1re spécialité / Fonction exponentielle

benprof particulier.fr

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Définition, nombre e et signe de l'exponentielle*

À retenir : Pour tout réel x : $e^x > 0$, $e^0 = 1$ et $e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0$. Donc $e^u = c$ n'a aucune solution si $c \leqslant 0$, et $(x-1)e^x$ a le signe de $x-1$. Piège : $-e^x < 0$, mais $e^{-x} > 0$.

Ex. 1 ★☆☆ **Valeurs et signes en un coup d'œil** — Donne la valeur exacte, ou l'arrondi à $0{,}001$ quand on le demande.

(a) Calcule $2e^0 - 5$.

(b) Écris e^{-1} sous forme de fraction, puis donne son arrondi à $0{,}001$.

(c) Donne le signe de $-6e^x$ selon les valeurs du réel x.

(d) Donne le signe de e^{-5x} selon les valeurs du réel x.

(e) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x-1} = 0$.

(f) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $4 + e^{2x} = 1$.

Ex. 2 ★☆☆ **Les erreurs de Malo** — On admet que les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = f$ sont les fonctions $x \mapsto C\,e^x$, où C est un réel.

(a) Malo affirme : « $e^1 = 2{,}7$ exactement. » Explique son erreur et corrige.

(b) Malo affirme : « $e^{-2} < 0$ car l'exposant est négatif. » Explique son erreur et corrige, avec l'arrondi à $0{,}001$.

(c) Malo affirme : « $e^2 = 2 \times e \approx 5{,}437$. » Explique son erreur et corrige, avec l'arrondi à $0{,}001$.

(d) Malo affirme : « $g(x) = e^x - 3$ vérifie $g' = g$ et $g(0) = -2$. » Explique son erreur et donne la fonction qui vérifie vraiment ces deux conditions.

(e) Malo affirme : « $e^4 \times e^{-4} = 0$, car $4 + (-4) = 0$. » Explique son erreur et corrige.

Ex. 3 ★★☆ **Pourquoi l'exponentielle ne s'annule pas, et comment s'en servir** — On admet que la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -\exp(-x)$.

(a) Soit $\varphi(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$. Calcule $\varphi'(x)$, puis déduis-en la valeur de $\varphi(x)$ pour tout réel x.

(b) Déduis-en que $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel x, puis exprime $\exp(-x)$ à l'aide de $\exp(x)$.

(c) Dresse le tableau de signes de $f(x) = (x-2)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x^2 - 9)e^{-x} \leqslant 0$.

(e) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-e^{2x}(5 - x) > 0$.

Ex. 4 ★★☆ **Approcher e par la méthode d'Euler** — La fonction $f = \exp$ vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Pour un pas h petit, on admet que $f(x+h) \approx (1+h)\,f(x)$. Avec $h = 0{,}25$, on part de $y_0 = f(0) = 1$ et on calcule $y_{k+1} = (1+h)\,y_k$.

(a) Calcule y_1, y_2, y_3 et y_4, valeurs approchées de $f(0{,}25)$, $f(0{,}5)$, $f(0{,}75)$ et $f(1)$.

(b) Compare y_4 à $e \approx 2{,}718$: donne l'écart arrondi à $0{,}01$.

(c) Nora programme la méthode avec n pas de longueur $\frac{1}{n}$:

```
def approx_e(n):
    h = 1 / n
    y = 1
    for k in range(n):
        y = y + h
    return y
```

Que renvoie `approx_e(4)` ? Explique son erreur et corrige la ligne 5.

(d) Avec ta correction, donne à $0{,}0001$ près la valeur renvoyée par `approx_e(100)`, puis compare-la à e.

(e) Si l'on partait de $f(0) = 4$, c'est-à-dire de la fonction $x \mapsto 4e^x$, quelle valeur approchée de $f(1)$ obtiendrait-on avec $h = 0{,}25$?

Ex. 5 ★★★ **Retrouver une fonction égale à sa dérivée** — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 3$. On cherche f sans admettre le résultat du cours. Pour tout réel x, on pose $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.

(a) Explique pourquoi h est définie sur $\mathbb{R}$, puis calcule $h'(x)$ avec la formule de dérivée d'un quotient.

(b) Déduis-en l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.

(c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3e$, puis l'équation $f(x) = \frac{3}{e}$.

