42 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Rappels de 2nde : puissances entières, racine carrée, évolutions répétées*

À retenir : Même base : $a^m \times a^p = a^{m+p}$ et $(a^m)^p = a^{mp}$; $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Rien pour une somme : $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Hausse de $t\,\%$ n fois : $\times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : puissances entières** — Sans calculatrice.

a. Écris $7^3 \times 7^5$ sous la forme d'une seule puissance de 7.

b. Écris $\frac{6^{11}}{6^4}$ sous la forme 6^n, avec n entier.

c. Un élève écrit $(5^2)^3 = 5^5$. Corrige son erreur.

d. Écris 4^{-2} sous la forme d'une fraction.

e. Donne la valeur de $2\,026^0$.

f. Calcule $(-3)^4$, puis -3^4.

g. Calcule $0{,}25^3 \times 4^3$ en regroupant les deux puissances.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : racines carrées et écriture scientifique** — Sans calculatrice.

a. Calcule $\sqrt{0{,}49}$.

b. Trouve le nombre positif dont le carré vaut 2,25.

c. Donne la valeur de $\left(\sqrt{13}\right)^2$.

d. Calcule $\sqrt{8} \times \sqrt{50}$.

e. Calcule $\sqrt{9+16}$, puis $\sqrt{9} + \sqrt{16}$. Compare.

f. Vrai ou faux ? Justifie : $\sqrt{(-6)^2} = -6$.

g. Écris $(3{,}2 \times 10^5) \times (5 \times 10^{-2})$ en écriture scientifique.

Ex. 3 ★★☆ **Vrai ou faux sur les puissances et les racines** — Sans calculatrice.

a. Vrai ou faux ? Justifie : $(2 \times 5)^3 + (2+5)^2 = 2^3 \times 5^3 + 2^2 + 5^2$.

b. Vrai ou faux ? Justifie : $(2^3)^2 \times 2^{-4} = 4$.

c. Vrai ou faux ? Justifie : $\left(\sqrt{7}\right)^2 + \sqrt{25-9} = 7 + 5 - 3$.

d. Vrai ou faux ? Justifie : $\frac{6^4}{2^4} \times 3^{-2} = 9$.

Ex. 4 ★★☆ **Un loyer qui augmente chaque année** — Calculatrice autorisée. Les montants sont arrondis au centime. En 2026, Malik paie un loyer de 640 € par mois à Rennes. Ce loyer augmente de 2 % chaque année.

a. Donne le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2 %.

Ex. 4 (suite)

b. Calcule le loyer en 2027, puis en 2028.

c. Exprime le loyer L au bout de n années en fonction de n.

d. Calcule le loyer en 2031.

e. Malik affirme : « En 5 ans, mon loyer augmente de 10 %. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 5 ★★☆ **Bactéries et ordres de grandeur** — Sans calculatrice. À 8 h, une culture contient 3×10^4 bactéries. Le nombre de bactéries double chaque heure.

a. Par combien le nombre de bactéries est-il multiplié en 3 heures ? Traduis ce résultat en pourcentage d'évolution.

b. Calcule le nombre de bactéries à 13 h et donne-le en écriture scientifique.

c. Justifie que $2^{20} = \left(2^{10}\right)^2$. Sachant que $2^{10} = 1\,024 \approx 10^3$, donne un ordre de grandeur de 2^{20}.

d. Donne un ordre de grandeur du nombre de bactéries le lendemain à 4 h.

Ex. 6 ★★★ **Cinq calculs à justifier, puis un classement** — Sans calculatrice. Justifie chaque calcul par une propriété des puissances ou de la racine carrée.

a. Soit $A = \frac{\left(2^3\right)^4 \times 2^{-5}}{2^4}$. Yanis trouve $A = 2^{-2}$ car il a écrit $\left(2^3\right)^4 = 2^7$. Explique son erreur, puis calcule A.

b. Calcule $B = 5^{-2} \times (7+3)^2$ en écrivant d'abord 5^{-2} sous forme de fraction.

c. Calcule $C = 2{,}5^3 \times 0{,}4^3 + 9^0$.

d. Calcule $D = \left(\sqrt{11}\right)^2 - \sqrt{144+25}$. Yanis trouve $D = -6$: quelle erreur a-t-il faite ?

e. Calcule $E = -2^4 + (-5)^2$, puis range A, B, C, D et E dans l'ordre croissant.

