1re tronc commun / Fonctions exponentielles — corrigé

benprof
particulier.fr

1. *Rappels de 2nde : puissances entières, racine carrée, évolutions répétées*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : puissances entières**

(a) Même base, on additionne les exposants : $7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$.

(b) Même base, on soustrait les exposants : $\frac{6^{11}}{6^4} = 6^{11-4} = 6^7$.

(c) Une puissance de puissance : on multiplie les exposants. $(5^2)^3 = 5^{2\times 3} = 5^6$, et pas 5^5.

(d) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$: c'est un nombre positif, pas -16.

(e) Tout nombre non nul élevé à la puissance 0 vaut 1 : $2\,026^0 = 1$.

(f) $(-3)^4 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = 81$ (quatre facteurs négatifs). Dans -3^4, seul 3 est à la puissance 4 : $-3^4 = -81$.

(g) Même exposant, on multiplie les bases : $0{,}25^3 \times 4^3 = (0{,}25\times 4)^3 = 1^3 = 1$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : racines carrées et écriture scientifique**

(a) $0{,}7^2 = 0{,}49$ et $0{,}7 > 0$, donc $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$.

(b) $1{,}5^2 = 2{,}25$ et $1{,}5 > 0$: ce nombre est $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

(c) Par définition, $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$.

(d) $\sqrt{8}\times\sqrt{50} = \sqrt{8\times 50} = \sqrt{400} = 20$.

(e) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$. Ce n'est pas égal : la racine d'une somme n'est pas la somme des racines.

(f) Faux. $(-6)^2 = 36$ et $\sqrt{36} = 6$. Une racine carrée est toujours positive.

(g) $3{,}2\times 5 = 16$ et $10^5\times 10^{-2} = 10^3$, donc le produit vaut $16\times 10^3 = 1{,}6\times 10^4$.

Ex. 3 ★★☆ **Vrai ou faux sur les puissances et les racines**

(a) Faux. Pour un produit, la règle s'applique : $(2\times 5)^3 = 2^3\times 5^3 = 1\,000$. Pour une somme, non : $(2+5)^2 = 7^2 = 49$, alors que $2^2+5^2 = 4+25 = 29$. Le membre de gauche vaut 1 049 et celui de droite 1 029.

(b) Vrai. $(2^3)^2 = 2^6$, puis $2^6\times 2^{-4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$.

Ex. 3 (suite)

(c) Faux. $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ et $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$, donc le membre de gauche vaut 11. Le membre de droite vaut 9 : on a remplacé à tort $\sqrt{25-9}$ par $\sqrt{25}-\sqrt{9} = 2$.

(d) Vrai. Même exposant : $\frac{6^4}{2^4} = \left(\frac{6}{2}\right)^4 = 3^4$. Puis, même base : $3^4\times 3^{-2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$.

Ex. 4 ★★☆ **Un loyer qui augmente chaque année**

(a) Une hausse de 2 % revient à multiplier par $1+\frac{2}{100} = 1{,}02$.

(b) En 2027 : $640\times 1{,}02 = 652{,}80$ €. En 2028 : $652{,}80\times 1{,}02 = 665{,}856$, soit environ 665,86 €.

(c) Le loyer est multiplié par 1,02 chaque année, donc au bout de n années : $L = 640\times 1{,}02^n$.

(d) 2031 correspond à $n = 5$: $L = 640\times 1{,}02^5 \approx 706{,}61$. En 2031, le loyer est d'environ 706,61 € par mois.

(e) Non. Le coefficient global est $1{,}02^5 \approx 1{,}1041$, et pas 1,10 : en 5 ans, le loyer augmente d'environ 10,41 %, un peu plus que 10 %.

Ex. 5 ★★★ **Bactéries et ordres de grandeur**

(a) Le nombre est multiplié par $2\times 2\times 2 = 2^3 = 8$ en 3 heures. Un coefficient de 8 correspond à une hausse de 700 % (et pas de 300 %).

(b) De 8 h à 13 h, il s'écoule 5 heures : $3\times 10^4\times 2^5 = 3\times 10^4\times 32 = 96\times 10^4 = 9{,}6\times 10^5$. À 13 h, il y a $9{,}6\times 10^5$ bactéries.

(c) Puissance de puissance : $\left(2^{10}\right)^2 = 2^{10\times 2} = 2^{20}$. Donc $2^{20} \approx \left(10^3\right)^2 = 10^6$.

(d) De 8 h à 4 h le lendemain, il s'écoule 20 heures : $3\times 10^4\times 2^{20} \approx 3\times 10^4\times 10^6 = 3\times 10^{10}$. Le lendemain à 4 h, il y a environ 3×10^{10} bactéries, soit une trentaine de milliards.

Ex. 6 ★★★ **Cinq calculs à justifier, puis un classement**

(a) Yanis a additionné les exposants, alors qu'il faut les multiplier : $\left(2^3\right)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$, et non 2^7. Donc $A = \frac{2^{12}\times 2^{-5}}{2^4} = \frac{2^7}{2^4} = 2^3 = 8$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$: c'est un nombre positif, et non -25. On calcule d'abord la parenthèse : $(7+3)^2 = 10^2 = 100$, et non $7^2 + 3^2 = 58$.
Donc $B = \frac{100}{25} = 4$.

(c) Les deux puissances ont le même exposant, donc on multiplie les bases : $2{,}5^3 \times 0{,}4^3 = (2{,}5 \times 0{,}4)^3 = 1^3 = 1$. De plus, $9^0 = 1$.
Donc $C = 1 + 1 = 2$.

(d) Par définition de la racine carrée, $\left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$. Ensuite, $\sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$, car $13^2 = 169$ et $13 > 0$.
Donc $D = 11 - 13 = -2$. Yanis a écrit $\sqrt{144+25} = \sqrt{144} + \sqrt{25} = 12 + 5 = 17$, ce qui donne $11 - 17 = -6$. C'est faux : la racine d'une somme n'est pas la somme des racines.

(e) Dans -2^4, l'exposant ne porte que sur 2, donc $-2^4 = -16$. Dans $(-5)^2$, il porte sur -5, donc $(-5)^2 = 25$. Ainsi $E = -16 + 25 = 9$. Comme $-2 < 2 < 4 < 8 < 9$, on obtient $D < C < B < A < E$.

Ex. 7 ★★★ **Abonnés et vues d'une chaîne vidéo**

(a) Une hausse de 3 % correspond au coefficient multiplicateur 1,03. Répétée 5 fois, elle donne $1{,}03^5 \approx 1{,}159$: en 5 ans, le nombre d'abonnés augmente d'environ 15,9 %.

(b) $2{,}4 \times 10^4 \times 1{,}03^5 = 24\,000 \times 1{,}03^5 \approx 27\,822{,}6$. Début 2031, la chaîne comptera environ 27 823 abonnés.

(c) $2{,}4 \times 10^4 \times 50 = 2{,}4 \times 5 \times 10^4 \times 10 = 12 \times 10^5 = 1{,}2 \times 10^6$. En 2026, la chaîne totalise environ $1{,}2 \times 10^6$ vues.