(d) Lou affirme : « Toute fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ ne s'annule jamais. » Vrai ou faux ? Justifie, puis dis ce qu'il en est pour f.

Ex. 6 ★★★ **Euler à reculons et seuil pour approcher e** — La fonction $f = \exp$ vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Pour un pas h proche de 0 (positif ou négatif), on admet que $f(x+h) \approx (1+h)\,f(x)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(a) Avec $h = -0{,}25$, on part de $y_0 = 1$ et on pose $y_{k+1} = 0{,}75\,y_k$. Exprime y_k en fonction de k, puis donne y_4. De quel nombre est-ce une valeur approchée ?

(b) Avec le pas $0{,}25$ vers la droite, on obtient $f(1) \approx 1{,}25^4$. Calcule $1{,}25^4 \times y_4$ à $0{,}001$ près, puis donne la valeur exacte de $e \times e^{-1}$. Conclus.

Ex. 6 **(suite)**

(c) Sacha prend directement le pas $h = -2$ pour approcher e^{-2}. Calcule le y_1 obtenu et explique pourquoi cette valeur est absurde.

(d) On donne le programme et le tableau ci-dessous, avec $e \approx 2{,}718$. On admet que u_n augmente avec n.

```
from math import exp
n = 1
while exp(1) - (1 + 1/n)**n >= 0.1:
    n = n + 1
print(n)
```

n	11	12	13	14
u_n	2,604	2,613	2,621	2,627

Quelle valeur affiche le programme ? Que représente-t-elle ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Signes, équations et une inégalité, type DS** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)(2-x)\,e^{-x}$.

(a) Lina affirme : « Pour $x > 0$, e^{-x} est négatif, donc $f(5) > 0$. » A-t-elle raison ? Justifie en calculant $f(5)$.

(b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$, puis l'équation $f(x) = 6e^{-x}$.

(c) Dresse le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montre que, pour tout réel x, $e^x + e^{-x} - 2 = \dfrac{(e^x-1)^2}{e^x}$.

(e) Déduis-en que $e^x + e^{-x} \geqslant 2$ pour tout réel x, puis trouve les valeurs de x pour lesquelles il y a égalité.

2. *Propriétés algébriques : simplifier*

À retenir : Produit : on additionne les exposants ; quotient : on soustrait (parenthèses !) ; puissance : on multiplie. $\frac{e^x}{e^{2x-1}} = e^{-x+1}$. Pièges : $e^a + e^b$ ne se simplifie pas ; $(e^x)^2 = e^{2x}$, pas e^{x^2}.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : un seul exposant** — Écris chaque expression sous la forme $e^{\cdots}$, avec un exposant réduit.

(a) $e^4 \times e^{-7}$

(b) $e^{-2x} \times e^{-2x}$

(c) $(e^x)^2 \times e^{1-x}$

(d) $\dfrac{e^{x+2}}{e^{3x-1}}$

(e) $\dfrac{1}{e^{-x}} \times e^{-3}$

(f) $\dfrac{(e^{-x})^4 \times e^{x-2}}{e^{-3x}}$

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : factoriser, développer** — Pour tout réel x, factorise ou développe comme demandé.

(a) Factorise $e^{2x} - 5e^x$.

(b) Factorise $e^{2x} - 9$.

(c) Développe $\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2$.

(d) Développe $e^x\,(e^{-x} + 3e^x)$.

(e) Factorise $4e^{3x} + e^x$.

Ex. 9 **(suite)**

(f) Développe $(e^x - 2)\,(e^x + 3)$.

Ex. 10 ★★☆ **Les erreurs de Lina** — Lina a écrit chacune des égalités ci-dessous pour tout réel x. Toutes sont fausses.

(a) Lina écrit $e^{3x} \times e^x = e^{3x^2}$. Explique son erreur et donne l'écriture correcte.

(b) Elle poursuit avec $\frac{e^{8x}}{e^{2x}} = e^{4x}$. Explique son erreur et donne l'écriture correcte.

(c) Elle écrit $e^x + e^{2x} = e^{3x}$. Montre que c'est faux en prenant $x = 0$, puis factorise correctement $e^x + e^{2x}$.