Ex. 7 ★★★ **Abonnés et vues d'une chaîne vidéo** — Calculatrice autorisée. Début 2026, la chaîne vidéo d'un club d'escalade de Grenoble compte $2{,}4 \times 10^4$ abonnés. Inès, qui gère la chaîne, prévoit une hausse de 3 % par an du nombre d'abonnés. En 2026, chaque abonné regarde en moyenne 50 vidéos de la chaîne dans l'année.

a. Donne le coefficient multiplicateur global du nombre d'abonnés sur 5 ans, arrondi à 0,001, puis le pourcentage d'évolution correspondant.

b. Estime le nombre d'abonnés début 2031, arrondi à l'unité.

c. Calcule le nombre total de vidéos vues en 2026 et donne-le en écriture scientifique.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Le nombre moyen de vidéos vues par abonné augmente de 5 % par an. Justifie qu'en 5 ans, le nombre total de vues est multiplié par $(1{,}03 \times 1{,}05)^5$. Arrondis ce coefficient à 0,001.

(e) Estime le nombre total de vues en 2031, puis donne son ordre de grandeur.

2. *Fonctions $x \mapsto a^x$ et modèles exponentiels $V_0 \times a^x$*

À retenir : $V(x) = V_0 \times a^x$: $V_0 = V(0)$; une hausse de t % donne $a = 1 + \frac{t}{100}$, une baisse donne $a = 1 - \frac{t}{100}$. $a^{0,5} = \sqrt{a}$: $25^{0,5} = 5$, pas 12,5. $3 \times 2^x \neq 6^x$.

Ex. 8 ★☆☆ **Images d'une fonction exponentielle** — Sans calculatrice.

(a) Calcule $16^{0,5}$.

(b) Calcule 7^0.

(c) Écris $3^{1,3} \times 3^{0,7}$ sous la forme d'un nombre entier.

(d) On pose $f(x) = 3 \times 4^x$. Calcule $f(2)$.

(e) On pose $f(x) = 3 \times 4^x$. Calcule $f(0{,}5)$.

(f) Calcule $1^{3,7}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Taux et coefficient multiplicateur** — Sans calculatrice. Pour les quatre premières questions, précise aussi s'il s'agit d'une croissance ou d'une décroissance exponentielle.

(a) Une population augmente de 6 % par an. Quel est le coefficient multiplicateur annuel a ?

(b) Le prix d'une trottinette baisse de 15 % par an. Quel est le coefficient multiplicateur annuel a ?

(c) Le nombre d'abonnés d'un compte augmente de 120 % par mois. Léo en déduit $a = 1{,}2$. Vrai ou faux ? Justifie.

(d) La masse d'un glaçon diminue de 2,5 % par minute. Quel est le coefficient multiplicateur par minute a ?

(e) Une grandeur est modélisée par $V(x) = 500 \times 1{,}18^x$. Quelle est son évolution en pourcentage par unité de temps ?

(f) Une grandeur est modélisée par $W(x) = 80 \times 0{,}93^x$. Quelle est son évolution en pourcentage par unité de temps ?

Ex. 10 ★★☆ **Deux cultures de bactéries : affine ou exponentiel ?** — On compte deux cultures de bactéries (en milliers) toutes les heures. x est le temps en heures. Calculatrice autorisée.

x	0	1	2	3
Culture A	400	460	529	608,35
Culture B	250	280	310	340

(a) Calcule les quotients successifs des valeurs de la culture A. Quel type de modèle convient ?

(b) Calcule les différences successives des valeurs de la culture B. Quel type de modèle convient ?

(c) Écris le nombre de bactéries de la culture A sous la forme $A(x) = k \times a^x$. Donne son taux d'évolution horaire.

(d) Noé affirme : « La culture B augmente de 30 % par heure. » Est-ce juste ? Justifie.

Ex. 11 ★★☆ **Le placement d'Inès** — Le 1er janvier 2022, Inès place 3 200 € à intérêts composés de 4 % par an. On note x le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2022. Calculatrice autorisée ; arrondis au centime.

(a) Exprime le capital $C(x)$ d'Inès en fonction de x.

(b) Quelle valeur de x correspond au 1er janvier 2027 ? Calcule le capital à cette date.

(c) Calcule le capital d'Inès au 1er juillet 2022.

(d) Inès pensait avoir 3 264 € au 1er juillet 2022, « la moitié des intérêts d'une année ». Explique son calcul et pourquoi il est faux.

Ex. 12 ★★☆ **Concentration d'un médicament : corrige les erreurs** — On injecte un médicament à une patiente. Sa concentration dans le sang (en mg/L) est modélisée par $f(x) = k \times a^x$, avec x en heures après l'injection. On mesure $f(1) = 27$ et $f(2) = 24{,}3$. Calculatrice autorisée ; arrondis au centième.

(a) Calcule $\frac{f(2)}{f(1)}$ et déduis-en a. Traduis-le par un pourcentage d'évolution par heure.

