1. Factoriser par un facteur commun

Ex. 1 ★☆☆ **Le bon facteur commun**

(a) Facteur commun : 9. On a $9t + 9 = 9 \times t + 9 \times 1 = 9(t + 1)$. Le 1 ne disparaît pas.

(b) Facteur commun : 11. On a $11a - 11 = 11 \times a - 11 \times 1 = 11(a - 1)$. Le signe $-$ reste dans la parenthèse.

(c) Le plus grand nombre qui divise 24 et 36 est 12. Donc $24x + 36 = 12 \times 2x + 12 \times 3 = 12(2x + 3)$.

(d) Facteur commun : a. On a $a^2 + 5a = a \times a + a \times 5 = a(a + 5)$.

(e) Facteur commun : $7x$. On a $7x - 7x^2 = 7x \times 1 - 7x \times x = 7x(1 - x)$.

(f) Facteur commun : 7. On a $35 + 14t = 7 \times 5 + 7 \times 2t = 7(5 + 2t)$.

(g) Facteur commun : 2 pour les nombres et t^2 pour la lettre, donc $2t^2$. On a $4t^3 + 6t^2 = 2t^2 \times 2t + 2t^2 \times 3 = 2t^2(2t + 3)$.

Ex. 2 ★☆☆ **Factorisations à compléter**

(a) $20x^2 = 5x \times 4x$ et $15x = 5x \times 3$, donc $20x^2 - 15x = 5x(4x - 3)$.

(b) $18t = 6 \times 3t$ et $6 = 6 \times 1$, donc $18t + 6 = 6(3t + 1)$.

(c) $3a \times 3a = 9a^2$ et $3a \times 4 = 12a$, donc $9a^2 + 12a = 3a(3a + 4)$.

(d) $0{,}5x^2 = 0{,}5x \times x$ et $2{,}5x = 0{,}5x \times 5$, donc $0{,}5x^2 + 2{,}5x = 0{,}5x(x + 5)$.

(e) $-8x = -4 \times 2x$ et $-20 = -4 \times 5$, donc $-8x - 20 = -4(2x + 5)$. Les signes changent dans la parenthèse.

(f) $2x^2 \times x = 2x^3$ et $2x^2 \times 5 = 10x^2$, donc le facteur manquant est $2x^2 : 2x^3 - 10x^2 = 2x^2(x - 5)$. Avec $2x$ seulement, la parenthèse contiendrait x^2 et non x.

Ex. 3 ★★☆ **Trois termes, décimaux et fractions**

(a) Le plus grand nombre qui divise 6, 9 et 15 est 3. Le terme 15 ne contient pas x, donc seul 3 est commun : $6x^2 - 9x + 15 = 3(2x^2 - 3x + 5)$. On vérifie : $3 \times 2x^2 - 3 \times 3x + 3 \times 5 = 6x^2 - 9x + 15$.

Ex. 3 (suite)

(b) Facteur commun : 2 pour les nombres et t dans les trois termes, donc $2t$. On a $10t^3 + 4t^2 - 8t = 2t(5t^2 + 2t - 4)$. On vérifie : $2t \times 5t^2 + 2t \times 2t - 2t \times 4 = 10t^3 + 4t^2 - 8t$.

(c) $1{,}2a^2 = 0{,}4a \times 3a$ et $0{,}4a = 0{,}4a \times 1$, donc $1{,}2a^2 - 0{,}4a = 0{,}4a(3a - 1)$.

(d) $\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{3}x \times x$ et $\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x \times 2$, donc $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x(x - 2)$.

(e) On met -2 en facteur, et tous les signes changent : $-4x^2 = -2 \times 2x^2$, $-6x = -2 \times 3x$ et $2 = -2 \times (-1)$. Donc $-4x^2 - 6x + 2 = -2(2x^2 + 3x - 1)$.

Ex. 4 ★★☆ **Le cahier de Yanis**

(a) $9x(x + 3) = 9x^2 + 27x$: c'est juste. 9 est le plus grand nombre qui divise 9 et 27, et x est dans les deux termes, donc c'est factorisé au maximum. Yanis a raison.

(b) $x(16x + 24) = 16x^2 + 24x$: c'est juste, mais $16x$ et 24 ont encore 8 en commun. Le plus grand facteur commun est $8x$: $16x^2 + 24x = 8x(2x + 3)$. Yanis s'est arrêté trop tôt.

(c) $-5(2t + 5) = -10t - 25$: c'est faux. Avec -5 en facteur, tous les signes changent : $25 = -5 \times (-5)$. Donc $-10t + 25 = -5(2t - 5)$.

(d) $5x(3x - 5) = 15x^2 - 25x$: c'est faux. Comme $5x = 5x \times 1$, le 1 ne disparaît pas : $15x^2 - 5x = 5x(3x - 1)$.

Ex. 5 ★★★ **La terrasse de Mehdi**

(a) $12x^2 = 6x \times 2x$ et $18x = 6x \times 3$, donc $A = 6x(2x + 3)$. L'aire d'un rectangle est le produit de ses deux côtés, donc l'autre côté de la terrasse mesure $2x + 3$ m.

(b) Pour $x = 5$: $A = 6 \times 5 \times (2 \times 5 + 3) = 30 \times 13 = 390$. L'aire de la terrasse est 390 m².

(c) $12x^2 = 3x \times 4x$ et $18x = 3x \times 6$, donc $A = 3x(4x + 6)$. Ici, le facteur $3x$ est imposé : on ne factorise pas au maximum. L'autre côté de cette terrasse mesure $4x + 6$ m.

Ex. 6 ★★★ **Le programme de Nora**

(a) Avec 5 : $5 \times 3 = 15$, puis $15 - 12 = 3$, puis $3 \times 5 = 15$. Avec -2 : $-2 \times 3 = -6$, puis $-6 - 12 = -18$, puis $-18 \times (-2) = 36$. On obtient 15, puis 36.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Le programme donne $x(3x-12)$. En développant : $x(3x-12) = x \times 3x - x \times 12 = 3x^2 - 12x$. Le résultat est bien égal à $3x^2 - 12x$.

(c) Non : $3(x^2 - 4x) = 3x^2 - 12x$ est juste, mais pas factorisé au maximum, car x^2 et $4x$ ont encore x en commun. Le facteur commun le plus grand est $3x$: $3x^2 - 12x = 3x \times x - 3x \times 4 = 3x(x-4)$. Nora a tort.

(d) On résout $3x(x-4) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $3x = 0$ ou $x - 4 = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 4$. Les solutions sont 0 et 4. Hugo a divisé par x : on n'a pas le droit de le faire si $x = 0$, alors il a perdu la solution 0.

Ex. 7 ★★★ **Des multiples garantis**

(a) Le plus grand nombre qui divise 12 et 18 est 6 : $12n + 18 = 6 \times 2n + 6 \times 3 = 6(2n+3)$. Comme $2n+3$ est un nombre entier, $12n + 18$ est toujours un multiple de 6.

(b) Le facteur commun le plus grand est $5n$: $15n^2 - 10n = 5n \times 3n - 5n \times 2 = 5n(3n-2)$. C'est toujours un multiple de 5, mais pas forcément de 10 : pour $n = 1$, on obtient $15 - 10 = 5$, qui n'est pas un multiple de 10. Lina a tort.