(d) Elle écrit $(e^x)^3 = e^{x^3}$. Trouve un contre-exemple, puis donne l'écriture correcte.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux pour tout réel ?** — Pour chaque égalité, dis si elle est vraie pour tout réel x. Justifie : par un calcul si elle est vraie, par un contre-exemple si elle est fausse.

(a) $e^x \times e^x = 2e^x$

(b) $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = 1$

(c) $e^{2x+1} = e \times (e^x)^2$

(d) $\dfrac{e^{4x} + e^x}{e^x} = e^{3x} + 1$

(e) $e^x + e^{-x} = 1$

Ex. 12 ★★★ **Deux carrés à développer** — Pour tout réel x, on pose $A(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

(a) Noé affirme que $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x}$ pour tout réel x. A-t-il raison ? Justifie avec $x = 0$.

(b) Développe correctement $(e^x + e^{-x})^2$. Simplifie le double produit.

(c) Développe $(e^x - e^{-x})^2$.

(d) Déduis-en que $A(x)$ ne dépend pas de x et donne sa valeur.

(e) En utilisant $(e^x - e^{-x})^2 \geqslant 0$, montre que $e^{2x} + e^{-2x} \geqslant 2$ pour tout réel x. Pour quel x a-t-on l'égalité ?

Ex. 13 ★★★ **Une fraction qui se simplifie** — Pour tout réel x, on pose $h(x) = \frac{e^{2x+1} - e}{e^x + 1}$, où $e = \exp(1)$.

(a) Malik simplifie le numérateur : « $e^{2x+1} - e = e^{2x+1-1} = e^{2x}$ ». Montre avec $x = 0$ qu'il a tort et explique son erreur.

(b) Montre que $e^{2x+1} - e = e \times \left(e^{2x} - 1\right)$ pour tout réel x.

(c) Factorise $e^{2x} - 1$, justifie que $e^x + 1 \neq 0$, puis écris $h(x)$ sans quotient.

(d) Résous l'équation $h(x) = 0$.

(e) Dresse le tableau de signes de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$. Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Comparer deux expressions** — Pour tout réel x, on pose $Q(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{2x-3}}$ et $R(x) = \frac{(e^x)^2}{e^{-x}}$.

(a) Yanis écrit : « $Q(x) = e^{x+1-2x-3} = e^{-x-2}$ ». Explique son erreur et donne l'écriture correcte de $Q(x)$ avec un seul exposant.

(b) Écris $R(x)$ avec un seul exposant réduit.

(c) Résous l'équation $Q(x) = R(x)$, puis l'inéquation $Q(x) < R(x)$.

(d) Écris $Q(x) \times R(x)$ avec un seul exposant réduit, puis résous l'équation $Q(x) \times R(x) = 1$.

3. *Équations avec exp*

À retenir : Écris chaque membre sous la forme $e^{\cdots}$ ($1 = e^0$, $e = e^1$, $\frac{1}{e^2} = e^{-2}$), puis $e^A < e^B \iff A < B$. Exemple : $e^{x-1} < e \iff x < 2$. Comme $e^x > 0$, l'équation $e^x = -3$ n'a pas de solution ; après $X = e^x$, on écarte toute racine $X \leqslant 0$.

Ex. 15 ★☆☆ **Équations : tout sous la forme e^...** — Résous dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

(a) $e^{3x-1} = e^{x+5}$ (b) $e^{4-x} = 1$

(c) $e^{2x+3} = \frac{1}{e^2}$ (d) $e^x \times e^{x-1} = e$

(e) $(e^x)^3 = e^{x+4}$ (f) $(2x-5)e^{-x} = 0$

(g) $4e^x + 12 = 0$

Ex. 16 ★☆☆ **Inéquations en ligne** — Résous dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation.

(a) $e^{2x-6} > 1$

(b) $e^{1-3x} \leqslant e^7$

(c) $e^{x+2} < e$

(d) $e^{-x} \geqslant \frac{1}{e^3}$

(e) $e^{4x} > \sqrt{e}$, en admettant que $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

(f) $e^x > -5$

(g) $e^{5x} \times e^{-2x} \leqslant e^{x-3}$

Ex. 17 ★★☆ **Changement d'inconnue X = e^x** — On considère l'équation $(E) : e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0$.

(a) On pose $X = e^x$. Écris l'équation du second degré vérifiée par X et précise le signe de X.

(b) Résous cette équation du second degré : calcule son discriminant sous la forme d'un carré.