(d) Le nombre total de vues est égal au nombre d'abonnés multiplié par le nombre moyen de vues par abonné. En 5 ans, le premier est multiplié par $1{,}03^5$ et le second par $1{,}05^5$. Le total est donc multiplié par $1{,}03^5 \times 1{,}05^5 = (1{,}03 \times 1{,}05)^5 = 1{,}0815^5 \approx 1{,}480$ (même exposant : on multiplie les bases). Cela fait environ +48 % de vues.

(e) $1{,}2 \times 10^6 \times 1{,}0815^5 \approx 1\,775\,472$, soit environ $1{,}8 \times 10^6$ vues en 2031. L'ordre de grandeur est 10^6 : quelques millions de vues, presque 2 millions.

2. *Fonctions $x \mapsto a^x$ et modèles exponentiels $V_0 \times a^x$*

Ex. 8 ★☆☆ **Images d'une fonction exponentielle**

(a) $16^{0,5} = \sqrt{16} = 4$ (et pas $16 \times 0{,}5 = 8$).

(b) $7^0 = 1$: toute base strictement positive élevée à la puissance 0 donne 1.

(c) $3^{1,3} \times 3^{0,7} = 3^{1,3+0,7} = 3^2 = 9$: on ajoute les exposants, car $a^{x+y} = a^x \times a^y$.

(d) $f(2) = 3 \times 4^2 = 3 \times 16 = 48$ (et pas $(3 \times 4)^2 = 144$: seule la base 4 est élevée au carré).

(e) $f(0{,}5) = 3 \times 4^{0,5} = 3 \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$.

(f) $1^{3,7} = 1$: si $a = 1$, alors $1^x = 1$ pour tout x.

Ex. 9 ★☆☆ **Taux et coefficient multiplicateur**

(a) $a = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$ (et pas 0,06 ni 6). Comme $a > 1$: croissance exponentielle.

(b) $a = 1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$. Comme $0 < a < 1$: décroissance exponentielle.

(c) Faux : $a = 1 + \frac{120}{100} = 2{,}2$. Le coefficient 1,2 correspondrait à une hausse de 20 %. Comme $a > 1$: croissance exponentielle.

(d) $a = 1 - \frac{2{,}5}{100} = 0{,}975$. Comme $0 < a < 1$: décroissance exponentielle.

(e) $a = 1{,}18 = 1 + 0{,}18$: hausse de 18 % par unité de temps.

(f) $a = 0{,}93 = 1 - 0{,}07$: baisse de 7 % par unité de temps.

Ex. 10 ★★☆ **Deux cultures de bactéries : affine ou exponentiel ?**

(a) $\frac{460}{400} = \frac{529}{460} = \frac{608{,}35}{529} = 1{,}15$. Les quotients sont constants : la culture A suit une croissance exponentielle.

(b) $280 - 250 = 310 - 280 = 340 - 310 = 30$. Les différences sont constantes : la culture B suit un modèle affine, $B(x) = 250 + 30x$.

(c) $k = A(0) = 400$ et $a = 1{,}15$, donc $A(x) = 400 \times 1{,}15^x$. La culture A augmente de 15 % par heure.

(d) Non. La culture B gagne 30 milliers de bactéries par heure, pas 30 %. Pendant la 1re heure, $\frac{280}{250} = 1{,}12$, soit +12 %. Pendant la 2e heure, $\frac{310}{280} \approx 1{,}107$, soit environ +10,7 %. Le pourcentage n'est pas constant.

Ex. 11 ★★☆ **Le placement d'Inès**

(a) Valeur initiale : $C(0) = 3\,200$. Coefficient : $a = 1 + \frac{4}{100} = 1{,}04$.
Donc $C(x) = 3\,200 \times 1{,}04^x$.

(b) 2027 correspond à $x = 2027 - 2022 = 5$. $C(5) = 3\,200 \times 1{,}04^5 \approx 3\,893{,}29$. Le 1er janvier 2027, Inès a environ 3 893,29 €.

(c) Le 1er juillet 2022 correspond à $x = 0{,}5$. $C(0{,}5) = 3\,200 \times 1{,}04^{0{,}5} = 3\,200 \times \sqrt{1{,}04} \approx 3\,263{,}37$. Inès a alors environ 3 263,37 €.

(d) Les intérêts d'une année valent $3\,200 \times 0{,}04 = 128$ €. Inès en prend la moitié : $3\,200 + 64 = 3\,264$ €. Elle multiplie donc par 1,02. Or le coefficient sur une demi-année est $1{,}04^{0{,}5} = \sqrt{1{,}04} \approx 1{,}0198$, et pas 1,02 (car $1{,}02^2 = 1{,}0404 \neq 1{,}04$). Le 1er juillet 2022, Inès n'a en réalité qu'environ 3 263,37 €.

Ex. 12 ★★☆ **Concentration d'un médicament : corrige les erreurs**

(a) $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{k \times a^2}{k \times a} = a$, donc $a = \frac{24{,}3}{27} = 0{,}9 = 1 - 0{,}1$. La concentration baisse de 10 % par heure.

(b) Non : la concentration au moment de l'injection est $f(0) = k$, pas $f(1)$. On a $k \times 0{,}9 = 27$, donc $k = \frac{27}{0{,}9} = 30$. Elle vaut 30 mg/L, et $f(x) = 30 \times 0{,}9^x$.

(c) Tom calcule $(30 \times 0{,}9)^3 = 27^3 = 19\,683$, ce qui est absurde. Seule la base a est élevée à la puissance : $k \times a^x \neq (k \times a)^x$. $f(3) = 30 \times 0{,}9^3 = 30 \times 0{,}729 = 21{,}87$. Au bout de 3 heures, la concentration est de 21,87 mg/L.

(d) $f(x) = 30 \times 0{,}9^x$ avec $30 > 0$ et $0 < 0{,}9 < 1$: la fonction f est décroissante. Comme $4 < 6$, on a $f(4) > f(6)$. La concentration est plus élevée 4 heures après l'injection que 6 heures après.

Ex. 13 ★★★ **Montval contre Brécourt : 3 % par an ou 1 500 habitants par an ?**

(a) Une hausse de 3 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$, et 2020 correspond à $x = 0$.
Donc $M(x) = 40\,000 \times 1{,}03^x$. Brécourt gagne le même nombre d'habitants chaque année.
Donc $B(x) = 46\,000 + 1\,500x$: c'est un modèle affine.

Ex. 13 (suite)

(b) $M(1) = 40\,000 \times 1{,}03 = 41\,200$ et $M(2) = 41\,200 \times 1{,}03 = 42\,436$. Les gains sont de $41\,200 - 40\,000 = 1\,200$ habitants, puis de $42\,436 - 41\,200 = 1\,236$ habitants. Noa a tort : on ajoute 3 % d'une population qui augmente, donc le gain grandit chaque année. « 3 % par an » ne veut pas dire « 1 200 habitants par an ».