(b) Jade écrit : « La concentration au moment de l'injection est $f(1) = 27$ mg/L. » Est-ce correct ? Corrige si besoin.

(c) Pour calculer $f(3)$, Tom élève $k \times a$ au cube. Repère l'erreur, puis calcule $f(3)$.

(d) Sans calculer, compare $f(4)$ et $f(6)$. Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Montval contre Brécourt : 3 % par an ou 1 500 habitants par an ?** — Au 1er janvier 2020, la ville de Montval compte 40 000 habitants. Sa population augmente de 3 % par an. À la même date, Brécourt compte 46 000 habitants et gagne 1 500 habitants par an. On note x le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020. $M(x)$ et $B(x)$ sont les populations des deux villes. Calculatrice autorisée.

(a) Exprime $M(x)$ et $B(x)$ en fonction de x.

Ex. 13 **(suite)**

(b) Noa affirme : « Montval gagne 1 200 habitants par an, car 3 % de 40 000 font 1 200. » A-t-il raison ? Justifie en calculant les gains de 2020 à 2021, puis de 2021 à 2022.

(c) Pour la population de Montval au 1er janvier 2024, Malo prend $x = 5$, car « 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, cela fait 5 années ». Explique son erreur, puis donne la bonne valeur à l'unité près.

(d) Compare les populations des deux villes au 1er janvier 2030.

(e) Montre que Montval dépasse Brécourt pour la première fois au 1er janvier 2045. Justifie en calculant des valeurs.

Ex. 14 ★★★ **La cote de la voiture de Yanis** — Le 1er janvier 2023, Yanis achète une voiture électrique neuve 30 000 €. Sa cote (en euros) est modélisée par $V(x) = k \times a^x$, avec x le nombre d'années écoulées depuis l'achat. Au 1er janvier 2025, la voiture ne vaut plus que 19 200 €. Calculatrice autorisée.

(a) Quelle valeur de x correspond au 1er janvier 2025 ? Donne k, puis écris une égalité vérifiée par a et calcule a.

(b) Léna affirme : « En deux ans, la voiture a perdu 36 % de sa valeur, donc elle perd 18 % par an. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Exprime $V(x)$, justifie qu'il s'agit d'une décroissance exponentielle et donne la cote au 1er janvier 2024.

(d) Écris $a^{1,5}$ comme le produit de deux puissances de a, dont l'une s'écrit avec une racine carrée. Calcule alors la cote au 1er juillet 2024, à l'euro près.

(e) À partir de quel 1er janvier la cote devient-elle pour la première fois inférieure à la moitié du prix d'achat ? Justifie en calculant deux valeurs.

3. *Propriétés algébriques : simplifier*

À retenir : Même base : $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$. Même exposant : $a^x \times b^x = (ab)^x$. Aucune règle pour une somme : $2^x + 2^x = 2 \times 2^x = 2^{x+1}$, et non 2^{2x}.

Ex. 15 ★☆☆ **Calculer de tête avec les propriétés** — Sans calculatrice, écris chaque nombre sous la forme d'une seule puissance, puis donne sa valeur.

(a) Calcule $2^{1,3} \times 2^{2,7}$.

(b) Calcule $\dfrac{10^{4,2}}{10^{2,2}}$.

(c) Calcule $\left(6^{0,25}\right)^8$.

(d) Calcule $1{,}25^{0,5} \times 20^{0,5}$.

(e) Calcule $25^{1,5}$.

(f) Calcule $\dfrac{3^{2,6} \times 3^{1,4}}{3^2}$.

Ex. 16 ★☆☆ **Une seule puissance de 2 ou de 3** — Sans calculatrice. Pour tout réel $x \geqslant 0$, écris chaque expression sous la forme d'une seule puissance de 2 ou de 3.

(a) Écris $(3^x)^3$ sous la forme d'une puissance de 3.

(b) Écris 4^x sous la forme d'une puissance de 2.

(c) Écris $2^x + 2^x$ sous la forme d'une puissance de 2.

(d) Écris $\frac{3^{x+5}}{3^{x+2}}$ sous la forme d'une puissance de 3, puis donne sa valeur.

(e) Écris $9^x \times 3^x$ sous la forme d'une puissance de 3.

(f) Écris $0{,}5^x \times 32^x$ sous la forme d'une puissance de 2.

Ex. 17 ★★☆ **Les simplifications d'Élise** — Élise a simplifié des expressions, pour tout réel $x \geqslant 0$. Pour chaque égalité, cite la propriété en jeu. Si l'égalité est fausse, trouve un contre-exemple et corrige-la.

(a) Élise écrit $5^x \times 5^2 = 25^{x+2}$. Ce calcul est-il juste ? Justifie et corrige si besoin.