(c) Déduis-en l'ensemble des solutions de (E).

(d) Résous de même $e^{2x} + 3e^x = 0$.

(e) Résous $e^{2x} + e^{x+1} - 2e^2 = 0$, en écrivant d'abord e^{x+1} à l'aide de e^x.

Ex. 18 ★★☆ **Corrige les élèves** — Quatre élèves ont résolu une équation ou une inéquation dans $\mathbb{R}$. Pour chacun, réponds à la question posée.

(a) Inès résout $e^{x^2} = e^{4x+5}$: « $x^2 = 4x + 5$, donc $x = 5$, et $S = \{5\}$ ». A-t-elle raison ? Justifie et corrige si besoin.

(b) Malo résout $e \times e^{3x} = e^2$: « je simplifie par e : $3x = 2$, donc $x = \frac{2}{3}$ ». A-t-il raison ? Justifie et corrige si besoin.

(c) Lou résout $e^{3-2x} < \frac{1}{e}$: « $3 - 2x < -1$, soit $-2x < -4$, d'où $x < 2$ ». A-t-elle raison ? Justifie et corrige si besoin.

(d) Sacha résout $(x+6)e^x = 0$: « $x + 6 = 0$ ou $e^x = 0$, donc $S = \{-6\,;0\}$ ». A-t-il raison ? Justifie et corrige si besoin.

Ex. 19 ★★★ **Inéquation du second degré en e^x** — Pour tout réel x, on pose $P(x) = e^{2x} + (1-e)e^x - e$.

(a) Vérifie que, pour tout réel X, $X^2 + (1-e)X - e = (X-e)(X+1)$.

(b) Déduis-en une factorisation de $P(x)$. Justifie ensuite que $e^x + 1 > 0$ pour tout réel x.

(c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

(d) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leqslant 0$ à l'aide d'un tableau de signes.

(e) Pour $P(x) \geqslant 0$, Sami écrit : « $X \leqslant -1$ ou $X \geqslant e$, donc $S =]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$ ». Explique son erreur et corrige-le.

Ex. 20 ★★★ **Deux courbes exponentielles face à face** — Pour tout réel x, on pose $f(x) = e^{2x-1}$ et $g(x) = e^{x^2-4}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes dans un repère.

(a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant \frac{1}{e^2}$.

(b) Détermine les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

(c) Étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Écris $f(x) \times g(x)$ avec un seul exposant, puis résous $f(x) \times g(x) = e^{-5}$.

(e) Pour résoudre $(x+5)\,g(x) = (x+5)\,f(x)$, Lina divise par $x+5$. Explique son erreur, puis résous cette équation.

Ex. 21 ★★★ **Deux cultures de bactéries** — On observe deux cultures de bactéries pendant 12 heures. À l'instant t (en heures, $t \in [0\,;12]$), elles comptent $A(t) = 2e^{0,2t+1}$ et $B(t) = 2e^{0,6t-1}$ milliers de bactéries. On rappelle que $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$.

(a) Écris $\frac{B(t)}{A(t)}$ sous la forme $e^{\cdots}$.

(b) À quel instant les deux cultures ont-elles le même effectif ? Justifie.

(c) Sur quel intervalle de temps la culture B est-elle la plus nombreuse ? Justifie.

Ex. 21 **(suite)**

(d) À partir de quel instant a-t-on $B(t) \geqslant \sqrt{e} \times A(t)$? Donne la réponse en heures et minutes.

(e) Résous dans $[0\,;12]$ l'équation $A(t) \times B(t) = 4e^8$.

4. *Inéquations avec exp, signe d'une expression*

À retenir : L'exponentielle est strictement croissante : $e^A \leqslant e^B \iff A \leqslant B$ (même sens). Le sens change si tu multiplies ou divises par un négatif. Comme $e^x > 0$, $u(x)e^x$ a le signe de $u(x)$. Exemple : $e^{1-x} \geqslant 1 \iff x \leqslant 1$.

Ex. 22 ★☆☆ **Inéquations express** — Résous chaque inéquation dans $\mathbb{R}$. Donne l'ensemble S des solutions sous forme d'intervalle (ou $S = \mathbb{R}$, $S = \emptyset$).