(c) Le 1er janvier 2020 correspond à $x = 0$.
Donc le 1er janvier 2024 correspond à $x = 2024 - 2020 = 4$: Malo a compté des dates, pas des années écoulées. $M(4) = 40\,000 \times 1{,}03^4 \approx 45\,020$ (Malo trouverait $M(5) \approx 46\,371$). Au 1er janvier 2024, Montval compte environ 45 020 habitants.

(d) 2030 correspond à $x = 10$. $M(10) = 40\,000 \times 1{,}03^{10} \approx 53\,757$ et $B(10) = 46\,000 + 1\,500 \times 10 = 61\,000$. Au 1er janvier 2030, Brécourt reste plus peuplée que Montval, avec environ 7 243 habitants de plus.

(e) Le tableau de valeurs de la calculatrice montre que $M(x) < B(x)$ pour tout entier x de 0 à 24. En particulier, 2044 correspond à $x = 24$: $M(24) = 40\,000 \times 1{,}03^{24} \approx 81\,312$ et $B(24) = 46\,000 + 1\,500 \times 24 = 82\,000$, donc $M(24) < B(24)$. 2045 correspond à $x = 25$: $M(25) \approx 83\,751$ et $B(25) = 83\,500$, donc $M(25) > B(25)$. Montval dépasse Brécourt pour la première fois au 1er janvier 2045.

Ex. 14 ★★★ **La cote de la voiture de Yanis**

(a) 2025 correspond à $x = 2025 - 2023 = 2$. $k = V(0)$ est la valeur à l'achat ($x = 0$), donc $k = 30\,000$. Alors $30\,000 \times a^2 = 19\,200$, soit $a^2 = \frac{19\,200}{30\,000} = 0{,}64$. Comme $a > 0$, $a = 0{,}64^{0{,}5} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

(b) Léna a tort. La perte de 36 % en deux ans est juste, car $a^2 = 0{,}64 = 1 - 0{,}36$. Mais $a = 0{,}8 = 1 - \frac{20}{100}$: la cote baisse de 20 % par an. Avec 18 % par an, on aurait $0{,}82^2 = 0{,}6724$, soit une perte de 32,76 % seulement en deux ans. Les pourcentages ne s'ajoutent pas.

(c) $V(x) = 30\,000 \times 0{,}8^x$. Comme $0 < 0{,}8 < 1$, c'est une décroissance exponentielle. 2024 correspond à $x = 1$: $V(1) = 30\,000 \times 0{,}8 = 24\,000$. Au 1er janvier 2024, la voiture vaut 24 000 €.

(d) D'après $a^{x+y} = a^x \times a^y$: $a^{1,5} = a^1 \times a^{0,5} = a \times \sqrt{a}$. Le 1er juillet 2024 correspond à $x = 1{,}5$.
Donc $V(1{,}5) = 30\,000 \times 0{,}8 \times \sqrt{0{,}8} = 24\,000 \times \sqrt{0{,}8} \approx 21\,466$. Au 1er juillet 2024, la voiture vaut environ 21 466 €.

Ex. 14 **(suite)**

(e) La moitié du prix d'achat vaut $\frac{30\,000}{2} = 15\,000$ €. $V(3) = 30\,000 \times 0{,}8^3 = 15\,360 > 15\,000$. Ensuite, $V(4) = 30\,000 \times 0{,}8^4 = 12\,288 < 15\,000$. La cote décroît, et $x = 4$ correspond à $2023 + 4 = 2027$. La cote passe donc pour la première fois sous la moitié du prix d'achat au 1er janvier 2027.

3. *Propriétés algébriques : simplifier*

Ex. 15 ★☆☆ **Calculer de tête avec les propriétés**

(a) Même base, on additionne les exposants : $2^{1,3} \times 2^{2,7} = 2^{1,3+2,7} = 2^4 = 16$.

(b) Même base, on soustrait les exposants : $\frac{10^{4,2}}{10^{2,2}} = 10^{4,2-2,2} = 10^2 = 100$.

(c) Puissance d'une puissance, on multiplie les exposants : $\left(6^{0,25}\right)^8 = 6^{0,25\times 8} = 6^2 = 36$.

(d) Même exposant, on multiplie les bases : $1{,}25^{0,5} \times 20^{0,5} = (1{,}25 \times 20)^{0,5} = 25^{0,5} = \sqrt{25} = 5$.

(e) $25 = 5^2$, donc $25^{1,5} = \left(5^2\right)^{1,5} = 5^{2\times 1,5} = 5^3 = 125$ (puissance d'une puissance).

(f) Au numérateur : $3^{2,6} \times 3^{1,4} = 3^{2,6+1,4} = 3^4$. Puis $\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$.

Ex. 16 ★☆☆ **Une seule puissance de 2 ou de 3**

(a) Puissance d'une puissance : $(3^x)^3 = 3^{3x}$ (on multiplie les exposants, on n'ajoute pas 3).

(b) $4 = 2^2$, donc $4^x = \left(2^2\right)^x = 2^{2x}$.

(c) Aucune règle pour une somme, mais $2^x + 2^x = 2 \times 2^x = 2^1 \times 2^x = 2^{x+1}$ (et non 2^{2x}).

(d) On soustrait les exposants : $\frac{3^{x+5}}{3^{x+2}} = 3^{(x+5)-(x+2)} = 3^3 = 27$.

(e) $9^x = \left(3^2\right)^x = 3^{2x}$, donc $9^x \times 3^x = 3^{2x} \times 3^x = 3^{2x+x} = 3^{3x}$.

(f) Même exposant, on multiplie les bases : $0{,}5^x \times 32^x = (0{,}5 \times 32)^x = 16^x$. Or $16 = 2^4$, donc $16^x = \left(2^4\right)^x = 2^{4x}$. Autre méthode : $0{,}5^x = \frac{1}{2^x}$ et $32^x = 2^{5x}$, donc $\frac{2^{5x}}{2^x} = 2^{5x-x} = 2^{4x}$.

Ex. 17 ★★☆ **Les simplifications d'Élise**

(a) Faux. Même base : on additionne les exposants sans toucher à la base, donc $5^x \times 5^2 = 5^{x+2}$. Contre-exemple avec $x = 1$: $5 \times 25 = 125 = 5^3$, alors que $25^3 = 15\,625$.

Ex. 17 **(suite)**

(b) Faux. Pour un quotient, on soustrait les exposants, on ne les divise pas : $\frac{7^{6x}}{7^{2x}} = 7^{6x-2x} = 7^{4x}$. Avec $x = 1$: $\frac{7^6}{7^2} = 7^4$, et non 7^3.

(c) Faux. Il n'existe aucune règle pour une somme. Avec $x = 1$: $3^1 + 3^2 = 3 + 9 = 12$, alors que $3^{1+2} = 27$. L'expression $3^x + 3^2$ ne s'écrit pas plus simplement.

(d) Faux. Puissance d'une puissance : on multiplie les exposants, donc $(2^x)^4 = 2^{4x}$. Avec $x = 1$: $\left(2^1\right)^4 = 16$, alors que $2^{1+4} = 32$.

(e) Juste. Même exposant, on multiplie les bases : $2^x \times 5^x = (2 \times 5)^x = 10^x$.