(b) Élise écrit $\frac{7^{6x}}{7^{2x}} = 7^{3x}$. Ce calcul est-il juste ? Justifie et corrige si besoin.

(c) Élise écrit $3^x + 3^2 = 3^{x+2}$. Ce calcul est-il juste ? Justifie à l'aide de $x = 1$.

(d) Élise écrit $(2^x)^4 = 2^{x+4}$. Ce calcul est-il juste ? Justifie et corrige si besoin.

(e) Élise écrit $2^x \times 5^x = 10^x$. Ce calcul est-il juste ? Justifie.

Ex. 18 ★★☆ **Les intérêts du livret de Noé** — Calculatrice autorisée. Noé, à Rennes, place un capital. Après x années ($x \geqslant 0$), ce capital vaut $f(x) = 3\,000 \times 1{,}04^x$ euros.

(a) Justifie que $f(x+1) = 1{,}04 \times f(x)$ en citant la propriété utilisée.

(b) Factorise $f(x+1) - f(x)$ pour l'écrire sous la forme $c \times 1{,}04^x$, avec c un nombre à trouver.

(c) Déduis-en les intérêts gagnés pendant la 6e année, c'est-à-dire entre $x = 5$ et $x = 6$, à 0,01 € près.

(d) Écris $f(x+2)$ en fonction de $f(x)$. Le capital augmente-t-il de 8 % tous les deux ans ? Justifie.

Ex. 19 ★★☆ **Une culture de levures** — Sans calculatrice. Dans un laboratoire, le nombre de levures d'une culture après x jours ($x \geqslant 0$) est modélisé par $N(x) = 200 \times 9^x$.

(a) Écris 9^x sous la forme d'une puissance de 3. Justifie.

(b) Calcule $N(0{,}5)$ puis $N(1{,}5)$.

(c) Justifie que chaque demi-journée, le nombre de levures est multiplié par un même coefficient, que tu donneras.

(d) Hugo affirme que $N(x) = 1\,800^x$ pour tout $x \geqslant 0$. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 20 ★★★ **Les abonnés de la chaîne de Lina** — Calculatrice autorisée. Lina, à Dijon, anime une chaîne vidéo. Après x mois ($x \geqslant 0$), son nombre d'abonnés est modélisé par $A(x) = 1\,500 \times 1{,}2^x$.

(a) Simplifie $\dfrac{A(2x)}{A(x)}$ en citant la propriété utilisée.

(b) Tom pense que si la durée double, le nombre d'abonnés double : $A(2x) = 2 \times A(x)$. Utilise la question précédente avec $x = 1$, puis conclus.

(c) Chaque abonné rapporte $R(x) = 0{,}5 \times 1{,}1^x$ euro par mois. Écris le revenu mensuel $A(x) \times R(x)$ sous la forme $k \times b^x$.

(d) Lina pense que son revenu mensuel augmente de $20 + 10 = 30\,\%$ par mois. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Sami, à Brest, a une chaîne modélisée par $B(x) = 1\,500 \times 1{,}44^{0{,}5x}$. Montre que les deux chaînes ont toujours le même nombre d'abonnés.

Ex. 21 ★★★ **Deux cultures de bactéries à Lille** — Sans calculatrice. Dans un laboratoire de Lille, on suit deux cultures de bactéries. Après x heures ($x \geqslant 0$), leurs effectifs, en milliers, sont $U(x) = 2 \times 4^x$ et $W(x) = (2^x)^3 \times 0{,}5^x$.

(a) Écris $U(x)$ sous la forme d'une seule puissance de 2. Justifie chaque étape.

(b) Montre que $W(x) = 4^x$ en citant les propriétés utilisées.

(c) Au bout de combien d'heures la culture U atteint-elle 128 milliers de bactéries ? Justifie.

(d) On réunit deux cultures identiques à W. Montre que l'effectif obtenu, $W(x) + W(x)$, est égal à $U(x)$.

(e) Léo affirme que la culture W atteint l'effectif de U avec une demi-heure de retard : $W(x + 0{,}5) = U(x)$. A-t-il raison ? Justifie.

4. *Exposant 1/n et fraction de période*

À retenir : $a^{\frac{1}{n}}$: nombre positif dont la puissance n-ième vaut a ($32^{\frac{1}{5}} = 2$, pas $\frac{32}{5}$). Sur $\frac{1}{n}$ de période, le coefficient est $C^{\frac{1}{n}}$: un taux ne se divise pas. Contrôle : $(C^{\frac{1}{n}})^n = C$. N'arrondis qu'à la fin.

Ex. 22 ★☆☆ **Racines n-ièmes de tête** — Sans calculatrice.

(a) Calcule $27^{\frac{1}{3}}$, puis contrôle ton résultat en l'élevant au cube.

