » : l'expression est positive. Contrôle avec $x = 3$: $-5 \times 1 \times (-4) = 20$.

(e) Faux. Pour $x = 3$: $1 - x = -2$ est négatif et $x + 6 = 9$ est positif. Un seul « $-$ » : le produit est négatif (il vaut -18).

Ex. 33 ★★☆ **Tableau de signes à compléter**

(a) $-2x + 5 = 0$ donne $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$ (et non $-2{,}5$). $x + 4 = 0$ donne $x = -4$.

(b) Dans l'ordre croissant : -4 puis 2,5. $-2x + 5$ a le signe de -2 à droite de 2,5 : $+$ puis $-$. $x + 4$: $-$ puis $+$ après -4.

x	$-\infty$		-4		2,5		$+\infty$
$-2x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
A(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a bien $A(-5) = -15$, $A(0) = 20$ et $A(3) = -7$.

Ex. 33 (suite)

(c) On lit les colonnes « $-$ » et on garde les 0 car l'inégalité est large : $S =]-\infty\,;-4] \cup [2{,}5\,;+\infty[$.

(d) $100 > 2{,}5$: dans la dernière colonne, $A(x)$ est négatif, donc $A(100) < 0$. Contrôle : $(-195) \times 104 = -20\,280$.

Ex. 34 ★★☆ **L'erreur de Lucas**

(a) $x - 2 = 0$ donne $x = 2$ et $x + 5 = 0$ donne $x = -5$. Lucas a inversé les signes : les racines sont -5 et 2.

(b) À l'extérieur des racines, $(x - 2)(x + 5)$ est positif. Le facteur -3 est négatif et inverse le signe : $B(x)$ est négatif à l'extérieur des racines. Par exemple, $B(10) = -360$.

(c) $B(x)$ est positif entre les racines. Les valeurs -5 et 2 sont exclues car l'inégalité est stricte : $S =]-5\,;2[$. Contrôle avec $x = 0$: $-3 \times (-2) \times 5 = 30 > 0$.

(d) $B(3) = -3 \times 1 \times 8 = -24$. Ce nombre est négatif et 3 n'est pas dans $]-5\,;2[$: c'est cohérent.

Ex. 35 ★★★ **Le bénéfice de l'atelier de bougies**

(a) $B(0) = -0{,}5 \times (-2) \times (-14) = -14$ et $B(6) = -0{,}5 \times 4 \times (-8) = 16$. Sans aucune vente, l'atelier perd 1\,400 €.

(b) Produit nul : $x - 2 = 0$ ou $x - 14 = 0$, donc $S = \{2\,;14\}$. Pour 2 et 14 centaines de bougies, le bénéfice est nul : ce sont les seuils de rentabilité.

(c) $x - 2$ s'annule en 2 et $x - 14$ en 14, avec le signe « $+$ » à droite de leur racine ; $-0{,}5$ est toujours négatif.

x	0		2		14		16
$-0{,}5$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
x − 2		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x − 14		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
B(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur $[0\,;2[$: trois « $-$ », donc $B(x) < 0$; sur $]2\,;14[$: deux « $-$ », donc $B(x) > 0$; sur $]14\,;16]$: un « $-$ », donc $B(x) < 0$.

(d) L'inégalité est stricte, donc 2 et 14 sont exclus : $S =]2\,;14[$. L'atelier fait un bénéfice pour une production strictement comprise entre 200 et 1\,400 bougies.

(e) Faux. $15 \in]14\,;16]$, où $B(x)$ est négatif. Calcul : $B(15) = -0{,}5 \times 13 \times 1 = -6{,}5$. L'atelier perd donc 650 €.

Ex. 36 ★★★ **Un facteur à l'envers**

(a) $9-3x=0$ donne $x=3$; $7-2x=0$ donne $x=\frac{7}{2}=3{,}5$. Dans l'ordre croissant : 3 puis 3,5.