Ex. 18 ★★☆ **Les intérêts du livret de Noé**

(a) $f(x+1) = 3\,000 \times 1{,}04^{x+1} = 3\,000 \times 1{,}04^x \times 1{,}04^1$, car $a^{x+y} = a^x \times a^y$.
Donc $f(x+1) = 1{,}04 \times f(x)$: chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

(b) $f(x+1) - f(x) = 3\,000 \times 1{,}04^x \times 1{,}04 - 3\,000 \times 1{,}04^x = 3\,000 \times 1{,}04^x \times (1{,}04 - 1) = 120 \times 1{,}04^x$. Donc $c = 120$.

(c) $f(6) - f(5) = 120 \times 1{,}04^5 \approx 146{,}00$. Pendant la 6e année, Noé gagne environ 146,00 € d'intérêts.

(d) $f(x+2) = f(x) \times 1{,}04^2 = 1{,}0816 \times f(x)$. Le coefficient multiplicateur sur deux ans vaut 1,0816. Le capital augmente donc de 8,16 % tous les deux ans, et non de 8 % : on ne peut pas additionner les pourcentages.

Ex. 19 ★★☆ **Une culture de levures**

(a) $9 = 3^2$, donc $9^x = \left(3^2\right)^x = 3^{2x}$ (puissance d'une puissance).

(b) $N(0{,}5) = 200 \times 9^{0,5} = 200 \times \sqrt{9} = 200 \times 3 = 600$. $N(1{,}5) = 200 \times 9^1 \times 9^{0,5} = 200 \times 9 \times 3 = 5\,400$. Il y a 600 levures après une demi-journée et 5 400 après un jour et demi.

(c) $N(x + 0{,}5) = 200 \times 9^x \times 9^{0,5} = N(x) \times 3$, car $a^{x+y} = a^x \times a^y$. Chaque demi-journée, le nombre de levures est multiplié par 3, quel que soit l'instant de départ.

(d) Non. La propriété $a^x \times b^x = (ab)^x$ demande le même exposant sur les deux nombres, or 200 n'est pas élevé à la puissance x. Contre-exemple avec $x = 0$: $N(0) = 200 \times 9^0 = 200$, alors que $1\,800^0 = 1$. Hugo a tort.

Ex. 20 ★★★ **Les abonnés de la chaîne de Lina**

(a) $\frac{A(2x)}{A(x)} = \frac{1\,500\times 1{,}2^{2x}}{1\,500\times 1{,}2^{x}} = 1{,}2^{2x-x} = 1{,}2^{x}$, car $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. On soustrait les exposants, on ne les divise pas : le résultat n'est pas $1{,}2^2$.

(b) D'après la question précédente, $A(2x) = 1{,}2^x \times A(x)$. Avec $x = 1$: $A(1) = 1\,500 \times 1{,}2 = 1\,800$ et $A(2) = 1{,}2 \times 1\,800 = 2\,160$, alors que $2 \times A(1) = 3\,600$. Tom a tort : $A(2x) = 2 \times A(x)$ demanderait $1{,}2^x = 2$, ce qui n'est pas vrai pour tout x.

(c) $A(x) \times R(x) = 1\,500 \times 0{,}5 \times 1{,}2^x \times 1{,}1^x = 750 \times (1{,}2 \times 1{,}1)^x = 750 \times 1{,}32^x$, car $a^x \times b^x = (ab)^x$. Donc $k = 750$ et $b = 1{,}32$.

(d) Non. Le coefficient multiplicateur mensuel du revenu est $1{,}2 \times 1{,}1 = 1{,}32$: le revenu augmente de 32 % par mois. Les coefficients se multiplient, les pourcentages ne s'additionnent pas. Par exemple, après un mois, le revenu vaut $750 \times 1{,}32 = 990$ €, et non $750 \times 1{,}3 = 975$ €.

(e) D'après $(a^x)^y = a^{xy}$: $1{,}44^{0{,}5x} = \left(1{,}44^{0{,}5}\right)^x$. Or $1{,}44^{0{,}5} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$.
Donc $B(x) = 1\,500 \times 1{,}2^x = A(x)$ pour tout $x \geqslant 0$: les deux chaînes ont toujours le même nombre d'abonnés.

Ex. 21 ★★★ **Deux cultures de bactéries à Lille**

(a) $4^x = \left(2^2\right)^x = 2^{2x}$ (propriété $(a^x)^y = a^{xy}$). Puis $U(x) = 2^1 \times 2^{2x} = 2^{2x+1}$
(propriété $a^x \times a^y = a^{x+y}$).

(b) $(2^x)^3 = 2^{3x}$ (propriété $(a^x)^y = a^{xy}$). Même exposant : $0{,}5^x \times 2^x = (0{,}5 \times 2)^x = 1^x = 1$, donc $0{,}5^x = \frac{1}{2^x}$. Ainsi $W(x) = \frac{2^{3x}}{2^x} = 2^{3x-x} = 2^{2x}$ (propriété $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$: on soustrait les exposants, on ne les divise pas). Enfin $2^{2x} = \left(2^2\right)^x = 4^x$.

(c) $128 = 2^7$.
Donc $U(x) = 128$ équivaut à $2^{2x+1} = 2^7$. La fonction $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, donc deux puissances de 2 égales ont le même exposant : $2x + 1 = 7$, soit $x = 3$. Vérification : $2 \times 4^3 = 128$. La culture U atteint 128 milliers de bactéries au bout de 3 heures.

(d) $W(x) + W(x) = 2 \times W(x) = 2 \times 4^x = U(x)$. On peut aussi écrire $2 \times 2^{2x} = 2^{2x+1}$: deux cultures W réunies ont toujours le même effectif que la culture U.

(e) Oui. $W(x + 0{,}5) = 4^{x+0{,}5} = 4^x \times 4^{0{,}5}$ (propriété $a^{x+y} = a^x \times a^y$). Or $4^{0{,}5} = \sqrt{4} = 2$, donc $W(x + 0{,}5) = 2 \times 4^x = U(x)$. Léo a raison.

4. *Exposant 1/n et fraction de période*

Ex. 22 ★★☆ **Racines n-ièmes de tête**

(a) $27^{\frac{1}{3}}$ est le nombre positif dont le cube vaut 27 : $27^{\frac{1}{3}} = 3$. Contrôle : $3^3 = 27$. Ce n'est pas $\frac{27}{3} = 9$.

(b) $\sqrt{36} = 36^{\frac{1}{2}} = 6$, car $6^2 = 36$ et $6 > 0$.

(c) C'est $625^{\frac{1}{4}} = 5$, car $5^4 = 625$ et $5 > 0$.

(d) $0{,}09^{0{,}5} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$, car $0{,}3^2 = 0{,}09$.

(e) Faux : $1\,000^{\frac{1}{3}}$ n'est pas $1\,000 \div 3$. C'est le nombre positif dont le cube vaut 1 000, donc 10, car $10^3 = 1\,000$.