(b) Écris $\sqrt{36}$ comme une puissance de 36, puis donne sa valeur.

(c) Écris avec un exposant fractionnaire le nombre positif dont la puissance quatrième vaut 625, puis donne sa valeur.

(d) Calcule $0{,}09^{0{,}5}$.

(e) Vrai ou faux : $1\,000^{\frac{1}{3}} \approx 333{,}3$. Justifie.

Ex. 22 (suite)

(f) Trouve le nombre positif a tel que $a^{\frac{1}{3}} = 0{,}2$.

Ex. 23 ★★☆ **Exposants fractionnaires** — Sans calculatrice.

(a) Calcule $16^{\frac{3}{4}}$.

(b) Écris $25^{1{,}5}$ avec un exposant fractionnaire, puis calcule-le.

(c) Simplifie $\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3$.

(d) Simplifie $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$.

(e) Vrai ou faux : $216^{\frac{2}{3}} = 144$. Justifie.

(f) Écris $\dfrac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ sous la forme d'une seule puissance de 3, puis calcule-le.

(g) Calcule $50^{0{,}5} \times 2^{0{,}5}$.

Ex. 24 ★★☆ **Coefficient sur une fraction de période** — Sans calculatrice. Chaque grandeur évolue de façon exponentielle.

(a) La population d'une ville est multipliée par 1,69 en deux ans. Par quel coefficient est-elle multipliée chaque année ?

(b) La masse d'un échantillon radioactif est multipliée par 0,64 en deux heures. Donne le coefficient horaire et le taux d'évolution horaire.

(c) Un prix est multiplié par 1,331 en trois ans. Par quel coefficient est-il multiplié en deux ans ?

(d) Vrai ou faux : « Une hausse de 44 % en deux ans, c'est une hausse de 22 % par an. » Justifie.

(e) Le nombre de visiteurs d'un musée est multiplié par 0,729 en trois mois. Montre que le coefficient mensuel est 0,9.

(f) Dans le sang, la quantité d'un médicament est multipliée par 0,062 5 en 4 h. Trouve le coefficient horaire, puis déduis-en la demi-vie.

Ex. 25 ★★☆ **Taux mensuel d'un livret** — Calculatrice autorisée. Marwa place 2 500 € sur un livret à 4,8 % par an (intérêts composés). Le capital évolue de façon exponentielle, y compris en cours d'année.

(a) Donne le coefficient multiplicateur annuel C de ce placement.

(b) Calcule le coefficient mensuel $C^{\frac{1}{12}}$ arrondi à 10^{-5}, puis le taux mensuel équivalent.

(c) Marwa pense que le taux mensuel est $4{,}8 \div 12 = 0{,}4\,\%$. A-t-elle raison ? Justifie en calculant $1{,}004^{12}$.

(d) Calcule le capital au bout de 7 mois, au centime près, en n'arrondissant qu'à la fin.

(e) Son frère reprend le coefficient mensuel arrondi à 10^{-5} et l'élève à la puissance 7. Quel capital obtient-il ? Explique l'écart.

Ex. 26 ★★☆ **Bactéries à la demi-heure** — Calculatrice autorisée. À 8 h, une culture contient 1 500 bactéries. Leur nombre double chaque heure (croissance exponentielle).

(a) Par quel coefficient le nombre de bactéries est-il multiplié en une demi-heure ? Donne la valeur exacte, puis l'arrondi au millième.

(b) Par quel coefficient est-il multiplié en 20 minutes ? Arrondis au millième.

(c) Combien de bactéries la culture contient-elle à 9 h 40 ? Arrondis à l'unité.

(d) Léo affirme : « En 15 minutes, le nombre de bactéries augmente de 25 %, car $100\,\% \div 4 = 25\,\%$. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 27 ★★★ **Deux offres pour un placement** — Calculatrice autorisée. Yanis veut placer 3 200 € à intérêts composés. Offre A : +6 % par an. Offre B : +0,5 % par mois. Le capital évolue de façon exponentielle, y compris sur une fraction d'année. Sa sœur Inès affirme : « C'est pareil, car $6 \div 12 = 0{,}5$. »

(a) Calcule le coefficient mensuel de l'offre A, arrondi à 10^{-6}, et contrôle-le. Déduis-en le taux mensuel, arrondi à 0,001 %.

(b) Calcule le coefficient multiplicateur annuel de l'offre B, arrondi à 10^{-6}. À quel taux annuel correspond-il ?

(c) Inès a-t-elle raison ? Justifie à l'aide des questions précédentes.

(d) Écris la durée de 2 ans et 9 mois en années, sous forme de fraction. Calcule le capital obtenu avec l'offre A au bout de cette durée, arrondi au centime.