(c) $-14n - 21 = -7 \times 2n + (-7) \times 3 = -7(2n+3)$: tous les signes changent dans la parenthèse. Comme $2n+3$ est entier, $7(2n+3)$ est un multiple de 7, donc $-14n - 21$ est toujours l'opposé d'un multiple de 7.

(d) $n^2 + n = n \times n + n \times 1 = n(n+1)$: le 1 ne disparaît pas. n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair. Leur produit est donc toujours pair.

(e) Avec $n = 57$: $57^2 + 57 = 57 \times 58$. C'est le produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair. On calcule : $57 \times 58 = 3\,306$.
Donc $57^2 + 57 = 3\,306$.

Ex. 8 ★★★ **Trois copies pour une même expression**

(a) Noé : $6(3t^3 - 2t^2 + t) = 18t^3 - 12t^2 + 6t$. Lou : $3t(6t^2 - 4t + 2) = 18t^3 - 12t^2 + 6t$. Maé : $6t(3t^2 - 2t) = 18t^3 - 12t^2$. Les réponses de Noé et de Lou sont justes, celle de Maé est fausse.

(b) Seule la réponse de Maé est fausse. Maé a oublié le 1 : $6t = 6t \times 1$, donc il doit rester $+1$ dans la parenthèse. Il lui manque le terme $+6t$.

Ex. 8 **(suite)**

(c) Non. Chez Noé, les trois termes de la parenthèse contiennent encore t. Chez Lou, 6, 4 et 2 ont encore 2 en commun. Le plus grand nombre commun est 6 et la plus grande puissance de t commune est t (le dernier terme est $6t$).
Donc $E = 6t \times 3t^2 - 6t \times 2t + 6t \times 1 = 6t(3t^2 - 2t + 1)$.

(d) Le facteur commun est $-6t$ et tous les signes changent : $F = -6t \times 3t^2 + (-6t) \times (-2t) + (-6t) \times 1 = -6t(3t^2 - 2t + 1)$.
Donc $F = -6t(3t^2 - 2t + 1)$.

(e) Le plus grand nombre commun est 3 et la plus grande puissance de t commune est t^2 : $G = 3t^2 \times 3t - 3t^2 \times 2 = 3t^2(3t-2)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $3t^2 = 0$ ou $3t - 2 = 0$, donc $t = 0$ ou $t = \frac{2}{3}$. Les solutions sont 0 et $\frac{2}{3}$.

2. *Factoriser par une parenthèse commune*

Ex. 9 ★☆☆ **Parenthèse commune : premiers réflexes**

(a) Facteur commun : $x+7$. $(x+7)[(3x-2) + (x+5)] = (x+7)(4x+3)$.

(b) Facteur commun : $2t-1$. $(2t-1)[(t+6) - (3t-4)] = (2t-1)(t+6-3t+4) = (2t-1)(-2t+10)$.

(c) Le facteur commun $a+2$ est en seconde position dans le deuxième produit. $(a+2)[(5a-1) - (4a+3)] = (a+2)(5a-1-4a-3) = (a+2)(a-4)$.

(d) Facteur commun : $x-9$. $(x-9)(7x+2)$.

(e) Facteur commun : $3x+1$, en seconde position dans le premier produit. $(3x+1)[(x-8) - (x+2)] = (3x+1)(x-8-x-2) = (3x+1)(-10) = -10(3x+1)$.

(f) Facteur commun : $x+3$. $(x+3)(0{,}5x + 1{,}5)$.

Ex. 10 ★☆☆ **Faire apparaître la parenthèse**

(a) $(x-6)(x-6) + (x-6)(2x+5) = (x-6)[(x-6) + (2x+5)] = (x-6)(3x-1)$.

(b) $(4x+3)(x-1) + (4x+3) \times 1 = (4x+3)[(x-1) + 1] = x(4x+3)$.

(c) $(5t-2) \times 1 - (5t-2)(t+3) = (5t-2)[1 - (t+3)] = (5t-2)(1-t-3) = (5t-2)(-t-2)$.

(d) $2x + 8 = 2(x+4)$, donc $2(x+4) + (x+4)(x-9) = (x+4)[2 + (x-9)] = (x+4)(x-7)$.

Ex. 10 **(suite)**

(e) $3 - x = -(x - 3)$, donc l'expression vaut $(x - 3)(2x + 1) - (x - 3)(x + 5) = (x - 3)[(2x + 1) - (x + 5)] = (x - 3)(x - 4)$.

(f) $(2a + 1)(2a + 1) - (2a + 1)(a - 3) = (2a + 1)[(2a + 1) - (a - 3)] = (2a + 1)(2a + 1 - a + 3) = (2a + 1)(a + 4)$.

Ex. 11 ★★☆ **Les brouillons de Yanis**

(a) Devant le signe $-$, tous les signes de $(2x - 7)$ changent : le -7 devient $+7$. $(x + 5)[(3x - 4) - (2x - 7)] = (x + 5)(3x - 4 - 2x + 7) = (x + 5)(x + 3)$. La bonne forme factorisée est $(x + 5)(x + 3)$.

(b) Yanis a oublié le facteur 1 caché : $(6x - 1) = (6x - 1) \times 1$. $(6x - 1)[(x + 2) + 1] = (6x - 1)(x + 3)$. La bonne forme factorisée est $(6x - 1)(x + 3)$.

(c) $7 - x = -(x - 7)$: le signe $+$ devient un $-$. $(x - 7)(2x + 3) - (x - 7)(x - 1) = (x - 7)[(2x + 3) - (x - 1)] = (x - 7)(2x + 3 - x + 1) = (x - 7)(x + 4)$. La bonne forme factorisée est $(x - 7)(x + 4)$.

(d) Pour $x = 1$: $(1 + 5)(3 - 4) - (1 + 5)(2 - 7) = -6 + 30 = 24$ et $(1 + 5)(1 + 3) = 24$. Les deux valeurs sont égales, ce qui confirme la correction. La forme de Yanis donnait $6 \times (-10) = -60$: elle est bien fausse.

Ex. 12 ★★☆ **Factorisations à trous**

(a) $(x + 9)[(2x - 3) - (x - 8)] = (x + 9)(2x - 3 - x + 8) = (x + 9)(x + 5)$.

(b) Le reste doit vérifier $(x + 1) + (\ldots) = 4x - 5$, donc le trou vaut $4x - 5 - x - 1 = 3x - 6$: $(3x - 2)(x + 1) + (3x - 6)(3x - 2) = (3x - 2)(4x - 5)$.

(c) Le trou du second produit est forcément le facteur commun $2x + 1$, en seconde position : $(2x + 1)(x + 4) - (x - 2)(2x + 1) = (2x + 1)[(x + 4) - (x - 2)] = (2x + 1)(x + 4 - x + 2) = 6(2x + 1)$. Les trous valent $2x + 1$ et 6.

(d) Il faut deux restes de somme $3t - 1$, par exemple $2t + 3$ et $t - 4$: $(t + 2)(2t + 3) + (t + 2)(t - 4) = (t + 2)[(2t + 3) + (t - 4)] = (t + 2)(3t - 1)$. D'autres réponses sont possibles.

Ex. 13 ★★☆ **L'expression de Louna**

(a) Facteur commun : $x - 1$. $A = (x - 1)[(5x + 7) - (2x + 1)] = (x - 1)(5x + 7 - 2x - 1) = (x - 1)(3x + 6)$. Or $3x + 6 = 3(x + 2)$, donc la forme factorisée au maximum est $A = 3(x - 1)(x + 2)$.