(f) a est le nombre dont 0,2 est la racine cubique, donc $a = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 0{,}2^3 = 0{,}008$.

Ex. 23 ★★☆ **Exposants fractionnaires**

(a) $16^{\frac{3}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 2^3 = 8$, car $2^4 = 16$.

(b) $25^{1{,}5} = 25^{\frac{3}{2}} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 5^3 = 125$.

(c) $\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 7^{\frac{1}{3}\times 3} = 7^1 = 7$.

(d) $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$
(c'est $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$).

(e) Faux : $216^{\frac{2}{3}}$ n'est pas $216 \times \frac{2}{3} = 144$. $216^{\frac{1}{3}} = 6$, car $6^3 = 216$, donc $216^{\frac{2}{3}} = \left(216^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 6^2 = 36$.

(f) $\frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 3^2 = 9$.

(g) $50^{0{,}5} \times 2^{0{,}5} = (50 \times 2)^{0{,}5} = 100^{0{,}5} = 10$.

Ex. 24 ★★☆ **Coefficient sur une fraction de période**

(a) $1{,}69^{\frac{1}{2}} = 1{,}3$, car $1{,}3^2 = 1{,}69$: la population est multipliée par 1,3 chaque année.

(b) $0{,}64^{\frac{1}{2}} = 0{,}8$, car $0{,}8^2 = 0{,}64$: le coefficient horaire est 0,8, soit une baisse de 20 % par heure.

(c) Deux ans, c'est $\frac{2}{3}$ de la période : $1{,}331^{\frac{2}{3}} = \left(1{,}331^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1{,}1^2 = 1{,}21$, car $1{,}1^3 = 1{,}331$. En deux ans, le prix est multiplié par 1,21.

(d) Faux : $1{,}44^{\frac{1}{2}} = 1{,}2$, donc la hausse est de 20 % par an. Un taux ne se divise pas : $1{,}22^2 = 1{,}488\,4$, ce qui ferait +48,84 %.

(e) $0{,}9^3 = 0{,}81 \times 0{,}9 = 0{,}729$ et $0{,}9 > 0$, donc $0{,}729^{\frac{1}{3}} = 0{,}9$: le coefficient mensuel est bien 0,9, soit une baisse de 10 % par mois.

(f) $0{,}062\,5^{\frac{1}{4}} = 0{,}5$, car $0{,}5^4 = 0{,}062\,5$. La quantité est divisée par 2 chaque heure : la demi-vie est de 1 h.

Ex. 25 ★★☆ **Taux mensuel d'un livret**

(a) Une hausse de 4,8 % correspond à $C = 1 + \frac{4{,}8}{100} = 1{,}048$.

(b) Un mois, c'est $\frac{1}{12}$ d'an : $C^{\frac{1}{12}} = 1{,}048^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}003\,91$. Le taux mensuel équivalent est d'environ 0,391 %.

(c) Non : $1{,}004^{12} \approx 1{,}049\,1$, soit environ +4,91 % par an et non +4,8 %. Un taux ne se divise pas : le bon taux mensuel est d'environ 0,391 %.

(d) 7 mois, c'est $\frac{7}{12}$ d'an : $2\,500 \times 1{,}048^{\frac{7}{12}} \approx 2\,569{,}32$. Au bout de 7 mois, Marwa a environ 2 569,32 €.

(e) $2\,500 \times 1{,}003\,91^{7} \approx 2\,569{,}23$ €. On trouve 9 centimes de moins, parce que le coefficient a été arrondi trop tôt : il faut arrondir seulement à la fin.

Ex. 26 ★★☆ **Bactéries à la demi-heure**

(a) Une demi-heure, c'est $\frac{1}{2}$ période : coefficient $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$. En une demi-heure, le nombre de bactéries est multiplié par environ 1,414.

(b) 20 minutes, c'est $\frac{1}{3}$ d'heure : coefficient $2^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}260$. En 20 minutes, le nombre de bactéries est multiplié par environ 1,260.

(c) De 8 h à 9 h 40, il s'écoule 100 min, soit $\frac{5}{3}$ h : $1\,500 \times 2^{\frac{5}{3}} \approx 4\,762$. À 9 h 40, la culture contient environ 4 762 bactéries.

(d) Non : en 15 min, soit $\frac{1}{4}$ h, le coefficient est $2^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}189$, donc une hausse d'environ 18,9 %. Contrôle : $1{,}25^4 \approx 2{,}44 \neq 2$, donc +25 % est trop.

Ex. 27 ★★★ **Deux offres pour un placement**

(a) Sur un an, le coefficient de l'offre A est 1,06. Sur $\frac{1}{12}$ d'an, il vaut donc $1{,}06^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}004\,868$. Contrôle : $\left(1{,}06^{\frac{1}{12}}\right)^{12} = 1{,}06^1 = 1{,}06$. Le taux mensuel équivalent est $1{,}06^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}004\,868$, soit environ 0,487 % par mois.

(b) Sur un mois, le coefficient de l'offre B est 1,005. En 12 mois, il vaut $1{,}005^{12} \approx 1{,}061\,678$. L'offre B correspond donc à environ +6,17 % par an.

(c) Inès a tort. Un taux ne se divise pas : +6 % par an correspond à environ +0,487 % par mois, et non à +0,5 %. De même, +0,5 % par mois donne environ +6,17 % par an, et non +6 %. Les deux offres sont différentes, et l'offre B rapporte un peu plus.

(d) 2 ans et 9 mois font $2 + \frac{9}{12} = \frac{11}{4}$ années. Avec l'offre A, le capital est $3\,200 \times 1{,}06^{\frac{11}{4}} \approx 3\,756{,}13$. On ne fait qu'un seul arrondi, à la fin. Au bout de 2 ans et 9 mois, Yanis aurait environ 3 756,13 € avec l'offre A.

Ex. 27 (suite)

(e) 2 ans et 9 mois font 33 mois. Avec l'offre B, le capital est $3\,200 \times 1{,}005^{33} \approx 3\,772{,}51$, soit environ 3 772,51 €. L'écart, calculé à partir des valeurs non arrondies, est $3\,200 \times 1{,}005^{33} - 3\,200 \times 1{,}06^{\frac{11}{4}} \approx 16{,}37$. Yanis doit choisir l'offre B : elle rapporte environ 16 € de plus.

Ex. 28 ★★★ **Abonnés : du jour à la demi-journée**

(a) Sur $\frac{1}{3}$ de la période de 3 jours, le coefficient est $8^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire le nombre positif dont le cube vaut 8. Or $2^3 = 8$, donc $8^{\frac{1}{3}} = 2$. Théo a confondu $8^{\frac{1}{3}}$ avec $\frac{8}{3}$: on a $\left(\frac{8}{3}\right)^3 \approx 18{,}96$, ce qui est différent de 8. Chaque jour, le nombre d'abonnés est multiplié par 2 : il double.

(b) La valeur initiale est 1 250 et le coefficient journalier est 2, donc $f(x) = 1\,250 \times 2^x$. On calcule $f(5) = 1\,250 \times 2^5 = 1\,250 \times 32 = 40\,000$. Au bout de 5 jours, la chaîne compte 40 000 abonnés.