(e) Calcule le capital obtenu avec l'offre B au bout de 2 ans et 9 mois, arrondi au centime. Quelle offre Yanis doit-il choisir, et pour quel écart environ ?

Ex. 28 ★★★ **Abonnés : du jour à la demi-journée** — Calculatrice autorisée. Le jour 0, la chaîne de Salomé compte 1 250 abonnés. Ce nombre est multiplié par 8 tous les 3 jours (croissance exponentielle, y compris sur une fraction de jour). On note $f(x)$ le nombre d'abonnés au bout de x jours, avec $x \geqslant 0$ réel.

(a) Théo affirme : « Chaque jour, le nombre d'abonnés est multiplié par $\frac{8}{3}$. » Corrige son erreur et donne le vrai coefficient multiplicateur journalier.

(b) Exprime $f(x)$ en fonction de x. Calcule ensuite le nombre d'abonnés au bout de 5 jours.

(c) Par quel coefficient le nombre d'abonnés est-il multiplié en 18 heures ? Écris-le sous la forme $2^{\frac{p}{q}}$, puis arrondis-le à 0,001.

(d) Calcule $f(4{,}5)$ et arrondis à l'unité.

(e) Par essais successifs, trouve au bout de combien de demi-journées la chaîne dépasse 100 000 abonnés pour la première fois.

5. *Sens de variation : comparer et résoudre*

À retenir : $a > 1$: $x \mapsto a^x$ est croissante et l'inégalité garde son sens. $0 < a < 1$: elle est décroissante et l'inégalité change de sens ($0{,}7^x \leqslant 0{,}7^3 \iff x \geqslant 3$). $a = 1$: elle est constante. On a toujours $a^x > 0$.

Ex. 29 ★★★ **Sens de variation en un coup d'œil** — Sans calculatrice. Les fonctions sont étudiées sur $[0\,;+\infty[$.

(a) Donne le sens de variation de $x \mapsto \left(\frac{9}{5}\right)^x$.

(b) Donne le sens de variation de $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

(c) Que vaut 1^x pour tout $x \geqslant 0$? Quel est alors le sens de variation de $x \mapsto 1^x$?

(d) Soit $f(x) = 5 \times 0{,}9^x$. Calcule $f(0)$ et donne le sens de variation de f.

(e) Lina affirme : « $x \mapsto 0{,}95^x$ est croissante, car 0,95 est proche de 1. » A-t-elle raison ? Justifie.

(f) Dresse le tableau de variations de $g(x) = 2 \times 1{,}1^x$ sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 30 ★★☆ **Comparer sans calculer** — Sans calculatrice. Justifie chaque réponse par le sens de variation.

(a) Compare $1{,}5^3$ et $1{,}5^5$.

(b) Compare $0{,}75^2$ et $0{,}75^4$.

(c) Compare $3 \times 0{,}8^4$ et $3 \times 0{,}8^{1{,}5}$.

(d) Compare $2^{0{,}5}$ et $4^{0{,}2}$
(écris 4 comme une puissance de 2).

(e) Compare $0{,}85^2$ et 1
(pense à écrire 1 comme une puissance de 0,85).

(f) Vrai ou faux : « $0{,}4^x$ devient nul quand x est assez grand. » Justifie.

Ex. 31 ★★☆ **Résoudre une équation avec une même base** — Sans calculatrice. Résous chaque équation sur $[0\,;+\infty[$ en écrivant les deux membres avec la même base.

(a) $3^x = 243$ (b) $0{,}2^x = 0{,}008$

(c) $7^x = 1$ (d) $9^x = 3$

(e) $10^x = 1\,000^2$ (f) $5^x \times 5^2 = 5^6$

(g) $4^x = -4$

Ex. 32 ★★☆ **Inéquations : garder ou inverser le sens** — Sans calculatrice. Résous sur $[0\,;+\infty[$ et donne l'ensemble des solutions S.

(a) Résous $4^x \leqslant 64$.

(b) Résous $0{,}3^x \leqslant 0{,}09$.

(c) Malo résout $0{,}1^x > 0{,}001$: « $0{,}001 = 0{,}1^3$, donc $x > 3$. » Trouve son erreur et corrige-la.

(d) Résous $0{,}9^x \leqslant 1$.

Ex. 33 ★★☆ **Un médicament qui s'élimine** — Calculatrice autorisée. La quantité de médicament dans le sang de Yanis est modélisée par $Q(x) = 120 \times 0{,}6^x$ (en mg), où $x \geqslant 0$ est le temps en heures après la prise.

(a) Calcule $Q(0)$ et interprète ce résultat.