Ex. 13 **(suite)**

(b) Pour $x = 2$: $A = 1 \times 17 - 1 \times 5 = 12$ et $3 \times 1 \times 4 = 12$. Les deux valeurs sont égales : la factorisation est confirmée pour cette valeur.

(c) $3(x - 1)(x + 2) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, et $3 \neq 0$, donc $x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$, soit $x = 1$ ou $x = -2$. Les solutions sont 1 et -2.

Ex. 14 ★★★ **Une expression en cinq questions**

(a) $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$ et $(x + 4)(3x - 2) = 3x^2 - 2x + 12x - 8 = 3x^2 + 10x - 8$.
Donc $E = 9x^2 - 12x + 4 - 3x^2 - 10x + 8$, soit $E = 6x^2 - 22x + 12$.

(b) Le carré cache le facteur : $(3x - 2)^2 = (3x - 2)(3x - 2)$. Le facteur commun $3x - 2$ est en seconde position dans le second produit. $E = (3x - 2)[(3x - 2) - (x + 4)] = (3x - 2)(3x - 2 - x - 4) = (3x - 2)(2x - 6)$. Comme $2x - 6 = 2(x - 3)$, on obtient $E = 2(3x - 2)(x - 3)$.

(c) Pour $x = -1$, on prend la forme développée : $E = 6 \times 1 + 22 + 12 = 40$. Pour $x = \frac{2}{3}$, on prend la forme factorisée : $3 \times \frac{2}{3} - 2 = 0$, donc $E = 0$. Ainsi $E = 40$ pour $x = -1$ et $E = 0$ pour $x = \frac{2}{3}$.

(d) $E = 0$ s'écrit $2(3x - 2)(x - 3) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $3x - 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$, donc $x = \frac{2}{3}$ ou $x = 3$. Les solutions sont $\frac{2}{3}$ et 3.

(e) Avec la forme développée, $6x^2 - 22x + 12 = 12$ donne $6x^2 - 22x = 0$, soit $2x(3x - 11) = 0$. Par la propriété du produit nul, $x = 0$ ou $3x - 11 = 0$, donc $x = 0$ ou $x = \frac{11}{3}$. Les solutions sont 0 et $\frac{11}{3}$.

Ex. 15 ★★★ **Le programme d'Inès**

(a) $7 - 5 = 2$, puis $2 \times 15 = 30$, puis $30 + 2 = 32$. Le programme donne 32.

(b) Le résultat est $(x - 5)(2x + 1) + (x - 5)$.

(c) Le terme seul vaut lui-même fois 1 : $(x - 5)(2x + 1) + (x - 5) \times 1 = (x - 5)[(2x + 1) + 1] = (x - 5)(2x + 2)$. Le second reste est 1, pas 0. Comme $2x + 2 = 2(x + 1)$, le résultat s'écrit $2(x - 5)(x + 1)$. Contrôle avec $x = 7$: $2 \times 2 \times 8 = 32$.

(d) On résout $2(x - 5)(x + 1) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, et $2 \neq 0$: $x - 5 = 0$ ou $x + 1 = 0$, donc $x = 5$ ou $x = -1$. Les solutions sont 5 et -1 : ce sont les nombres de départ qui donnent 0.

Ex. 15 **(suite)**

(e) Vrai. Si x est un entier, $(x-5)(x+1)$ est un entier. Le résultat $2(x-5)(x+1)$ est donc le double d'un entier : il est toujours pair.

Ex. 16 ★★★ **La serre de Soan**

(a) Aire du terrain moins aire de la serre : $A = (2x+1)(3x-12) - (x-4)(x+6)$.

(b) $3x-12 = 3(x-4)$, donc $A = 3(x-4)(2x+1) - (x-4)(x+6) = (x-4)[3(2x+1)-(x+6)]$. Devant le $-$, tous les signes changent : $A = (x-4)(6x+3-x-6) = (x-4)(5x-3)$.

(c) Pour $x = 10$: $(21 \times 18) - (6 \times 16) = 378 - 96 = 282$ et $(10-4)(5\times 10-3) = 6 \times 47 = 282$. Les deux écritures donnent 282, ce qui confirme la factorisation.

(d) Vrai. $4 - x = -(x-4)$ et $3 - 5x = -(5x-3)$, donc $(4-x)(3-5x) = [-(x-4)][-(5x-3)] = (x-4)(5x-3) = A$, car le produit de deux nombres négatifs est positif. Lina a raison.

(e) $(x-4)(5x-3) = 27(x-4)$ donne $(x-4)(5x-3) - 27(x-4) = 0$, soit $(x-4)[(5x-3)-27] = 0$, donc $(x-4)(5x-30) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x-4=0$ ou $5x-30=0$, donc $x=4$ ou $x=6$. Comme $x>5$, seule la valeur $x=6$ convient.

3. *Factoriser $a^2 - b^2$*

Ex. 17 ★☆☆ **Des différences de deux carrés**

(a) $x^2 - 169 = x^2 - 13^2 = (x+13)(x-13)$

(b) $64t^2 - 1 = (8t)^2 - 1^2 = (8t+1)(8t-1)$

(c) Le nombre est écrit en premier : $9 - 16a^2 = 3^2 - (4a)^2 = (3+4a)(3-4a)$

(d) On remet les termes dans l'ordre : $-x^2 + 144 = 144 - x^2 = 12^2 - x^2 = (12+x)(12-x)$

(e) $x^2 - \dfrac{1}{25} = x^2 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \left(x+\dfrac{1}{5}\right)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$

(f) $\dfrac{1}{9}t^2 - 4 = \left(\dfrac{1}{3}t\right)^2 - 2^2 = \left(\dfrac{1}{3}t+2\right)\left(\dfrac{1}{3}t-2\right)$

Ex. 18 ★☆☆ **Une différence de deux carrés ?**

(a) Non : c'est une somme de deux carrés, il n'y a pas de signe moins. $x^2 + 81$ ne se factorise pas avec $a^2 - b^2$.

(b) Oui : $100a^2 - 49 = (10a)^2 - 7^2 = (10a+7)(10a-7)$

(c) Non : $10t$ n'est pas un carré. On peut quand même mettre t en facteur : $t^2 - 10t = t(t-10)$.

Ex. 18 **(suite)**

(d) Non : 6 n'est pas le carré d'un entier. Au collège, $x^2 - 6$ ne se factorise pas avec des entiers.

(e) Non : $-x^2 - 36 = -(x^2+36)$, et x^2+36 est une somme de deux carrés. L'expression ne se factorise pas avec $a^2 - b^2$.

(f) Oui : $0{,}64 = 0{,}8^2$, donc $x^2 - 0{,}64 = (x+0{,}8)(x-0{,}8)$

Ex. 19 ★★☆ **Le cahier d'Inès**

(a) Non. $(x-16)^2$ est le carré d'une différence, pas un produit somme × différence. La bonne factorisation est $x^2 - 256 = x^2 - 16^2 = (x+16)(x-16)$. Inès a tort.

(b) Non. $49x^2$ est le carré de $7x$, pas de $49x$: $49x^2 = (7x)^2$. Donc $49x^2 - 1 = (7x+1)(7x-1)$. Inès a tort.

(c) Non. $(x+8)(x-8) = x^2 - 64$, pas $x^2 + 64$. Une somme de deux carrés ne se factorise pas avec $a^2 - b^2$. Inès a tort.