(c) 18 heures, c'est $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ de jour : le coefficient est $2^{\frac{3}{4}} \approx 1{,}682$. Contrôle : $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^4 = 2^3 = 8$, le coefficient sur 3 jours. En 18 heures, le nombre d'abonnés est multiplié par environ 1,682.

(d) $f(4{,}5) = 1\,250 \times 2^{4,5} = 1\,250 \times 2^4 \times 2^{0,5} = 20\,000\sqrt{2} \approx 28\,284{,}27$. Au bout de 4 jours et demi, la chaîne compte environ 28 284 abonnés.

(e) Une demi-journée, c'est $\frac{1}{2}$ jour : au bout de n demi-journées, la chaîne compte $f\left(\frac{n}{2}\right) = 1\,250 \times 2^{\frac{n}{2}}$ abonnés. On cherche quand $2^{\frac{n}{2}}$ dépasse $\frac{100\,000}{1\,250} = 80$. Pour $n = 12$: $2^6 = 64$, inférieur à 80. Pour $n = 13$: $2^{6,5} \approx 90{,}51$, supérieur à 80. La chaîne dépasse 100 000 abonnés pour la première fois au bout de 13 demi-journées, soit 6 jours et demi.

5. *Sens de variation : comparer et résoudre*

Ex. 29 ★☆☆ **Sens de variation en un coup d'œil**

(a) $\frac{9}{5} = 1{,}8 > 1$, donc $x \mapsto \left(\frac{9}{5}\right)^x$ est strictement croissante.

(b) $0 < \frac{2}{3} < 1$, donc $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$ est strictement décroissante.

(c) $1^x = 1$ pour tout x : la fonction est constante, égale à 1.

(d) $f(0) = 5 \times 0{,}9^0 = 5 \times 1 = 5$. On a $k = 5 > 0$ et $0 < 0{,}9 < 1$, donc f est strictement décroissante.

(e) Non. On compare la base à 1 : $0{,}95 < 1$, donc $x \mapsto 0{,}95^x$ est décroissante, même si elle décroît lentement.

Ex. 29 **(suite)**

(f) $g(0) = 2 \times 1 = 2$. On a $k = 2 > 0$ et $1{,}1 > 1$, donc g est croissante :

x	0		$+\infty$
$g(x)$	2	$\nearrow$	

Ex. 30 ★☆☆ **Comparer sans calculer**

(a) $1{,}5 > 1$: $x \mapsto 1{,}5^x$ est croissante et $3 < 5$, donc $1{,}5^3 < 1{,}5^5$
$(3{,}375 < 7{,}593\,75)$.

(b) $0 < 0{,}75 < 1$: la fonction est décroissante, donc l'ordre s'inverse. Comme $2 < 4$, on a $0{,}75^2 > 0{,}75^4$.

(c) $0 < 0{,}8 < 1$: $x \mapsto 0{,}8^x$ est décroissante, et $k = 3 > 0$ ne change pas le sens. Comme $1{,}5 < 4$, on a $3 \times 0{,}8^4 < 3 \times 0{,}8^{1{,}5}$.

(d) $4^{0{,}2} = (2^2)^{0{,}2} = 2^{0{,}4}$. Comme $2 > 1$, la fonction est croissante et $0{,}5 > 0{,}4$, donc $2^{0{,}5} > 4^{0{,}2}$.

(e) $1 = 0{,}85^0$. La fonction est décroissante et $2 > 0$, donc $0{,}85^2 < 0{,}85^0 = 1$
$(0{,}722\,5 < 1)$.

(f) Faux. Pour tout $x \geqslant 0$, on a $0{,}4^x > 0$: les valeurs diminuent mais ne deviennent jamais nulles.

Ex. 31 ★☆☆ **Résoudre une équation avec une même base**

(a) $243 = 3^5$, donc $3^x = 3^5 \iff x = 5$. $S = \{5\}$.

(b) $0{,}008 = 0{,}2^3$, donc $0{,}2^x = 0{,}2^3 \iff x = 3$. $S = \{3\}$.

(c) $1 = 7^0$, donc $x = 0$. $S = \{0\}$.

(d) $3 = \sqrt{9} = 9^{0{,}5}$, donc $x = 0{,}5$. $S = \{0{,}5\}$.

(e) $1\,000^2 = (10^3)^2 = 10^6$, donc $10^x = 10^6 \iff x = 6$.
$S = \{6\}$.

(f) $5^x \times 5^2 = 5^{x+2}$, donc $x + 2 = 6$, d'où $x = 4$. $S = \{4\}$.

(g) $4^x > 0$ pour tout x, donc il ne peut pas valoir -4 : pas de solution, $S = \varnothing$.

Ex. 32 ★★☆ **Inéquations : garder ou inverser le sens**

(a) $64 = 4^3$. Comme $4 > 1$, le sens est conservé :
$4^x \leqslant 4^3 \iff x \leqslant 3$. $S = [0\,;3]$.

(b) $0{,}09 = 0{,}3^2$. Comme $0 < 0{,}3 < 1$, le sens change :
$0{,}3^x \leqslant 0{,}3^2 \iff x \geqslant 2$. $S = [2\,;+\infty[$.

(c) L'écriture $0{,}001 = 0{,}1^3$ est juste. Mais $0 < 0{,}1 < 1$, donc l'inégalité change de sens :
$0{,}1^x > 0{,}1^3 \iff x < 3$. $S = [0\,;3[$.

Ex. 32 **(suite)**

(d) $1 = 0{,}9^0$ et la fonction est décroissante :
$0{,}9^x \leqslant 0{,}9^0 \iff x \geqslant 0$. Tout réel positif convient :
$S = [0\,;+\infty[$.

Ex. 33 ★★☆ **Un médicament qui s'élimine**

(a) $Q(0) = 120 \times 0{,}6^0 = 120$. La dose prise au départ est de 120 mg.

(b) $k = 120 > 0$ et $0 < 0{,}6 < 1$, donc Q est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$Q(x)$	120	$\searrow$	

(c) Q est décroissante et $2{,}5 < 4$, donc $Q(2{,}5) > Q(4)$. On vérifie : $Q(2{,}5) \approx 33{,}5$ mg et $Q(4) \approx 15{,}6$ mg.

(d) $120 \times 0{,}6^x = 43{,}2 \iff 0{,}6^x = \frac{43{,}2}{120} = 0{,}36 = 0{,}6^2 \iff x = 2$. Il reste 43,2 mg de médicament au bout de 2 heures.

(e) Non. $0{,}6^x > 0$ pour tout x, donc $Q(x) > 0$: la quantité diminue sans jamais devenir nulle.

