Corrigé – Expressions fractionnaires

Mathématiques – Seconde

Calcul littéral et expressions fractionnaires · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Rappels : fractions de nombres ★

Calcule et donne le résultat sous forme irréductible.

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}$

$$=\frac{2\times 4}{3\times 4}+\frac{1\times 3}{4\times 3}$$
$$=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}$$
$$=\frac{8+3}{12}$$
$$=\frac{11}{12}$$

b) $\dfrac{5}{6}-\dfrac{7}{9}$

$$=\frac{5\times 3}{6\times 3}-\frac{7\times 2}{9\times 2}$$
$$=\frac{15}{18}-\frac{14}{18}$$
$$=\frac{15-14}{18}$$
$$=\frac{1}{18}$$

c) $3-\dfrac{4}{7}$

$$=\frac{3\times 7}{7}-\frac{4}{7}$$
$$=\frac{21}{7}-\frac{4}{7}$$
$$=\frac{21-4}{7}$$
$$=\frac{17}{7}$$

d) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}$

$$=\frac{1\times 5}{3\times 5}+\frac{1\times 3}{5\times 3}$$
$$=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}$$
$$=\frac{5+3}{15}$$
$$=\frac{8}{15}$$

e) $\dfrac{4}{15}\times\dfrac{25}{8}$

$$=\frac{4\times 25}{15\times 8}$$
$$=\frac{4\times 5\times 5}{3\times 5\times 2\times 4}$$
$$=\frac{5}{3\times 2}$$
$$=\frac{5}{6}$$

f) $\dfrac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{9}{10}}$

$= \dfrac{3}{4} \times \dfrac{10}{9}$

$= \dfrac{3 \times 10}{4 \times 9}$

$= \dfrac{30}{36}$

$= \dfrac{5 \times 6}{6 \times 6}$

$= \dfrac{5}{6}$

g) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{4}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{2 \times 9}{3 \times 4}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{18}{12}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}$

$= \dfrac{1 - 3}{2}$

$= \dfrac{-2}{2}$

$= -1$

Exercice 2 – Valeurs interdites ★

Donne les valeurs interdites de chaque expression.

a) $x - 2 = 0 \iff x = 2$: valeur interdite : 2.

b) $2x + 6 = 0 \iff 2x = -6 \iff x = -3$: valeur interdite : -3.

c) Deux dénominateurs : $x = 0$, ou $x + 4 = 0 \iff x = -4$.
valeurs interdites : -4 et 0.

d) $x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3$ ou $x = 3$: valeurs interdites : -3 et 3.

e) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.
$x - 1 = 0 \iff x = 1$.
$3x + 2 = 0 \iff 3x = -2 \iff x = -\dfrac{2}{3}$.
Valeurs interdites : $-\dfrac{2}{3}$ et 1.

f) Un carré est positif : $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + 1 \geqslant 1$.
$x^2 + 1$ ne s'annule jamais : aucune valeur interdite.

g) Seul $5 - x$ peut s'annuler (le 2 jamais).
$5 - x = 0 \iff x = 5$: valeur interdite : 5.

Exercice 3 – Simplifier une fraction ★

Factorise le numérateur et le dénominateur, puis simplifie (pour x différent des valeurs interdites).

a) $\dfrac{3x+6}{3}$
$= \dfrac{3(x+2)}{3}$
$= x+2$

b) $\dfrac{x^2+2x}{x}$
$= \dfrac{x(x+2)}{x}$
$= x+2$

c) $\dfrac{x^2-9}{x+3}$
$= \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3}$
$= x-3$

d) $\dfrac{4x}{2x^2-6x}$
$= \dfrac{2\times 2x}{2x(x-3)}$
$= \dfrac{2}{x-3}$

e) *Ne se simplifie pas en x* : 7 est un terme du numérateur, pas un facteur.
On peut seulement écrire $\dfrac{x}{7}+1$.

f) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$
$= \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}$
$= \dfrac{x-3}{x+3}$

g) $\dfrac{2-x}{x-2}$
$= \dfrac{-(x-2)}{x-2}$
$= -1$

Exercice 4 – Somme et différence ★★

Écris sous la forme d'un seul quotient (x différent des valeurs interdites).

a) Dénominateur commun : $x(x+1)$.
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}$
$= \dfrac{1\times(x+1)}{x(x+1)}+\dfrac{2\times x}{(x+1)x}$
$= \dfrac{x+1}{x(x+1)}+\dfrac{2x}{x(x+1)}$
$= \dfrac{x+1+2x}{x(x+1)}$
$= \dfrac{3x+1}{x(x+1)}$

b) Dénominateur commun : $x-1$.
On écrit $3=\dfrac{3(x-1)}{x-1}$.

$$\begin{aligned}3-\frac{2}{x-1}&=\frac{3\,(x-1)}{x-1}-\frac{2}{x-1}\\&=\frac{3\,(x-1)-2}{x-1}\\&=\frac{3x-3-2}{x-1}\\&=\frac{3x-5}{x-1}\end{aligned}$$

c) Même dénominateur : on soustrait les numérateurs, entre parenthèses.

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-1}{x-2}&=\frac{x+1-(x-1)}{x-2}\\&=\frac{x+1-x+1}{x-2}\\&=\frac{2}{x-2}\end{aligned}$$

d) Dénominateur commun : $x(x+2)$.

$$\begin{aligned}\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}&=\frac{2\,(x+2)}{x\,(x+2)}-\frac{3x}{x\,(x+2)}\\&=\frac{2\,(x+2)-3x}{x\,(x+2)}\\&=\frac{2x+4-3x}{x\,(x+2)}\\&=\frac{4-x}{x\,(x+2)}\end{aligned}$$

e) Dénominateur commun : $x-1$.
On écrit $x+1=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}$.

$$\begin{aligned}x+1-\frac{x^2}{x-1}&=\frac{(x+1)\,(x-1)}{x-1}-\frac{x^2}{x-1}\\&=\frac{(x+1)\,(x-1)-x^2}{x-1}\\&=\frac{x^2-1-x^2}{x-1}\\&=\frac{-1}{x-1}\end{aligned}$$

Exercice 5 – Produit et quotient ★★

Écris sous la forme d'un seul quotient, simplifié (x différent des valeurs interdites).

a) On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, puis on factorise $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ et on simplifie.

$$\begin{aligned}
&\frac{x+1}{3} \times \frac{6}{x^2-1} \\
&= \frac{(x+1) \times 6}{3\left(x^2-1\right)} \\
&= \frac{6\left(x+1\right)}{3\left(x-1\right)\left(x+1\right)} \\
&= \frac{2 \times 3\left(x+1\right)}{3\left(x-1\right)\left(x+1\right)} \\
&= \frac{2}{x-1}
\end{aligned}$$

b) On simplifie par $x - 4$ et par x.

$$\begin{aligned}
&\frac{2x}{x-4} \times \frac{x-4}{x^2} \\
&= \frac{2x\left(x-4\right)}{x^2\left(x-4\right)} \\
&= \frac{2 \times x\left(x-4\right)}{x \times x\left(x-4\right)} \\
&= \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

c) $\dfrac{\dfrac{4}{x-1}}{\dfrac{2}{x^2-1}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{x-1} \times \frac{x^2-1}{2} \\
&= \frac{4\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{2\left(x-1\right)} \\
&= 2\left(x+1\right) \\
&= 2x+2
\end{aligned}$$

d) $\dfrac{1}{x} \times \left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} \times \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x} \times \frac{x^2-1}{x} \\
&= \frac{1 \times \left(x^2-1\right)}{x \times x} \\
&= \frac{x^2-1}{x^2}
\end{aligned}$$

Exercice 6 – Démontrer une égalité ★★

Démontre que l'égalité est vraie pour tout x différent des valeurs interdites.

a) $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+1}$

$= \dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)} - \dfrac{x^2}{x(x+1)}$