(d) Pour $x = 0$: $0^2 - 256 = -256$ et $(0-16)^2 = 256$. Les deux résultats sont différents, donc l'égalité $x^2 - 256 = (x-16)^2$ est fausse.

Ex. 20 ★★☆ **Garder la parenthèse en bloc**

(a) $(x-4)^2 - 49 = (x-4)^2 - 7^2 = (x-4+7)(x-4-7) = (x+3)(x-11)$. La forme factorisée est $(x+3)(x-11)$.

(b) On pose $a = 3x-2$ et $b = x+5$.
Donc $(3x-2)^2 - (x+5)^2 = [(3x-2)+(x+5)][(3x-2)-(x+5)] = (3x-2+x+5)(3x-2-x-5) = (4x+3)(2x-7)$. Attention : dans la deuxième parenthèse, le moins change les signes de $x+5$. La forme factorisée est $(4x+3)(2x-7)$.

(c) $36 - (t+1)^2 = 6^2 - (t+1)^2 = [6+(t+1)][6-(t+1)] = (6+t+1)(6-t-1) = (t+7)(5-t)$. La forme factorisée est $(t+7)(5-t)$.

(d) $9a^2 = (3a)^2$, donc $(2a+1)^2 - 9a^2 = (2a+1+3a)(2a+1-3a) = (5a+1)(1-a)$. La forme factorisée est $(5a+1)(1-a)$.

Ex. 21 ★★☆ **Facteur commun d'abord**

(a) 5 est un facteur commun : $5x^2 - 180 = 5(x^2-36) = 5(x^2-6^2) = 5(x+6)(x-6)$. La forme factorisée au maximum est $5(x+6)(x-6)$.

(b) $5(x+6)(x-6) = 0$. Comme $5 \neq 0$, un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x+6=0$ ou $x-6=0$, soit $x=-6$ ou $x=6$. Les solutions sont -6 et 6.

Ex. 21 **(suite)**

(c) $0{,}5$ est un facteur commun : $0{,}5x^2 - 8 = 0{,}5(x^2 - 16) = 0{,}5(x^2 - 4^2) = 0{,}5(x+4)(x-4)$. La forme factorisée au maximum est $0{,}5(x+4)(x-4)$.

(d) -2 est un facteur commun : $-2t^2 + 200 = -2(t^2 - 100) = -2(t^2 - 10^2) = -2(t+10)(t-10)$. La forme factorisée au maximum est $-2(t+10)(t-10)$. On peut aussi écrire $2(10+t)(10-t)$.

Ex. 22 ★★★ **Les nombres de Zélie**

(a) $15^2 - 14^2 = 225 - 196 = 29$ et $15 + 14 = 29$. La différence des carrés de 15 et 14 est égale à leur somme.

(b) $(n+1)^2 - n^2 = [(n+1)+n][(n+1)-n] = (2n+1)(n+1-n)$. Or $n+1-n = 1$, donc $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. De plus, $n + (n+1) = 2n+1$. Les deux expressions sont égales : l'affirmation de Zélie est vraie pour tous les nombres entiers consécutifs.

(c) D'après la question précédente, la différence vaut $2n+1$. On résout $2n+1 = 45$, donc $2n = 44$ et $n = 22$. Vérification : $23^2 - 22^2 = 529 - 484 = 45$. Les deux nombres sont 22 et 23.

(d) $\frac{1}{16}x^2 = \left(\frac{1}{4}x\right)^2$ et $9 = 3^2$, donc $\frac{1}{16}x^2 - 9 = \left(\frac{1}{4}x + 3\right)\left(\frac{1}{4}x - 3\right)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $\frac{1}{4}x + 3 = 0$ ou $\frac{1}{4}x - 3 = 0$, soit $x = -12$ ou $x = 12$. Les solutions sont -12 et 12.

Ex. 23 ★★★ **La terrasse de Sacha**

(a) L'aire carrelée est l'aire de la terrasse moins l'aire du massif : $(2x+3)^2 - (x-1)^2$.
Donc $A = (2x+3)^2 - (x-1)^2$.

(b) $A = 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 - 2x + 1) = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 2x - 1 = 3x^2 + 14x + 8$. La forme développée réduite est $A = 3x^2 + 14x + 8$.

(c) On pose $a = 2x+3$ et $b = x-1$, gardés en bloc : $A = [(2x+3)+(x-1)][(2x+3)-(x-1)] = (2x+3+x-1)(2x+3-x+1) = (3x+2)(x+4)$. La forme factorisée est $A = (3x+2)(x+4)$.

(d) La forme factorisée est la plus pratique : $A = (3\times 6 + 2)(6+4) = 20 \times 10 = 200$. Pour $x = 6$, l'aire carrelée est de 200 m².

(e) Avec la forme développée : $3x^2 + 14x + 8 = 8$ donne $3x^2 + 14x = 0$, donc $x(3x+14) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x = -\frac{14}{3}$. Aucune de ces valeurs ne vérifie $x > 1$. Ce n'est donc pas possible.

Ex. 24 ★★★ **Le programme de Noé**

(a) $2 + 3 = 5$; $5^2 = 25$; $4 \times 2^2 = 16$; $25 - 16 = 9$. Avec 2, le programme donne 9.

(b) $R = (x+3)^2 - 4x^2 = x^2 + 6x + 9 - 4x^2 = -3x^2 + 6x + 9$. La forme développée réduite est $R = -3x^2 + 6x + 9$.

(c) $4x^2 = (2x)^2$, donc $R = (x+3)^2 - (2x)^2 = [(x+3)+2x][(x+3)-2x] = (3x+3)(3-x)$. Le facteur $3x+3$ a encore 3 en facteur : $R = 3(x+1)(3-x)$. Factorisé au maximum, $R = 3(x+1)(3-x)$.

(d) $3(x+1)(3-x) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ($3 \neq 0$) : $x + 1 = 0$ ou $3 - x = 0$, donc $x = -1$ ou $x = 3$. Les nombres de départ qui donnent 0 sont -1 et 3.

(e) $R = 9$ donne $-3x^2 + 6x + 9 = 9$, donc $-3x^2 + 6x = 0$. Noé n'a pas le droit de diviser par x, car x peut valoir 0 : il perd une solution. On factorise : $-3x(x-2) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 2$. Les nombres de départ qui donnent 9 sont 0 et 2.

4. *Développer ou factoriser : choisir la bonne forme*

Ex. 25 ★☆☆ **La dernière opération décide**

(a) La dernière opération est une multiplication : c'est un produit, donc une forme factorisée. Développée, elle donne $2x^2 + x - 15$.

(b) On calcule d'abord le carré, puis on soustrait 36 : c'est une différence. Elle n'est ni développée (elle a des parenthèses) ni factorisée. Factorisée, elle donne $(t+4)(t-8)$.

(c) La dernière opération est l'addition de 1 : c'est une somme sans parenthèses, avec un seul terme en a^2, un seul terme en a et un nombre. C'est une forme développée réduite.

(d) La dernière opération est l'addition de 7 : c'est une somme. Elle a des parenthèses, donc elle n'est ni développée ni factorisée. Sa forme développée réduite est $3x^2 - 6x + 7$.

(e) Les dernières opérations sont des multiplications : c'est un produit, donc une forme factorisée. Développée, elle donne $-5t^2 - 15t + 20$.