Ex. 34 ★★★ **Le thé de Noam refroidit**

(a) $E(0) = 80 \times 0{,}5^0 = 80 \times 1 = 80$: au départ, le thé est 80 °C plus chaud que la pièce. $E(x) = k \times a^x$ avec $k = 80 > 0$ et $a = 0{,}5$; comme $0 < 0{,}5 < 1$, $x \mapsto 0{,}5^x$ est strictement décroissante, donc E aussi (même sens car $k > 0$).

x	0		$+\infty$
$E(x)$	80	$\searrow$	

(b) $80 \times 0{,}5^x \leqslant 5 \iff 0{,}5^x \leqslant \frac{5}{80} = \frac{1}{16} = 0{,}5^4$. Comme $0 < 0{,}5 < 1$, l'inégalité change de sens : $x \geqslant 4$. $S = [4\,;+\infty[$: l'écart est au plus de 5 °C à partir de 40 minutes.

(c) On a $0{,}5 < 1{,}5 < 3$ et E est strictement décroissante, donc l'ordre s'inverse : $E(3) < E(1{,}5) < E(0{,}5)$.

(d) $E(x+1) = 80 \times 0{,}5^{x+1} = 80 \times 0{,}5^x \times 0{,}5 = \frac{E(x)}{2}$ (propriété $a^{x+y} = a^x \times a^y$). Toutes les 10 minutes, l'écart de température est divisé par 2 : sa demi-vie est de 10 minutes.

Ex. 35 ★★★ **Trois comptes, trois évolutions**

(a) $M(x) = 2 \times 3^x$ avec $2 > 0$ et $3 > 1$: M est strictement croissante. $T(x) = 2 \times 1{,}2^x$ avec $2 > 0$ et $1{,}2 > 1$: T est strictement croissante aussi. Les deux comptes gagnent des abonnés.

Ex. 35 **(suite)**

(b) $2 \times 3^x \geqslant 54 \iff 3^x \geqslant 27 = 3^3$. Comme $3 > 1$, le sens est conservé : $x \geqslant 3$. $S = [3\,;+\infty[$: Maëlle a au moins 54 000 abonnés à partir de 3 mois.

(c) $3^x = (2{,}5 \times 1{,}2)^x = 2{,}5^x \times 1{,}2^x$ (propriété $a^x \times b^x = (ab)^x$), donc $\frac{M(x)}{T(x)} = \frac{2 \times 2{,}5^x \times 1{,}2^x}{2 \times 1{,}2^x} = 2{,}5^x$. Comme $2{,}5 > 1$, $x \mapsto 2{,}5^x$ est strictement croissante, donc pour $x > 0$: $2{,}5^x > 2{,}5^0 = 1$, soit $M(x) > T(x)$. Maëlle a plus d'abonnés que Tom.

(d) $M(x) = 6{,}25 \times T(x) \iff \frac{M(x)}{T(x)} = 6{,}25 \iff 2{,}5^x = 2{,}5^2 \iff x = 2$. Au bout de 2 mois, Maëlle a 6,25 fois plus d'abonnés que Tom.

(e) Non. $1^x = 1$ pour tout x, donc $I(x) = 50$: la fonction est constante (base $a = 1$). Inès garde 50 000 abonnés, il n'y a ni croissance ni décroissance.

6. *Seuils, temps de doublement, demi-vie*

Ex. 36 ★☆☆ **Seuils par le calcul**

(a) $4^{1{,}5} = 4^1 \times 4^{0{,}5} = 4 \times 2 = 8$. La fonction $x \mapsto 4^x$ est strictement croissante, donc la solution est unique : $x = 1{,}5$.

(b) On divise par 5 : $16^x \geqslant 2$. Or $16^{0{,}25} = 2$, car $2^4 = 16$. La fonction $x \mapsto 16^x$ est croissante ($16 > 1$), donc $x \geqslant 0{,}25$.

(c) On divise par 7 : $0{,}125^x \leqslant 0{,}5$. Or $0{,}125^{\frac{1}{3}} = 0{,}5$, car $0{,}5^3 = 0{,}125$. La fonction $x \mapsto 0{,}125^x$ est décroissante ($0 < 0{,}125 < 1$), donc $x \geqslant \frac{1}{3}$.

(d) Il faut $300 \times 3^n > 5\,000 \iff 3^n > \frac{5\,000}{300} = \frac{50}{3} \approx 16{,}7$. Or $3^2 = 9 < 16{,}7$ et $3^3 = 27 > 16{,}7$. La fonction $x \mapsto 3^x$ est croissante, donc on arrondit à l'entier supérieur : la vidéo dépasse 5 000 vues au bout de 3 jours.

(e) $27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9$. La fonction $x \mapsto 27^x$ est croissante, donc $27^x \leqslant 9 \iff 0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$.

(f) Il faut diviser par 3, et non multiplier : $3 \times 4^x \geqslant 12 \iff 4^x \geqslant 4 = 4^1$. La fonction $x \mapsto 4^x$ est croissante, donc $x \geqslant 1$.

Ex. 37 ★☆☆ **Doublement et demi-vie : réflexes**

(a) 12 h, c'est 4 fois 3 h, donc 4 doublements : la culture est multipliée par $2^4 = 16$.

(b) 18 jours, c'est 3 demi-vies. Il reste donc $80 \times \frac{1}{8} = 10$ mg. La quantité est divisée par 8, elle n'est pas nulle.

Ex. 37 **(suite)**

(c) Le temps de doublement ne dépend pas du capital de départ, car $V(x+T) = V(x) \times a^T$: le capital d'Hugo double aussi en 12 ans.

(d) Faux. Le coefficient multiplicateur vaut $a = 1{,}5$. Or $1{,}5^1 = 1{,}5 < 2$ et $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$: la quantité double entre 1 et 2 ans, donc avant 2 ans. Diviser 100 par le taux ne donne pas le temps de doublement.

(e) On cherche T tel que $0{,}25^T = 0{,}5$. Or $0{,}25^{0{,}5} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, donc $T = 0{,}5$ jour, soit 12 heures.

(f) En 10 h, il y a 20 périodes de 30 min, donc 20 doublements : $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10} \approx 1\,000 \times 1\,000$. La population est multipliée par environ un million.

Ex. 38 ★★☆ **Population : seuil et année**

(a) Une hausse de 3 % correspond à $a = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$. Donc $P(x) = 12\,500 \times 1{,}03^x$.

(b) On divise par $12\,500 > 0$: $P(x) \geqslant 20\,000 \iff 1{,}03^x \geqslant \frac{20\,000}{12\,500} = 1{,}6$.

(c) $1{,}03^{15} \approx 1{,}558 < 1{,}6$ et $1{,}03^{16} \approx 1{,}605 \geqslant 1{,}6$. La solution est donc comprise entre 15 et 16.

(d) Non. La fonction $x \mapsto 1{,}03^x$ est croissante. $P(15) \approx 19\,475 < 20\,000$: au bout de 15 ans, le seuil n'est pas atteint. $P(16) \approx 20\,059 \geqslant 20\,000$: il faut arrondir à l'entier supérieur, $x = 16$. La population dépassera 20 000 habitants en $2025 + 16 = 2041$.

Ex. 39 ★★☆ **Demi-vie d'un médicament**

(a) La demi-vie est la durée au bout de laquelle la quantité est divisée par 2 : $Q(T) = 20 \iff 40 \times 0{,}82^T = 20 \iff 0{,}82^T = 0{,}5$.