(b) Dans $9-3x$, le coefficient de x est -3 : le facteur est positif avant 3 et négatif après. Dans $7-2x$, il est -2 : le facteur est positif avant 3,5 et négatif après.

x	$-\infty$		3		3,5		$+\infty$
$9-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$7-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
E(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

À droite de 3,5, deux « $-$ » : $E(x)>0$. Contrôle : $E(0)=63$ et $E(4)=3$.

(c) On lit la colonne « $-$ » et on garde les 0 car l'inégalité est large : $S=[3\,;3{,}5]$. Contrôle : $E(3{,}2)=-0{,}6\times 0{,}6=-0{,}36\leqslant 0$.

(d) Faux. Le facteur 5 est positif et ne change aucun signe. Mais $x-3$ est négatif avant 3 et positif après, à l'inverse de $9-3x$. Par exemple $E(0)=9\times 7=63>0$ alors que $F(0)=5\times(-3)\times 7=-105<0$. Les deux tableaux ont des signes opposés.

(e) Les racines sont -1 et 4. L'expression est négative à l'extérieur des racines, donc $a<0$. Par exemple $G(x)=-(x+1)(x-4)$. Contrôle : $G(0)=4>0$ entre les racines, et $G(5)=-6<0$.

7. *Équations, inéquations et produit nul*

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : équations du premier degré et quotient**

(a) $5x-2x=9+3$, donc $3x=12$ et $x=4$. Contrôle : $5\times 4-3=17$ et $2\times 4+9=17$. $S=\{4\}$.

(b) $x\neq 0$, donc $2{,}5x=8$ et $x=\frac{8}{2{,}5}=3{,}2$. $S=\{3{,}2\}$.

(c) $3x-x=0$, donc $2x=0$ et $x=0$. On ne divise pas par x : on perdrait la solution 0. $S=\{0\}$.

(d) $4x-4x=-6-1$ donne $0=-7$, ce qui est impossible. L'équation n'a aucune solution : $S=\varnothing$.

(e) En développant, on obtient $2x+6=2x+6$, ce qui est vrai pour tout x. $S=\mathbb{R}$.

(f) $1{,}5x-0{,}5x=-2-4$, donc $x=-6$. Contrôle : $1{,}5\times(-6)+4=-5$ et $0{,}5\times(-6)-2=-5$. $S=\{-6\}$.

Ex. 38 ★★☆ **Automatismes : carrés, produits nuls et inéquations**

(a) $36>0$, donc il y a deux solutions : $x=6$ ou $x=-6$. $S=\{-6\,;6\}$.

(b) $7>0$, donc il y a deux solutions : $x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$. $S=\{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\}$.

(c) $x-4=0$ ou $x+4=0$, donc $x=4$ ou $x=-4$. $S=\{-4\,;4\}$.

(d) $3x-6=0$ ou $5x+2=0$, donc $x=2$ ou $x=-\frac{2}{5}=-0{,}4$. $S=\{-0{,}4\,;2\}$.

(e) $-4x<20$. On divise par -4, qui est négatif, donc le sens change : $x>-5$. $S=]-5\,;+\infty[$.

(f) $2x-6x\geqslant 3+5$, donc $-4x\geqslant 8$. On divise par $-4<0$, donc le sens change : $x\leqslant -2$. $S=]-\infty\,;-2]$.

Ex. 39 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur d'un élève**

(a) Noé a divisé par -6, qui est négatif, sans changer le sens. On obtient $x\leqslant -4$, donc $S=]-\infty\,;-4]$.

(b) Un carré n'est jamais négatif : $3^2=9$ et $(-3)^2=9$, pas -9.
Donc $x^2=-9$ n'a aucune solution. De plus, $x^2=0$ a une solution : $x=0$.

(c) Malik ne doit pas développer : il faut annuler chaque facteur. $2x-1=0$ ou $x+3=0$, donc $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-3$. $S=\{-3\,;0{,}5\}$.