(b) Donne le sens de variation de Q en justifiant, puis dresse son tableau de variations.

(c) Sans calcul, compare $Q(2{,}5)$ et $Q(4)$.

(d) Résous $Q(x) = 43{,}2$ et interprète.

(e) Yanis affirme : « Au bout d'un temps assez long, il ne restera plus du tout de médicament. » D'après le modèle, a-t-il raison ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Le thé de Noam refroidit** — Sans calculatrice. Noam sert un thé à Brest. L'écart entre la température du thé et celle de la pièce (en °C) est modélisé par $E(x) = 80 \times 0{,}5^x$, où $x \geqslant 0$ est le temps en dizaines de minutes.

(a) Calcule $E(0)$ et interprète. Justifie le sens de variation de E, puis dresse son tableau de variations.

(b) Résous $E(x) \leqslant 5$ sur $[0\,;+\infty[$ et interprète le résultat dans le contexte.

(c) Range dans l'ordre croissant $E(0{,}5)$, $E(3)$ et $E(1{,}5)$ sans les calculer. Justifie.

(d) Montre que, pour tout $x \geqslant 0$, $E(x+1) = \dfrac{E(x)}{2}$. Interprète ce résultat dans le contexte.

Ex. 35 ★★★ **Trois comptes, trois évolutions** — Sans calculatrice. Le nombre d'abonnés (en milliers) de trois comptes est modélisé, pour $x \geqslant 0$ en mois, par : Maëlle $M(x) = 2 \times 3^x$, Tom $T(x) = 2 \times 1{,}2^x$, Inès $I(x) = 50 \times 1^x$.

(a) Donne le sens de variation de M et de T sur $[0\,;+\infty[$ en justifiant.

(b) Résous $M(x) \geqslant 54$ sur $[0\,;+\infty[$ et interprète le résultat.

(c) Montre que, pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{M(x)}{T(x)} = 2{,}5^x$. Déduis-en lequel des deux comptes a le plus d'abonnés pour $x > 0$.

(d) Résous $M(x) = 6{,}25 \times T(x)$ et interprète.

(e) Inès affirme que son compte connaît une croissance exponentielle, car $I(x)$ est de la forme $k \times a^x$. A-t-elle raison ? Justifie.

6. *Seuils, temps de doublement, demi-vie*

À retenir : Seuil : $V_0 \times a^x \geqslant S \iff a^x \geqslant \frac{S}{V_0}$. On encadre la solution entre deux valeurs consécutives, puis on conclut avec le sens de variation (en arrondissant à l'entier supérieur). Doublement : $a^T = 2$. Demi-vie : $a^T = 0{,}5$. Ces durées ne dépendent pas de V_0. Après $3T$, il reste $\frac{1}{8}$, pas 0.

Ex. 36 ★★☆ **Seuils par le calcul** — Sans calculatrice. Dans tout l'exercice, $x \geqslant 0$. Utilise une puissance connue et le sens de variation de $x \mapsto a^x$.

(a) Résous l'équation $4^x = 8$.

(b) Donne l'ensemble des x tels que $5 \times 16^x \geqslant 10$.

(c) Résous l'inéquation $7 \times 0{,}125^x \leqslant 3{,}5$.

(d) Une vidéo a 300 vues, et son nombre de vues triple chaque jour. Au bout de combien de jours entiers dépasse-t-elle 5 000 vues ?

(e) Pour quelles valeurs de x a-t-on $27^x \leqslant 9$?

(f) Un élève écrit : « $3 \times 4^x \geqslant 12 \iff 4^x \geqslant 36$ ». Corrige son erreur, puis résous l'inéquation.

Ex. 37 ★★☆ **Doublement et demi-vie : réflexes** — Sans calculatrice. Justifie chaque réponse en une phrase.

(a) Une culture de levures double toutes les 3 heures. Par combien est-elle multipliée en 12 heures ?

(b) Un isotope a une demi-vie de 6 jours. Un échantillon en contient 80 mg. Quelle masse en reste-t-il au bout de 18 jours ?

(c) Lina place 500 € et Hugo 4 000 €, au même taux annuel. Le capital de Lina double en 12 ans. En combien de temps celui d'Hugo double-t-il ?

(d) Vrai ou faux ? Justifie : « avec une hausse de 50 % par an, une quantité double en $100 \div 50 = 2$ ans ».

(e) Une quantité est multipliée par 0,25 chaque jour. Quelle est sa demi-vie, en heures ?

(f) Des bactéries doublent toutes les 30 minutes. Donne l'ordre de grandeur du coefficient multiplicateur sur 10 heures.

Ex. 38 ★★☆ **Population : seuil et année** — Calculatrice autorisée. En 2025, une commune compte 12 500 habitants. On suppose que sa population augmente de 3 % par an. On note $P(x)$ le nombre d'habitants x années après 2025.