(a) $e^{3x-6} > 1$ (b) $e^{-x} \geqslant e$

(c) $e^x > -4$ (d) $e^{3x} \leqslant 0$

(e) $0 < e^{2x+5} < 1$ (f) $e^{7-4x} \leqslant e^3$

Ex. 23 ★☆☆ **Le signe d'un coup d'œil** — Étudie le signe de chaque expression selon les valeurs du réel x.

(a) $e^{x+2} - 1$ (b) $e^{2x} - e$ (c) $-3e^x$

(d) $e^{-x} + 2$ (e) $e^{5-x} - e^{2x}$ (f) $x^2 e^x$

Ex. 24 ★★☆ **L'erreur de Léna** — Pour résoudre $e^{4-3x} \geqslant e^{-2}$, Léna écrit : « $4 - 3x \geqslant -2 \iff -3x \geqslant -6 \iff x \geqslant 2$, donc $S = [2\,;+\infty[$. »

(a) Trouve l'erreur de Léna, puis donne le bon ensemble S des solutions.

(b) Léna teste $x = 0$ dans l'inéquation de départ. Ce test confirme-t-il sa réponse ? Justifie.

(c) Résous $e^{-2x} < e^{x+6}$ et donne S sous forme d'intervalle.

(d) Résous $e^{x^2} \leqslant e^{4x}$ et donne S sous forme d'intervalle.

Ex. 25 ★★☆ **Tableaux de signes avec exponentielle** — Pour chaque question, appuie-toi sur un tableau de signes.

(a) Dresse le tableau de signes de $(2 - x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Résous $(x + 3)(e^x - e) \leqslant 0$ et donne S sous forme d'intervalle.

(c) Résous $\frac{e^{2x}-1}{x-4} < 0$ et donne S sous forme d'intervalle.

Ex. 26 ★★★ **Inéquations du second degré déguisées** — On rappelle que $e^x > 0$ pour tout réel x. Donne chaque ensemble S de solutions sous forme d'intervalle.

(a) Développe $(X - e)(X + 2)$, où X désigne un réel.

(b) En posant $X = e^x$, résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} + (2 - e)e^x - 2e > 0$.

(c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x + e^{1-x} \leqslant e + 1$. Commence par multiplier chaque membre par e^x.

Ex. 26 **(suite)**

(d) Pour résoudre $e^{2x} + 3e^x - 4 < 0$, Mathis pose $X = e^x$, trouve $-4 < X < 1$ et conclut $S =]-4\,;0[$. Trouve ses erreurs et donne le bon ensemble S.

Ex. 27 ★★★ **Signes croisés de deux expressions** — On pose, pour tout réel x, $A(x) = (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$ et $B(x) = e^x - e^{3-x}$. Donne chaque ensemble S de solutions sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

(a) Justifie que $A(x)$ a le même signe que $x^2 - 2x - 3$, puis résous $A(x) < 0$.

(b) Résous $B(x) \geqslant 0$, puis donne le signe de $B(x)$ selon les valeurs de x.

(c) Résous dans $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ l'inéquation $\frac{B(x)}{x+1} > 0$ à l'aide d'un tableau de signes.

(d) Affirmation de Noah : « Aucun réel x ne vérifie à la fois $A(x) < 0$ et $B(x) < 0$. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Vrai ou faux sur les inéquations** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par une preuve ou par un contre-exemple.

(a) Affirmation : « Pour tous réels a et b, si $a < b$, alors $e^{-a} < e^{-b}$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(b) Affirmation : « L'ensemble des solutions de $e^{2x} + 1 > 2e^x$ est $\mathbb{R}$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) Affirmation : « L'ensemble des solutions de $(e^x)^3 \geqslant e^{5-x}$ est $]-\infty\,;\frac{5}{4}]$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Affirmation : « Pour tout réel x, $e^x - 1$ et x ont le même signe. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Affirmation : « Pour tout réel x, $e^{2x} - e^x \geqslant 0$. » Vrai ou faux ? Justifie.

5. *Variations, courbe, tangente et dérivée de e^(ax + b)*

À retenir : $\left(e^{ax+b}\right)' = a\,e^{ax+b}$: le coefficient sort devant et l'exposant ne change pas. Exemple : $(e^{-x})' = -e^{-x}$. Pour $k > 0$, e^{kt} croît et e^{-kt} décroît. Tangente en 0 à exp : $y = x + 1$, sous la courbe car $e^x \geqslant x + 1$.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : dériver une exponentielle** — Toutes les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Calcule leur dérivée.