$= \dfrac{(x+1)^2 - x^2}{x(x+1)}$

$= \dfrac{x^2 + 2x + 1 - x^2}{x(x+1)}$

$= \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$

On retrouve le membre de droite : l'égalité est démontrée.

b) $2 + \dfrac{1}{x-2}$

$= \dfrac{2(x-2)}{x-2} + \dfrac{1}{x-2}$

$= \dfrac{2(x-2)+1}{x-2}$

$= \dfrac{2x-4+1}{x-2}$

$= \dfrac{2x-3}{x-2}$

On retrouve le membre de droite : l'égalité est démontrée.

c) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$

$= \dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{x(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{x^2 + x - x + 1}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

On retrouve le membre de droite : l'égalité est démontrée.

Exercice 7 – Calculs longs ★★★

Donne les valeurs interdites, puis écris sous la forme d'un seul quotient, le plus simple possible.

a) Les dénominateurs $x-1$, $x+1$ et $x^2-1=(x-1)(x+1)$ s'annulent pour $x=1$ et pour $x=-1$.

Pour x différent de 1 et de -1 :

Dénominateur commun : $(x-1)(x+1)$.

À la fin, on simplifie par $x-1$.

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}\\
&\quad=\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}-\frac{4}{(x-1)(x+1)}\\
&\quad=\frac{2(x+1)-(x-1)-4}{(x-1)(x+1)}\\
&\quad=\frac{2x+2-x+1-4}{(x-1)(x+1)}\\
&\quad=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\\
&\quad=\frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

b) Les dénominateurs $x-2$ et x s'annulent pour $x=2$ et pour $x=0$.

Pour x différent de 0 et de 2 :

Dénominateur commun : $x(x-2)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{x-2}-\frac{x+2}{x}\\
&\quad=\frac{xx}{x(x-2)}-\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}\\
&\quad=\frac{x^2-(x+2)(x-2)}{x(x-2)}\\
&\quad=\frac{x^2-\left(x^2-4\right)}{x(x-2)}\\
&\quad=\frac{x^2-x^2+4}{x(x-2)}\\
&\quad=\frac{4}{x(x-2)}
\end{aligned}$$

c) $\dfrac{1}{x}$ impose $x \neq 0$.

Le dénominateur $\dfrac{1}{x} - 1$ s'annule si $\dfrac{1}{x} = 1$, c'est-à-dire $x = 1$.

Pour x différent de 0 et de 1 :

On écrit le haut et le bas sur le dénominateur x, puis on multiplie par l'inverse du bas.

$$\begin{aligned}
&\frac{\dfrac{1}{x} + 1}{\dfrac{1}{x} - 1} \\
&\quad = \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x}} \\
&\quad = \frac{\dfrac{1+x}{x}}{\dfrac{1-x}{x}} \\
&\quad = \frac{1+x}{x} \times \frac{x}{1-x} \\
&\quad = \frac{(1+x)\,x}{x\,(1-x)} \\
&\quad = \frac{1+x}{1-x}
\end{aligned}$$

Exercice 8 – Problèmes ★★★

Rédige.

a) On cherche la durée totale T.

Pour chaque trajet, durée = distance ÷ vitesse.

Dénominateur commun : $x(x+5)$.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{30}{x} + \frac{30}{x+5} \\
&= \frac{30\,(x+5)}{x\,(x+5)} + \frac{30x}{x\,(x+5)} \\
&= \frac{30x + 150 + 30x}{x\,(x+5)} \\
&= \frac{60x + 150}{x\,(x+5)}
\end{aligned}$$

Pour $x = 25$:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{60 \times 25 + 150}{25\,(25+5)} \\
&= \frac{1500 + 150}{25 \times 30} \\
&= \frac{1650}{750} \\
&= 2{,}2
\end{aligned}$$

Or $0{,}2$ h $= 0{,}2 \times 60$ min $= 12$ min.