Ex. 25 (suite)

(f) La dernière opération est la soustraction de $2x$: c'est une somme sans parenthèses, mais elle a deux termes en x. Elle est développée mais pas réduite : ce n'est donc ni une forme développée réduite ni une forme factorisée. Sa forme développée réduite est $x^2 + 4x$.

(g) La dernière opération est l'élévation au carré, c'est-à-dire une multiplication : $(2a+3)^2 = (2a+3)(2a+3)$. C'est un produit, donc une forme factorisée.

Ex. 26 ★☆☆ Deux formes au choix

(a) Forme développée : il ne reste que le nombre seul. $B = 0 + 0 - 8 = -8$.

(b) Forme factorisée : le facteur $x + 4$ vaut 0. $B = (-12 - 2) \times 0 = 0$.

(c) Forme factorisée : $3 \times \frac{1}{3} = 1$, donc $B = (1 - 2)\left(\frac{1}{3} + 4\right) = -1 \times \frac{13}{3} = -\frac{13}{3}$.

(d) Forme factorisée : $B = \left(-\frac{3}{2} - 2\right)\left(-\frac{1}{2} + 4\right) = -\frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = -\frac{49}{4}$.

(e) Forme factorisée : un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. $3x - 2 = 0$ ou $x + 4 = 0$, soit $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -4$. Les solutions sont $\frac{2}{3}$ et -4.

Ex. 27 ★★☆ Yanis et Lina ne trouvent pas pareil

(a) Avec la forme de Yanis : 26. Avec celle de Lina : $4 \times 6 = 24$. Les formes d'une même expression sont égales : des résultats différents montrent qu'il y a une erreur. L'expression de départ donne $25 - 1 = 24$: c'est Yanis qui s'est trompé.

(b) Yanis n'a pas changé tous les signes après le signe $-$ devant la parenthèse : $-(4x^2 - 4x + 1) = -4x^2 + 4x - 1$. On a donc $C = x^2 + 10x + 25 - 4x^2 + 4x - 1 = -3x^2 + 14x + 24$.

(c) C'est une différence de deux carrés : $C = [(x+5) + (2x-1)][(x+5) - (2x-1)] = (3x+4)(x+5-2x+1) = (3x+4)(6-x)$. Lina a raison.

(d) Avec la forme factorisée, $(3x+4)(6-x) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $3x + 4 = 0$ ou $6 - x = 0$, soit $x = -\frac{4}{3}$ ou $x = 6$. Les solutions sont $-\frac{4}{3}$ et 6.

Ex. 28 ★★☆ Un essai ne suffit pas

(a) Pour $x = 1$: $(1+2)(1-6) = 3 \times (-5) = -15$, mais $1^2 - 12 = -11$. On trouve deux résultats différents, donc l'égalité n'est pas vraie pour tout x : Inès a tort.

Ex. 28 (suite)

(b) $(x+2)(x-6) = x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12$. Elle est égale à $x^2 - 12$ seulement quand $-4x = 0$, c'est-à-dire pour $x = 0$. Un essai réussi ne prouve pas une égalité pour tout x.

(c) Je transforme le membre de gauche : $(2a-1)(a+3) + 4 = 2a^2 + 6a - a - 3 + 4 = 2a^2 + 5a + 1$. C'est le membre de droite : l'égalité est prouvée.

(d) Je développe les deux membres. À gauche : $a^2 - 2a + 4a - 8 - 1 = a^2 + 2a - 9$. À droite : $a^2 - a + 3a - 3 - 6 = a^2 + 2a - 9$. Les deux membres sont égaux pour tout nombre a.

Ex. 29 ★★☆ Le jeu des étiquettes

(a) A : $x^2 - 8x + 7$ et $(x-1)(x-7)$. B : $x^2 - 4$ et $(x+2)(x-2)$. C : $2x^2 - 13x + 15$ et $(2x-3)(x-5)$. D : $7x^2 - 8x + 1$ et $(7x-1)(x-1)$.

(b) En développant : $A = x^2 - 8x + 16 - 9 = x^2 - 8x + 7$. En factorisant : $A = (x-4)^2 - 3^2 = [(x-4)+3][(x-4)-3] = (x-1)(x-7)$.

(c) $(4 \times 2 - 1)^2 - 9 \times 2^2 = 49 - 36 = 13$; $7 \times 4 - 16 + 1 = 13$; $(14-1)(2-1) = 13 \times 1 = 13$. Les trois écritures donnent le même résultat, la ligne est cohérente
(cet essai ne prouve pas l'égalité, c'est le calcul littéral qui la prouve).

(d) Avec les formes factorisées : $A = (1-1)(1-7) = 0$ et $D = (7-1)(1-1) = 0$, mais $B = 3 \times (-1) = -3$ et $C = (-1) \times (-4) = 4$. Seules A et D valent 0 pour $x = 1$.

Ex. 30 ★★★ Une expression, cinq missions

(a) $D = 9x^2 - 6x + 1 - (x^2 + 6x + 9)$. Le signe $-$ devant la parenthèse change tous les signes : $D = 9x^2 - 6x + 1 - x^2 - 6x - 9 = 8x^2 - 12x - 8$. La forme développée réduite est $D = 8x^2 - 12x - 8$.

(b) D est une différence de deux carrés $a^2 - b^2$ avec $a = 3x - 1$ et $b = x + 3$. $D = [(3x-1) + (x+3)][(3x-1) - (x+3)] = (4x+2)(3x-1-x-3) = (4x+2)(2x-4)$. Or $4x + 2 = 2(2x+1)$ et $2x - 4 = 2(x-2)$. La forme factorisée au maximum est $D = 4(2x+1)(x-2)$.

(c) Avec la forme factorisée, le facteur 4 se simplifie : $D = 4 \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) \times \left(\frac{1}{4} - 2\right) = 4 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{21}{2}$. Pour contrôler avec la forme de départ : $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{1-169}{16} = -\frac{21}{2}$. Pour $x = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{21}{2}$.

Ex. 30 **(suite)**

(d) J'utilise la forme factorisée : $4(2x+1)(x-2)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Comme $4 \neq 0$, on a $2x+1=0$ ou $x-2=0$, donc $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=2$. Les solutions sont $-\frac{1}{2}$ et 2.

(e) J'utilise la forme développée : $8x^2-12x-8=-8$, donc $8x^2-12x=0$. Je factorise par $4x$: $4x(2x-3)=0$. D'après la propriété du produit nul, $4x=0$ ou $2x-3=0$, donc $x=0$ ou $x=\frac{3}{2}$. Si je divisais par x, je perdrais la solution 0. Les solutions sont 0 et $\frac{3}{2}$.

Ex. 31 ★★★ **Deux programmes jumeaux**

(a) Avec 3 : A donne $(3+5)^2-25=64-25=39$ et B donne $3\times 13=39$. Avec -2 : A donne $(-2+5)^2-25=9-25=-16$ et B donne $-2\times 8=-16$. Les deux programmes donnent le même résultat pour ces deux nombres.

(b) Non, son raisonnement n'est pas valable. Des essais réussis ne prouvent pas que l'égalité est vraie pour tous les nombres : il en existe une infinité. Seul un calcul littéral peut le prouver (question 4).

(c) $A=(t+5)^2-25$ et $B=t(t+10)$.