(a) $f(x) = 2e^{-x} + e^2$: calcule $f'(x)$.

(b) $g(t) = 10e^{-0{,}1t}$: calcule $g'(t)$ et simplifie.

(c) $h(x) = e^{5x+2}$: calcule $h'(x)$.

(d) $k(x) = 3e^{-2x+4}$: calcule $k'(x)$.

(e) $m(x) = 4e^{0{,}5x}$: calcule $m'(x)$.

(f) $p(x) = x + e^{-3x}$: calcule $p'(x)$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : sens de variation et comparaisons** — Justifie chaque réponse, sans calculatrice. Pour les deux dernières questions, utilise ce tableau de valeurs :

x	0	0,5	1	1,5
eˆx	1	1,649	2,718	4,482

(a) Donne le sens de variation de $t \mapsto e^{0,7t}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Donne le sens de variation de $t \mapsto 2e^{-1,5t}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Compare $e^{0,5}$ et $e^{0,3}$.

(d) Compare $e^{-1,2}$ et $e^{-0,8}$.

(e) On admet qu'il existe un réel x tel que $e^x = 3$. Encadre-le entre deux valeurs du tableau.

(f) Lis dans le tableau une valeur approchée de $\frac{e^2}{e^{0,5}}$.

Ex. 31 ★★☆ **L'erreur d'Inès et la tangente à eˆ(2x)** — Soit $f(x) = e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Inès écrit : « $f'(x) = 2x\,e^{2x-1}$ ». On admet que pour tout réel X, $e^X \geqslant X + 1$.

(a) Explique l'erreur d'Inès et donne la bonne expression de $f'(x)$.

(b) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

(c) Donne une équation de la tangente à la courbe de exp au point d'abscisse 0. Explique pourquoi ce n'est pas T.

(d) En prenant $X = 2x$ dans l'inégalité admise, étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

(e) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Ex. 32 ★★☆ **Étude de (2x + 1)eˆ(−x)** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$. Donne les valeurs exactes.

(a) Calcule $f'(x)$ et écris-la sous la forme d'un produit par e^{-x}.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$, puis dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

(c) Donne l'extremum de f et la valeur de x où il est atteint.

(d) Léo affirme : « f est positive exactement là où elle est croissante. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 33 ★★★ **Concentration d'un antibiotique** — Maëlys reçoit une injection d'antibiotique. t heures après l'injection, la concentration dans son sang, en mg/L, est $C(t) = 5t\,e^{-0,2t}$ pour $t \in [0\,;24]$. Valeurs arrondies :

t	1	2	10	11	12
C(t)	4,09	6,70	6,77	6,09	5,44

(a) Calcule $C'(t)$ et écris-la sous la forme d'un produit par $e^{-0,2t}$.

Ex. 33 (suite)

(b) Dresse le tableau de variations de C sur $[0\,;24]$. Donne la concentration maximale en valeur exacte, puis arrondie à 0{,}01.

(c) L'antibiotique agit quand $C(t) \geqslant 6$. Encadre entre deux entiers consécutifs l'instant où il commence à agir, puis celui où il s'arrête. Justifie.

(d) Déduis-en un encadrement de la durée d'action de l'antibiotique.

(e) Détermine une équation de la tangente à la courbe de C au point d'abscisse 0. Que représente son coefficient directeur dans ce contexte ?

Ex. 34 ★★★ **Une courbe au-dessus de ses tangentes** — Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x - x - 1$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction exponentielle.

(a) Dresse le tableau de variations de φ sur $\mathbb{R}$, puis déduis-en que pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

(b) Justifie que $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente T au point d'abscisse 0, d'équation $y = x + 1$, et qu'elles n'ont qu'un point commun.

(c) Détermine une équation de la tangente T' à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, puis montre que $\mathcal{C}$ est au-dessus de T' en écrivant $e^x = e \times e^{x-1}$.

(d) Montre que pour tout $x < 1$, $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$, puis encadre $e^{0,1}$ par deux fractions.

Ex. 35 ★★★ **Étude de (x − 1)²eˆ(−x), type DS** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$. On rappelle que $e \approx 2{,}718$. Donne les valeurs exactes.