La durée totale est $2{,}2$ h, soit 2 h 12 min.

b) Le dénominateur est un carré : $x^2+4x+4 = x^2+2\times x\times 2+2^2 = (x+2)^2$.
$(x+2)^2 = 0 \iff x+2=0 \iff x=-2$: valeur interdite -2.
On factorise le numérateur avec a^2-b^2, puis on simplifie par $x+2$ (non nul).

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+2)} \\ &= \frac{x-2}{x+2} \end{aligned}$$

Pour $x=3$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3-2}{3+2} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Pour $x=-1$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1-2}{-1+2} \\ &= \frac{-3}{1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

c) Dénominateur commun : $x(x+1)$.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} \\ &= \frac{x+1-x}{x(x+1)} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

On applique cette égalité avec $x=1$, puis $x=2$, …, jusqu'à $x=9$: $\frac{1}{1\times 2} = 1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, etc.
Donc $S = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$: tout se simplifie sauf le premier et le dernier terme.
$S = 1-\frac{1}{10} = \frac{10}{10}-\frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque calcul contient une erreur. Trouve-la, puis écris le bon résultat.

a) *On divise **tout** le numérateur par 2 : on factorise d'abord.*

$$\begin{aligned} &\frac{2x+4}{2} \\ &= \frac{2(x+2)}{2} \\ &= x+2 \end{aligned}$$

b) *On n'additionne pas les dénominateurs : dénominateur commun $2x$.*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{2x} + \frac{x}{2x} \\ &= \frac{2+x}{2x} \\ &= \frac{x+2}{2x} \end{aligned}$$

c) *Le $-$ porte sur tout le numérateur :* $-(x-1) = -x+1$.

$$\begin{aligned}&\frac{3}{x} - \frac{x-1}{x}\\ &= \frac{3-(x-1)}{x}\\ &= \frac{3-x+1}{x}\\ &= \frac{4-x}{x}\end{aligned}$$

d) *Le 2 s'écrit aussi sur le dénominateur x :* $2 = \dfrac{2x}{x}$.

$$\begin{aligned}&2 - \frac{1}{x}\\ &= \frac{2x}{x} - \frac{1}{x}\\ &= \frac{2x-1}{x}\end{aligned}$$

e) *Diviser par $\dfrac{2}{x}$, c'est multiplier par son inverse $\dfrac{x}{2}$.*

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{x}{3}}{\frac{2}{x}}\\ &= \frac{x}{3} \times \frac{x}{2}\\ &= \frac{x \times x}{3 \times 2}\\ &= \frac{x^2}{6}\end{aligned}$$

f) *x est un terme du numérateur, pas un facteur : on ne simplifie pas.*

On peut écrire $1 + \dfrac{3}{x}$.

$$\begin{aligned}&\frac{x+3}{x}\\ &= \frac{x+3}{x}\end{aligned}$$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Les valeurs interdites de $\dfrac{x+1}{x^2-4}$ sont :

Réponse C : -2 et 2

$x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$.

2. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}$ est égal à :

Réponse A : $\dfrac{x+3}{3x}$

$\dfrac{3}{3x} + \dfrac{x}{3x} = \dfrac{x+3}{3x}$.

3. Pour $x \neq 2$, $\dfrac{3x-6}{x-2}$ est égal à :

Réponse D : 3

$\dfrac{3(x-2)}{x-2} = 3$.

4. $2 - \dfrac{x+1}{x}$ est égal à :

Réponse B : $\dfrac{x-1}{x}$

$\dfrac{2x-(x+1)}{x} = \dfrac{2x-x-1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

5. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x}{2} \times \dfrac{4}{x^2}$ est égal à :

Réponse D : $\dfrac{2}{x}$

$\dfrac{4x}{2x^2} = \dfrac{2}{x}$.

6. $\dfrac{x+3}{3}$ est égal à :

Réponse A : $\dfrac{x}{3} + 1$

On sépare : $\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{3} = \dfrac{x}{3} + 1$; le 3 n'est pas un facteur du numérateur.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).