(a) Exprime $P(x)$ en fonction de x.

(b) Explique pourquoi $P(x) \geqslant 20\,000$ revient à comparer $1{,}03^x$ à un nombre que tu préciseras.

(c) Avec le tableau de valeurs de ta calculatrice (pas de 1), donne deux entiers consécutifs qui encadrent la solution.

(d) Noé veut arrondir à l'entier inférieur, car « on ne compte que les années complètes ». A-t-il raison ? En quelle année la population dépassera-t-elle 20 000 habitants ?

Ex. 39 ★★☆ **Demi-vie d'un médicament** — Calculatrice autorisée. Après une prise de 40 mg d'un médicament, la quantité dans le sang baisse de 18 % par heure. On note $Q(x) = 40 \times 0{,}82^x$ cette quantité, en mg, au bout de x heures.

(a) Écris l'équation que vérifie la demi-vie T de ce médicament.

(b) Avec le tableau de valeurs de ta calculatrice, au pas de 1 puis au pas de 0,1, donne la demi-vie au dixième d'heure près.

(c) Une nouvelle prise est conseillée dès qu'il reste moins de 10 mg. Au bout de combien d'heures entières ? Justifie.

(d) Léo dit : « -18 % par heure, c'est -9 % par demi-heure. » Calcule le coefficient multiplicateur par demi-heure, à 0,001 près, et corrige-le.

Ex. 40 ★★☆ **Abonnés : lire un programme de seuil** — Calculatrice autorisée. Le compte de Yasmine a 1 500 abonnés, et ce nombre augmente de 12 % par semaine. Elle cherche au bout de combien de semaines elle dépassera 10 000 abonnés. Elle écrit ce programme :

```
a = 1500
n = 0
while a < 10000:
    a = a * 1.12
    n = n + 1
print(n)
```

(a) Que représentent les variables `a` et `n` ? Pourquoi multiplie-t-on par 1,12 ?

(b) Tom remplace la condition par `while a >= 10000:`. Qu'affiche alors le programme ? Explique.

(c) Calcule $1{,}12^{16}$ et $1{,}12^{17}$, puis donne ce qu'affiche le programme de Yasmine. Conclus.

(d) Yasmine ajoute `print(round(a))` à la fin. Qu'affiche cette ligne ? Que représente ce nombre ?

Ex. 41 ★★★ **Deux placements, un seul temps de doublement** — Calculatrice autorisée. Le 1er janvier 2026, à Rennes, Léonie place 3 000 € et Mathis 7 000 €, tous deux à 4,5 % par an. On note $L(x)$ et $M(x)$ leurs capitaux, en euros, au bout de x années ($x \geqslant 0$). Arrondis les puissances de 1,045 à 10^{-4}.

(a) Exprime $L(x)$ et $M(x)$ en fonction de x.

(b) Mathis affirme : « J'ai placé plus d'argent, donc mon capital doublera plus vite. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Léonie prévoit un doublement en $100 \div 4{,}5 \approx 22$ ans. Avec le tableau de valeurs (pas 1), trouve le nombre d'années entières nécessaire et corrige-la.

(d) Au pas de 0,1, encadre le temps de doublement T. Au bout de combien d'années, au dixième près, le capital a-t-il doublé ? Compare à $70 \div 4{,}5$.

(e) Sans nouveau tableau, estime quand le capital de Léonie atteindra 12 000 €. Vérifie à la calculatrice et donne l'année.

Ex. 42 ★★★ **Échantillon radioactif : jamais zéro** — Calculatrice autorisée sauf mention contraire. Un laboratoire de Grenoble reçoit 640 mg d'un isotope radioactif de demi-vie 8 jours. On note $M(x) = 640 \times a^x$ la masse restante, en mg, au bout de x jours ($x \geqslant 0$), où a est le coefficient multiplicateur journalier.

(a) Sans calculatrice, calcule $M(16)$ et $M(24)$. Quelle fraction de la masse de départ reste-t-il au bout de 24 jours ?

(b) Sacha affirme : « Chaque demi-vie enlève 320 mg, donc au bout de 16 jours il ne reste rien. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Écris l'égalité vérifiée par a, puis donne a sous forme d'une puissance de 0,5 et arrondi à 0,001. Quelle est la baisse par jour, en % ?

(d) L'échantillon est sans danger quand $M(x) \leqslant 1$. Sans calculatrice, encadre la durée cherchée entre deux multiples consécutifs de 8 jours.

(e) Avec la valeur exacte de a et un tableau de valeurs au pas adapté, trouve au bout de combien de jours entiers l'échantillon est sans danger.