(a) Hugo écrit : « $f'(x) = 2(x-1)e^{-x} + (x-1)^2 e^{-x}$ ». Explique son erreur, puis écris $f'(x)$ comme le produit de e^{-x} par deux facteurs affines.

(b) Dresse le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f, avec les valeurs exactes des extremums locaux.

(c) Détermine une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

(d) Montre que $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x. Le minimum local $f(1)$ est-il le minimum de f sur $\mathbb{R}$? Justifie.

(e) Justifie que pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 1$.

6. *Étudier une fonction avec exp*

À retenir : $\big(u(x)\,e^{ax+b}\big)' = \big(u'(x) + a\,u(x)\big)\,e^{ax+b}$: on factorise par l'exponentielle. Comme $e^{\cdots} > 0$, $f'(x)$ a le signe du facteur restant. Piège : $\big((x+1)e^{-x}\big)' = -x\,e^{-x}$.

Ex. 36 ★☆☆ **Dériver et factoriser par l'exponentielle** — Dérive chaque fonction (définie sur $\mathbb{R}$ sauf mention contraire) et écris la dérivée sous forme factorisée par l'exponentielle.

(a) $f(x) = (x^2 - 5)e^x$

(b) $g(x) = (3x + 2)e^{-x}$

(c) $h(x) = (x - 4)e^{2x}$

(d) $k(t) = 6e^{-0{,}3t}$

(e) $m(x) = \dfrac{e^x}{x + 3}$ sur $]-3\,;+\infty[$

(f) $p(x) = (x^2 + 1)e^{-2x+1}$

Ex. 37 ★☆☆ **Du signe de f' aux variations** — Dans chaque cas, on donne la dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Réponds en justifiant par le signe de $f'(x)$.

(a) $f'(x) = (4 - x)e^x$. Sur quel intervalle f est-elle croissante ?

(b) $f'(x) = (2x + 5)e^{-3x}$. Sur quel intervalle f est-elle décroissante ?

(c) $f'(x) = (x^2 - x - 6)e^x$. Donne les intervalles où f est croissante.

(d) $f'(x) = -(x^2 + 4)e^{x+1}$. Donne les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(e) $f(x) = (x - 3)e^x$ et $f'(x) = (x - 2)e^x$. Donne l'intervalle où f est négative, puis celui où f est décroissante.

Ex. 38 ★★☆ **Étude complète avec e^{-x}** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 4)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe. Valeurs approchées à $0\{,\}01$ près.

(a) Calcule $f'(x)$ et écris-la sous forme factorisée par e^{-x}.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f (sans limites).

(c) Donne l'extremum de f en valeur exacte, puis une valeur approchée.

(d) Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Ex. 39 ★★☆ **Concentration d'un antidouleur** — La concentration d'un antidouleur dans le sang, en mg/L, t heures après la prise, est $c(t) = 8t\,e^{-0{,}25t}$ pour $t \in [0\,;12]$. Arrondis à $0\{,\}01$ près.

(a) Calcule $c'(t)$ et factorise-la par $e^{-0{,}25t}$.

(b) Dresse le tableau de variations de c sur $[0\,;12]$, avec les valeurs exactes.

(c) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? Donne ce maximum en valeur exacte, puis arrondi.

(d) Inès affirme : « 8 h après la prise, la concentration dépasse encore 10 mg/L. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Un trinôme devant e^x : minimum sur tout $\mathbb{R}$** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$. Donne les valeurs exactes, puis des valeurs approchées à $0\{,\}01$ près.

(a) Calcule $f'(x)$ et écris-la sous la forme $(x^2 + bx + c)e^x$. Étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Dresse le tableau de variations de f. Donne ses extremums locaux.

(c) Résous l'inéquation $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Démontre que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant -e$. Pense à séparer $]-\infty\,;-2]$, $[-2\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

(e) Détermine une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Ex. 41 ★★★ **Bénéfice d'un atelier de céramique** — Un atelier fabrique entre 0 et 500 bols par semaine. Pour x centaines de bols, avec $x \in [0\,;5]$, le bénéfice hebdomadaire, en milliers d'euros, est $B(x) = (4x - 2)e^{-0{,}5x}$. Donne les valeurs exactes, puis les montants arrondis à l'euro.