(d) En transformant les deux : $A=t^2+10t+25-25=t^2+10t$ et $B=t^2+10t$, donc $A=B$. En ne transformant que A : $A=(t+5)^2-5^2=[(t+5)+5][(t+5)-5]=(t+10)t=t(t+10)=B$. Pour tout nombre t, les deux programmes donnent le même résultat.

(e) J'utilise la forme factorisée : $t(t+10)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $t=0$ ou $t+10=0$, donc $t=0$ ou $t=-10$. Les solutions sont 0 et -10 : le programme A donne 0 seulement pour les nombres de départ 0 et -10.

Ex. 32 ★★★ **La place et son bassin**

(a) L'aire de la place est $(2a+1)^2$ et celle du bassin est $(a+2)^2$. Le bassin est creusé dans la place, donc l'aire qui reste est leur différence : $S=(2a+1)^2-(a+2)^2$.

(b) $(2a+1)^2-(a+2)^2$: la dernière opération est une soustraction, ce n'est ni une forme développée réduite ni une forme factorisée ; valeur $5^2-4^2=9$. $3(a+1)(a+3)$: forme factorisée ; valeur $3\times 3\times 5=45$. $3a^2-3$: forme développée réduite ; valeur $12-3=9$.

Ex. 32 **(suite)**

(c) Pour $a=2$, Noé trouve 45 au lieu de 9 : son écriture n'est pas égale à S. Pour Maëlys, un seul essai réussi ne prouve rien. Je développe : $S=4a^2+4a+1-(a^2+4a+4)=4a^2+4a+1-a^2-4a-4=3a^2-3$: l'écriture de Maëlys est égale à S. Noé a écrit $(2a+1)-a+2$ au lieu de $(2a+1)-(a+2)$. La bonne factorisation est $S=[(2a+1)+(a+2)][(2a+1)-(a+2)]=(3a+3)(a-1)=3(a+1)(a-1)$. Seule l'écriture de Maëlys est égale à S.

(d) J'utilise la forme factorisée : $3(a+1)(a-1)=0$. Comme $3\neq 0$, d'après la propriété du produit nul, $a+1=0$ ou $a-1=0$, donc $a=-1$ ou $a=1$. Les solutions sont -1 et 1. Comme $a\geqslant 1$, seule $a=1$ convient : la place et le bassin ont alors tous les deux un côté de 3 m, et le bassin occupe toute la place.

(e) Oui, Ben a raison. D'après la question 3, $S=3a^2-3=3(a^2-1)$. Si a est entier, a^2-1 est un nombre entier, donc S est un multiple de 3.

5. *Équations produit nul*

Ex. 33 ★☆☆ **Le produit nul en direct**

(a) Produit nul : $t+6=0$ ou $2t-5=0$, donc $t=-6$ ou $t=\frac{5}{2}$. Les solutions sont -6 et $\frac{5}{2}$.

(b) Produit nul : $x=0$ ou $4x+3=0$, donc $x=0$ ou $x=-\frac{3}{4}$. Les solutions sont 0 et $-\frac{3}{4}$ (n'oublie pas le facteur x).

(c) Le facteur -5 n'est jamais nul, donc $a-9=0$, d'où $a=9$. Il y a une seule solution : 9.

(d) $(5x-2)^2=(5x-2)(5x-2)$: les deux facteurs sont égaux. $5x-2=0$, donc $x=\frac{2}{5}$. Il y a une seule solution : $\frac{2}{5}$.

(e) Produit nul : $0{,}5x+3=0$ ou $x-1{,}5=0$, donc $0{,}5x=-3$, soit $x=-6$, ou $x=1{,}5$. Les solutions sont -6 et 1,5.

(f) $x^2+4=0$ est impossible, car x^2+4 vaut au moins 4. Donc $x-8=0$, d'où $x=8$. Il y a une seule solution : 8.

Ex. 34 ★☆☆ **Un membre nul, je factorise**

(a) Facteur commun t : $t(t-13)=0$. Produit nul : $t=0$ ou $t-13=0$, donc $t=0$ ou $t=13$. Les solutions sont 0 et 13.

Ex. 34 (suite)

(b) Facteur commun $(x-2)$: $(x-2)[(3x+1)+4]=0$, soit $(x-2)(3x+5)=0$. Produit nul : $x-2=0$ ou $3x+5=0$, donc $x=2$ ou $x=-\frac{5}{3}$. Les solutions sont 2 et $-\frac{5}{3}$.

(c) Facteur commun $5a$: $5a(2a-5)=0$. Produit nul : $5a=0$ ou $2a-5=0$, donc $a=0$ ou $a=\frac{5}{2}$. Les solutions sont 0 et $\frac{5}{2}$.

(d) $x^2-8^2=0$, donc $(x+8)(x-8)=0$. Produit nul : $x=-8$ ou $x=8$. Les solutions sont -8 et 8.

(e) $\left(\frac{1}{3}x\right)^2-1^2=0$, donc $\left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{1}{3}x-1\right)=0$. Produit nul : $\frac{1}{3}x=-1$ ou $\frac{1}{3}x=1$, donc $x=-3$ ou $x=3$. Les solutions sont -3 et 3.

(f) $(x-4)^2-5^2=0$, donc $(x-4+5)(x-4-5)=0$, soit $(x+1)(x-9)=0$. Produit nul : $x=-1$ ou $x=9$. Les solutions sont -1 et 9.

Ex. 35 ★★☆ Les quatre erreurs de Yanis

(a) Diviser par x est interdit, car x peut être nul. $x^2-6x=0$, donc $x(x-6)=0$, d'où $x=0$ ou $x=6$. Les solutions sont 0 et 6 : Yanis a perdu la solution 0.

(b) Le produit vaut -6, pas 0 : la propriété du produit nul ne s'applique pas (pour $x=-3$, le produit vaut $(-6)\times(-1)=6$). Je développe : $x^2-x-6=-6$, donc $x^2-x=0$, soit $x(x-1)=0$: $x=0$ ou $x=1$. Les solutions sont 0 et 1.

(c) On écrit « ou », pas « et ». De plus, $x^2+9=0$ n'a pas de solution : x^2+9 vaut au moins 9 (pour $x=-3$, il vaut 18). Il reste $2x+1=0$, donc $x=-\frac{1}{2}$. Il y a une seule solution : $-\frac{1}{2}$.

(d) Il ne fallait pas développer : l'équation est déjà un produit nul. $x+7=0$ ou $3x-2=0$, donc $x=-7$ ou $x=\frac{2}{3}$. Les solutions sont -7 et $\frac{2}{3}$.

Ex. 36 ★★☆ Ramener à zéro avant tout

(a) Je ne simplifie pas par $(x+5)$. $(x+5)(4x-1)-(x+5)(x+8)=0$, donc $(x+5)[(4x-1)-(x+8)]=0$, soit $(x+5)(3x-9)=0$. Produit nul : $x=-5$ ou $x=3$. Les solutions sont -5 et 3.

(b) Facteur commun $(2t-3)$: $(2t-3)[(t+4)-(3t-2)]=0$, donc $(2t-3)(t+4-3t+2)=0$, soit $(2t-3)(-2t+6)=0$. Produit nul : $t=\frac{3}{2}$ ou $t=3$. Les solutions sont $\frac{3}{2}$ et 3.

Ex. 36 (suite)

(c) $(a-6)^2-4(a-6)=0$, donc $(a-6)[(a-6)-4]=0$, soit $(a-6)(a-10)=0$. Produit nul : $a=6$ ou $a=10$. Les solutions sont 6 et 10
(diviser par $a-6$ aurait fait perdre 6).