(b) Au pas de 1 : $0{,}82^3 \approx 0{,}5514$ et $0{,}82^4 \approx 0{,}4521$. Au pas de 0,1 : $0{,}82^{3{,}4} \approx 0{,}5093 > 0{,}5$ et $0{,}82^{3{,}5} \approx 0{,}4993 < 0{,}5$. La fonction est décroissante, donc $3{,}4 < T < 3{,}5$. Comme $0{,}82^{3{,}45} \approx 0{,}5043 > 0{,}5$, on a $3{,}45 < T < 3{,}5$: la demi-vie vaut environ 3,5 heures.

(c) $Q(x) < 10 \iff 0{,}82^x < \frac{10}{40} = 0{,}25$. La calculatrice donne $Q(6) \approx 12{,}16$ mg et $Q(7) \approx 9{,}97$ mg. La fonction Q est décroissante, donc $Q(x) < 10$ pour tout $x \geqslant 7$: la nouvelle prise est conseillée au bout de 7 heures.

(d) Si c est le coefficient par demi-heure, alors $c^2 = 0{,}82$, donc $c = 0{,}82^{0{,}5} = \sqrt{0{,}82} \approx 0{,}906$. La baisse est d'environ 9,4 % par demi-heure, et non 9 % : en effet, $0{,}91^2 = 0{,}8281 \neq 0{,}82$.

Ex. 40 ★★☆ **Abonnés : lire un programme de seuil**

(a) `a` est le nombre d'abonnés et `n` le nombre de semaines écoulées. Une hausse de 12 % correspond au coefficient multiplicateur $1 + \frac{12}{100} = 1{,}12$.

(b) Au départ, $a = 1\,500$, donc `a >= 10000` est fausse : on n'entre jamais dans la boucle, et le programme affiche 0. La boucle doit tourner tant que le seuil n'est pas atteint, donc la bonne condition est `a < 10000`.

(c) On compare $1{,}12^n$ à $\frac{10\,000}{1\,500} \approx 6{,}667$. $1{,}12^{16} \approx 6{,}130 < 6{,}667$ et $1{,}12^{17} \approx 6{,}866 > 6{,}667$. La suite des valeurs est croissante, donc le programme affiche 17 : Yasmine dépassera 10 000 abonnés au bout de 17 semaines.

(d) Elle affiche 10 299, car $1\,500 \times 1{,}12^{17} \approx 10\,299$. C'est le nombre d'abonnés au bout de 17 semaines, la première valeur au-dessus de 10 000.

Ex. 41 ★★★ **Deux placements, un seul temps de doublement**

(a) Une hausse de 4,5 % correspond au coefficient multiplicateur $1 + \frac{4{,}5}{100} = 1{,}045$.
Donc $L(x) = 3\,000 \times 1{,}045^x$ et $M(x) = 7\,000 \times 1{,}045^x$.

(b) Le capital de Léonie a doublé quand $L(x) \geqslant 6\,000 \iff 1{,}045^x \geqslant \frac{6\,000}{3\,000} = 2$. Celui de Mathis a doublé quand $M(x) \geqslant 14\,000 \iff 1{,}045^x \geqslant \frac{14\,000}{7\,000} = 2$. C'est la même inéquation : les deux capitaux doublent en même temps. Mathis a tort : le temps de doublement ne dépend pas de la somme placée.

(c) On cherche x tel que $1{,}045^x \geqslant 2$. La calculatrice donne $1{,}045^{15} \approx 1{,}9353 < 2$ et $1{,}045^{16} \approx 2{,}0224 \geqslant 2$. La fonction $x \mapsto 1{,}045^x$ est croissante car $1{,}045 > 1$. Le capital de Léonie a donc doublé au bout de 16 ans, et non de 22 ans : diviser 100 par le taux ne donne pas le temps de doublement.

(d) Au pas de 0,1 : $1{,}045^{15{,}7} \approx 1{,}9958 < 2$ et $1{,}045^{15{,}8} \approx 2{,}0046 \geqslant 2$. La fonction est croissante, donc $15{,}7 < T < 15{,}8$. Attention : 1,9958 s'arrondit à 2,00 mais reste inférieur à 2. Au dixième près, le capital a doublé au bout de 15,8 ans. La règle de 70 donne $70 \div 4{,}5 \approx 15{,}56$: c'est un bon ordre de grandeur, mais pas la valeur exacte.

Ex. 41 (suite)

(e) $\frac{12\,000}{3\,000} = 4 = 2^2$: il faut deux doublements, soit environ $2T$, c'est-à-dire entre 31,4 et 31,6 ans. Vérification : $L(x) \geqslant 12\,000 \iff 1{,}045^x \geqslant 4$. On a $1{,}045^{31} \approx 3{,}9139 < 4$ et $1{,}045^{32} \approx 4{,}0900 \geqslant 4$. La fonction est croissante, donc il faut 32 années entières. Le capital de Léonie atteindra 12 000 € le 1er janvier $2026 + 32 = 2058$.

Ex. 42 ★★★ **Échantillon radioactif : jamais zéro**

(a) 16 jours font 2 demi-vies, et 24 jours en font 3. À chaque demi-vie, la masse est divisée par 2.
Donc $M(16) = 640 \times 0{,}5^2 = 160$ mg et $M(24) = 640 \times 0{,}5^3 = 80$ mg. Il reste $\frac{80}{640} = \frac{1}{8}$ de la masse de départ.

(b) Non. Une demi-vie ne retire pas 320 mg à chaque fois : elle retire la moitié de ce qui reste. La première retire 320 mg, la deuxième 160 mg : au bout de 16 jours, il reste $640 - 320 - 160 = 160$ mg. Comme $M(x) = 640 \times a^x > 0$, la masse ne devient jamais nulle.

(c) En 8 jours, la masse est multipliée par 0,5, donc $a^8 = 0{,}5$. Comme $a > 0$, on a $a = 0{,}5^{\frac{1}{8}} \approx 0{,}917$. Or $0{,}917 = 1 - \frac{8{,}3}{100}$: la masse baisse d'environ 8,3 % par jour.

(d) Après k demi-vies, la masse vaut $\frac{640}{2^k}$. Or $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1\,024$. Après 9 demi-vies, il reste $\frac{640}{512} = 1{,}25$ mg, soit plus de 1 mg. Après 10 demi-vies, il reste $\frac{640}{1\,024} = 0{,}625$ mg, soit au plus 1 mg. La masse diminue, donc la durée cherchée est comprise entre $9 \times 8 = 72$ jours (exclu) et $10 \times 8 = 80$ jours.

(e) On prend un pas de 1 jour entre 72 et 80. La calculatrice donne $M(74) \approx 1{,}051 > 1$ et $M(75) \approx 0{,}964 \leqslant 1$. La fonction M est décroissante car $0 < a < 1$, donc $M(x) \leqslant 1$ pour tout $x \geqslant 75$.
L'échantillon est sans danger au bout de 75 jours. Il reste alors encore de l'isotope : moins de 1 mg, mais pas 0.