(d) $3x<12$ donne $x<4$. L'inégalité est stricte et $3\times 4-2=10$ n'est pas strictement inférieur à 10 : le crochet doit être ouvert en 4. $S=]-\infty\,;4[$.

Ex. 40 ★★☆ **Deux compagnies de taxi**

(a) A : $2+1{,}6\times 10=18$ €. B : $8+1{,}1\times 10=19$ €. Pour 10 km, la compagnie A est la moins chère.

(b) $A(x)=1{,}6x+2$ et $B(x)=1{,}1x+8$. Ce sont deux fonctions affines.

(c) $1{,}6x+2=1{,}1x+8$ donne $0{,}5x=6$, donc $x=12$. Contrôle : $A(12)=B(12)=21{,}2$ €. Les deux tarifs sont égaux pour 12 km.

(d) $1{,}1x+8<1{,}6x+2$ donne $-0{,}5x<-6$. On divise par $-0{,}5<0$, donc le sens change : $x>12$. $S=]12\,;+\infty[$. La compagnie B est plus avantageuse pour un trajet de plus de 12 km.

Ex. 41 ★★★ **Le bénéfice d'un atelier de confitures**

(a) $B(5) = -20 \times (5-3) \times (5-15) = -20 \times 2 \times (-10) = 400$. Pour 500 pots vendus, l'atelier fait un bénéfice de 400 €.

(b) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. $-20 \neq 0$, donc $x-3=0$ ou $x-15=0$, soit $x=3$ ou $x=15$. $S=\{3\,;15\}$. Pour 300 ou 1 500 pots, le bénéfice est nul.

(c) -20 est toujours négatif. $x-3$ s'annule en 3 et $x-15$ en 15 (coefficient $1>0$: négatif avant, positif après). Règle des signes :

x	0		3		15		20
-20		$-$		$-$		$-$	
x − 3		$-$	0	$+$		$+$	
x − 15		$-$		$-$	0	$+$	
B(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

(d) D'après le tableau, $B(x)>0$ pour $x \in]3\,;15[$ (crochets ouverts car l'inégalité est stricte). L'atelier fait un bénéfice strictement positif pour une production strictement comprise entre 300 et 1 500 pots.

(e) $B(0) = -20 \times (-3) \times (-15) = -900$. $B(x)=-900$ équivaut à $(x-3)(x-15)=45$ (on divise par -20), soit $x^2-18x+45=45$, donc $x^2-18x=0$, c'est-à-dire $x(x-18)=0$. On ne divise pas par x (on perdrait la solution 0) : produit nul, $x=0$ ou $x=18$. Les deux sont dans $[0\,;20]$: $S=\{0\,;18\}$. Vendre 1 800 pots donne la même perte (900 €) que ne rien vendre.

Ex. 42 ★★★ **Le potager d'Ilyès**

(a) Le rectangle mesure $x+3$ sur $x-3$. Son aire vaut $(x+3)(x-3) = x^2-3x+3x-9 = x^2-9$.

(b) $x^2-9=16$ donne $x^2=25$, soit $x=5$ ou $x=-5$. Comme $x>3$, on garde $x=5$. Contrôle : $8\times 2=16$. Le côté du carré doit mesurer 5 m.

(c) Le périmètre du rectangle vaut $2\big((x+3)+(x-3)\big) = 2\times 2x = 4x$, celui du carré vaut $4x$. L'égalité $4x=4x$ est vraie pour tout x : Mila a raison.

(d) $x^2-9=x^2$ donne $-9=0$, ce qui est impossible. L'équation n'a aucune solution, $S=\varnothing$: le rectangle a toujours 9 m² de moins que le carré. Ce n'est pas possible.

Ex. 42 **(suite)**

(e) $x^2=8$ a deux solutions, $\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$. Une longueur est positive, donc $x=\sqrt{8}\approx 2{,}83$ m. Mais $8<9$, donc $\sqrt{8}<3$: la condition $x>3$ n'est pas remplie (un côté mesurerait $\sqrt{8}-3<0$). Ilyès ne peut pas faire son rectangle.