(d) Différence de deux carrés : $[(3x+2)+(x-4)][(3x+2)-(x-4)]=0$, donc $(4x-2)(2x+6)=0$. Produit nul : $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-3$. Les solutions sont $\frac{1}{2}$ et -3.

Ex. 37 ★★☆ Le programme de Nora

(a) $5-3=2$, puis $2^2=4$, puis $4-49=-45$. Avec 5, on obtient -45.

(b) $R=(x-3)^2-49$.

(c) $R=(x-3)^2-7^2=(x-3+7)(x-3-7)$, donc $R=(x+4)(x-10)$.

(d) $(x+4)(x-10)=0$. Produit nul : $x+4=0$ ou $x-10=0$, donc $x=-4$ ou $x=10$. Nora peut choisir -4 ou 10.

(e) Avec -4 : $-4-3=-7$, $(-7)^2=49$, $49-49=0$. Avec 10 : $10-3=7$, $7^2=49$, $49-49=0$. Les deux nombres donnent bien 0.

Ex. 38 ★★★ Quatre questions sur F

(a) $(2x-3)^2=4x^2-12x+9$ et $(x+2)(2x-3)=2x^2-3x+4x-6=2x^2+x-6$. Le signe $-$ change tous les signes du second produit : $F=4x^2-12x+9-2x^2-x+6$, donc $F=2x^2-13x+15$.

(b) Le facteur commun est $(2x-3)$: $F=(2x-3)[(2x-3)-(x+2)]=(2x-3)(2x-3-x-2)$, donc $F=(2x-3)(x-5)$.

(c) On utilise la forme factorisée, sans la développer : $(2x-3)(x-5)=0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $2x-3=0$ ou $x-5=0$, donc $x=\frac{3}{2}$ ou $x=5$. Les solutions sont $\frac{3}{2}$ et 5.

(d) On prend la forme développée : $2x^2-13x+15=15$, donc $2x^2-13x=0$. On factorise par x (sans diviser par x) : $x(2x-13)=0$.
Donc $x=0$ ou $2x-13=0$, c'est-à-dire $x=0$ ou $x=\frac{13}{2}$. Les solutions sont 0 et $\frac{13}{2}$.

(e) Hugo écrit $2x-3=2$ ou $x-5=2$, et il trouve $x=\frac{5}{2}$ ou $x=7$. On teste $x=7$: $F=(2\times7-3)(7-5)=11\times2=22$, et non 2. Hugo a tort : la propriété du produit nul ne marche que si le produit est égal à 0.

Ex. 39 ★★★ **Vrai ou faux sur les solutions**

(a) Vrai. $x^3 - 16x = 0$. Facteur commun x : $x(x^2 - 16) = 0$, puis $x(x+4)(x-4) = 0$. Produit nul : $x = 0$ ou $x = -4$ ou $x = 4$. Il y a bien trois solutions : 0, -4 et 4. Diviser par x aurait fait perdre 0.

(b) Faux. $(a+3)^2 - 6^2 = 0$, donc $(a+3+6)(a+3-6) = 0$, soit $(a+9)(a-3) = 0$.
Donc $a = -9$ ou $a = 3$. On vérifie : $(-9+3)^2 = (-6)^2 = 36$. Les solutions sont -9 et 3.

(c) Faux. On teste -4 : le membre de gauche vaut $(-9) \times 0 = 0$ et celui de droite vaut $2 \times (-4) - 1 = -9$. Je ramène tout à 0 : $(2x-1)(x+4) - (2x-1) \times 1 = 0$, donc $(2x-1)[(x+4) - 1] = 0$, soit $(2x-1)(x+3) = 0$.
Donc $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -3$. Les solutions sont $\frac{1}{2}$ et -3.

(d) Faux. Un produit est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul : $t = 0$ ou $5t + 2 = 0$. Avec « et », t devrait valoir 0 et $-\frac{2}{5}$ en même temps, ce qui est impossible. Les solutions sont 0 et $-\frac{2}{5}$.

Ex. 40 ★★★ **La plaque découpée**

(a) Pour $x = 3$, le côté de la plaque vaut 11 cm et celui du carré découpé vaut 4 cm. $A = 11^2 - 4^2 = 121 - 16 = 105$. L'aire restante est 105 cm².

(b) $A = (2x+5)^2 - (x+1)^2$. C'est une différence de deux carrés : $A = [(2x+5) + (x+1)][(2x+5) - (x+1)] = (2x+5+x+1)(2x+5-x-1) = (3x+6)(x+4)$.
On factorise $3x + 6 = 3(x+2)$, donc $A = 3(x+2)(x+4)$.

(c) $3(x+2)(x+4) = 0$. Le facteur 3 n'est jamais nul, donc $x + 2 = 0$ ou $x + 4 = 0$, soit $x = -2$ ou $x = -4$. Ces deux solutions sont négatives. Or x est positif, donc l'aire restante n'est jamais nulle.

(d) On développe : $A = 4x^2 + 20x + 25 - (x^2 + 2x + 1) = 3x^2 + 18x + 24$. Le rectangle a pour aire $8(3x+3) = 24x + 24$. $3x^2 + 18x + 24 = 24x + 24$ donne $3x^2 - 6x = 0$. Je ne divise pas par x : $3x(x-2) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 2$. Ces deux nombres sont positifs, donc les deux valeurs conviennent.

(e) Pour $x = 0$: $A = 5^2 - 1^2 = 24$ et le rectangle mesure 8 cm sur 3 cm, soit 24 cm². Pour $x = 2$: $A = 9^2 - 3^2 = 81 - 9 = 72$ et le rectangle mesure 8 cm sur 9 cm, soit 72 cm². Les deux valeurs conviennent.

6. *Exercices type brevet*

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : factoriser en une ligne**

(a) Le facteur commun est $5t$: $25t^2 - 10t = 5t \times 5t - 5t \times 2 = 5t(5t-2)$.

(b) C'est une différence de deux carrés : $\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 3^2 = \left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(\frac{1}{2}x-3\right)$.

(c) Le facteur commun est $-6x$: $-12x^2 - 18x = -6x \times 2x + (-6x) \times 3 = -6x(2x+3)$.

(d) Le facteur commun est $(x+5)$: $(x+5)[(x+5) - 3] = (x+5)(x+2)$.

(e) $(x+4) = 1 \times (x+4)$, donc $(x+4)[(3x-2) - 1] = (x+4)(3x-3)$. Ensuite, $3x - 3 = 3(x-1)$, donc la forme factorisée au maximum est $3(x+4)(x-1)$.

(f) C'est $A^2 - B^2$ avec $A = 2a+1$ et $B = a$: $[(2a+1) + a][(2a+1) - a] = (3a+1)(a+1)$.

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux de brevet**

(a) Faux : $(x+8)(x-8) = x^2 - 64$. $x^2 + 64$ est une somme de deux carrés, elle ne se factorise pas.

(b) Faux : $(x-10)^2 = x^2 - 20x + 100$. La bonne factorisation est $x^2 - 100 = (x+10)(x-10)$.

(c) Faux : le produit vaut $0 \times (-11) = 0$, mais il reste $+7$, donc l'expression vaut $0 + 7 = 7$.

(d) Vrai : $(t-1)^2 - 2^2 = (t-1-2)(t-1+2) = (t-3)(t+1)$.

(e) Vrai : $5x^2 - 20 = 5(x^2 - 4) = 5(x-2)(x+2)$.

Ex. 43 ★★☆ **Le tableur de Yanis**

(a) $F = (x+2)(x+2) - 9 = x^2 + 2x + 2x + 4 - 9 = x^2 + 4x - 5$.

(b) $F = (x+2)^2 - 3^2 = (x+2-3)(x+2+3) = (x-1)(x+5)$.

(c) Pour $x = 0$, avec la forme développée : $F = 0 + 0 - 5 = -5$. Pour $x = -2$, avec la forme de départ : $F = 0^2 - 9 = -9$.

(d) Le tableur affiche 0 quand $(x-1)(x+5) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x - 1 = 0$ ou $x + 5 = 0$, donc $x = 1$ ou $x = -5$. Les solutions sont 1 et -5. Yanis doit écrire 1 ou -5 dans la colonne A.

Ex. 44 ★★☆ **Le programme de Lina**

(a) Avec 7 : $7^2 - 3 \times 7 = 49 - 21 = 28$. Avec -2 : $(-2)^2 - 3 \times (-2) = 4 + 6 = 10$.

(b) Le résultat est $x^2 - 3x$. Le facteur commun est x : $x^2 - 3x = x(x - 3)$.

(c) Lina n'a pas le droit de diviser par x, car x peut valoir 0. On écrit $x^2 - 3x = 0$, c'est-à-dire $x(x - 3) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x - 3 = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 3$. Les solutions sont 0 et 3 : deux nombres ont un carré égal à leur triple, 0 et 3.

(d) Le résultat est $x(x - 3)$. Si x est pair, le produit est pair. Si x est impair, $x - 3$ est pair, et le produit est encore pair. Le résultat est donc toujours un nombre pair.

Ex. 45 ★★☆ **La terrasse de Sacha**

(a) $A = (x + 3)^2 - 5^2 = (x + 3 - 5)(x + 3 + 5) = (x - 2)(x + 8)$, en m².

(b) Avec la forme factorisée : $A = 0 \times 10 = 0$. Pour $x = 2$, la terrasse a un côté de 5 m, comme le bassin : il ne reste aucune place pour les dalles. Il faut donc $x > 2$ pour que le bassin soit plus petit que la terrasse.

(c) $(x + 3)^2 - 25 = 39$, donc $(x + 3)^2 - 64 = 0$, c'est-à-dire $(x + 3)^2 - 8^2 = 0$. On factorise : $(x + 3 - 8)(x + 3 + 8) = 0$, donc $(x - 5)(x + 11) = 0$.

(d) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x - 5 = 0$ ou $x + 11 = 0$, donc $x = 5$ ou $x = -11$. On rejette -11, car $x > 2$: le côté $x + 3$ vaudrait -8 m, et une longueur ne peut pas être négative.
Donc $x = 5$, et la terrasse a un côté de $5 + 3 = 8$ m.

Ex. 46 ★★★ **L'expression du brevet blanc**

(a) $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$ et $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$. Le signe $-$ porte sur tout le second carré, donc chaque signe change : $E = 9x^2 - 6x + 1 - x^2 - 10x - 25 = 8x^2 - 16x - 24$.

(b) E est une différence de deux carrés, avec $a = 3x - 1$ et $b = x + 5$: $E = [(3x - 1) + (x + 5)][(3x - 1) - (x + 5)] = (4x + 4)(2x - 6)$. Ensuite, $4x + 4 = 4(x + 1)$ et $2x - 6 = 2(x - 3)$. Au maximum : $E = 8(x + 1)(x - 3)$.

(c) Pour $x = 0$, je prends la forme développée : $E = 0 - 0 - 24 = -24$. Pour $x = \frac{1}{2}$, je prends la forme factorisée : $E = 8 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -30$. Pour $x = 0$, E vaut -24 ; pour $x = \frac{1}{2}$, E vaut -30.

Ex. 46 (suite)

(d) $E = 0$ s'écrit $8(x + 1)(x - 3) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, et $8 \neq 0$. Donc $x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = -1$ ou $x = 3$. Les solutions sont -1 et 3.

(e) Vrai. Avec la forme factorisée, $E = 8(x + 1)(x - 3)$. Si x est un entier, alors $(x + 1)(x - 3)$ est aussi un entier, donc E est le produit de 8 par un entier : E est un multiple de 8.

Ex. 47 ★★★ **Le potager agrandi de Noé**

(a) L'aire ajoutée est l'aire du grand carré moins l'aire du petit : $A = (x + 6)^2 - x^2$. C'est une différence de deux carrés : $A = [(x + 6) + x][(x + 6) - x] = 6(2x + 6)$. Or $2x + 6 = 2(x + 3)$, donc au maximum $A = 12(x + 3)$.

(b) Avec la forme factorisée : $A = 12 \times (4{,}5 + 3) = 12 \times 7{,}5 = 90$. Pour $x = 4{,}5$, l'aire ajoutée est de 90 m².

(c) Le nouveau potager a pour aire $(x + 6)^2$ m², celui de départ x^2 m². On veut $(x + 6)^2 = 4x^2$, soit $(x + 6)^2 - 4x^2 = 0$. Or $4x^2 = (2x)^2$, donc $(x + 6)^2 - (2x)^2 = 0$.

(d) C'est une différence de deux carrés : $[(x + 6) + 2x][(x + 6) - 2x] = 0$, soit $(3x + 6)(6 - x) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $3x + 6 = 0$ ou $6 - x = 0$, donc $x = -2$ ou $x = 6$. Les solutions sont -2 et 6.

(e) x est une longueur, donc $x > 0$: la solution -2 ne convient pas, on la rejette. Il reste $x = 6$. Contrôle : $(6 + 6)^2 = 144$ et $4 \times 6^2 = 144$. Le potager de départ doit avoir un côté de 6 m.

Ex. 48 ★★★ **Les deux programmes de Timéo et Rose**

(a) Programme A : $-4 + 5 = 1$, puis $1^2 = 1$, puis $1 - 25 = -24$. Programme B : $-4 \times (-4 + 10) = -4 \times 6 = -24$. Avec -4, les deux programmes donnent -24.

(b) Un essai ne suffit pas : il faut un calcul littéral. Programme A : $(t + 5)^2 - 25 = (t + 5)^2 - 5^2 = (t + 5 - 5)(t + 5 + 5) = t(t + 10)$. Programme B : $t(t + 10)$. Les deux expressions sont égales pour tout t : Timéo a raison.

(c) On résout $t(t + 10) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $t = 0$ ou $t + 10 = 0$, donc $t = 0$ ou $t = -10$. Les solutions sont 0 et -10. Les nombres 0 et -10 donnent 0 avec le programme A.

Ex. 48 **(suite)**

ⓓ Rose divise par t alors que t peut valoir 0 : elle perd une solution. Il faut tout mettre dans un membre :
$t^2 + 10t - 7t = 0$, soit $t^2 + 3t = 0$, puis factoriser :
$t(t + 3) = 0$.
Donc $t = 0$ ou $t + 3 = 0$, c'est-à-dire $t = 0$ ou $t = -3$.
Les solutions sont 0 et -3. Contrôle : avec -3, le programme A donne $2^2 - 25 = -21 = 7 \times (-3)$. Les nombres cherchés sont 0 et -3.