(a) Théo trouve $B'(x) = (4x + 2)e^{-0{,}5x}$ et en conclut que B est croissante. Trouve son erreur, puis calcule $B'(x)$ sous forme factorisée.

(b) Étudie le signe de $B'(x)$ et dresse le tableau de variations de B sur $[0\,;5]$.

(c) Combien de bols l'atelier doit-il fabriquer pour un bénéfice maximal ? Donne ce bénéfice en euros.

(d) Combien de bols l'atelier doit-il fabriquer au minimum pour ne pas perdre d'argent ? Justifie.

(e) Le gérant affirme : « Au-delà de 250 bols, le bénéfice baisse, donc à 500 bols l'atelier perd de l'argent. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 42 ★★★ **Un quotient avec e^{2x} et une inégalité** — On considère la fonction g définie sur $I =]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{x+1}$. Donne les valeurs exactes, puis des valeurs approchées à $0\{,\}01$ près.

(a) Explique pourquoi g est dérivable sur I. Calcule $g'(x)$ et factorise le numérateur par e^{2x}.

(b) Étudie le signe de $g'(x)$ sur I et dresse le tableau de variations de g. Donne son minimum.

(c) Déduis-en que, pour tout $x > -1$, on a $e^{2x+1} \geqslant 2x + 2$.

(d) On exécute ce programme :

```
from math import exp
def g(x):
    return exp(2*x) / (x + 1)
n = 0
while g(n) <= 100:
    n = n + 1
print(n)
```

Qu'affiche-t-il ? Justifie avec les variations de g, puis interprète le résultat.

7. Suites géométriques, modèles exponentiels et seuils

À retenir : $u_n = Ke^{an}$ est géométrique de raison e^a (pas a), car $u_{n+1} = e^a u_n$. Taux : $(e^a - 1) \times 100\,\%$, ex. $e^{-0,1} \approx 0{,}905$ donne $-9{,}5\,\%$ et non $-10\,\%$. Seuil : le while teste la négation ; vérifie le rang précédent.

Ex. 43 ★☆☆ **Raison, taux et sens de variation** — Arrondis les raisons au millième et les taux à 0,1 %.

(a) Donne la raison de la suite $u_n = 5e^{0,2n}$, puis son taux d'évolution d'un rang au suivant.

(b) Léo affirme que $v_n = 3e^{-0,1n}$ baisse de 10 % à chaque rang. Corrige son affirmation.

(c) Donne le premier terme et la raison de la suite $p_n = 2e^{1-0,3n}$.

(d) Justifie par sa raison le sens de variation de $w_n = 0{,}4e^{0,05n}$.

(e) La suite $r_n = -6e^{0,3n}$ a une raison supérieure à 1. Est-elle croissante ? Justifie.

(f) Écris $s_n = \dfrac{e^{2n}}{e^{n+1}}$ sous la forme Ke^{an}, puis donne sa raison.

Ex. 44 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les suites Ke^{an}** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse.

(a) « La suite $u_n = 4e^{0,7n}$ a pour raison 0,7. »

(b) « Pour tout entier n, $e^{-1,5(n+1)} = e^{-1,5} \times e^{-1,5n}$. »

(c) « La suite $u_n = 12e^{-0,02n}$ perd environ 2 % par rang, donc elle a perdu 100 % de sa valeur au rang 50. »

(d) « La grandeur $g(t) = 50e^{-0,4t}$ finit par valoir 0. »

(e) « La suite $u_n = e^n + 1$ est géométrique. »

Ex. 45 ★★☆ **Médicament : baisse horaire et réinjection** — Inès reçoit une injection. t heures plus tard, la concentration du médicament dans son sang est $c(t) = 18e^{-0,15t}$ (en mg/L). On pose $u_n = c(n)$.

n	3	4	5	6
u_n	11,48	9,88	8,50	7,32

(a) Démontre que (u_n) est géométrique. Donne sa raison (arrondie au millième) et son premier terme.

(b) Donne le sens de variation de (u_n) et le pourcentage de baisse par heure, à 0,1 % près.

(c) Inès affirme que la concentration baisse de la même quantité chaque heure. A-t-elle raison ? Justifie avec le tableau.

(d) Le médecin refait une injection dès que $c < 5$. À la calculatrice, trouve cette heure entière, en vérifiant le rang précédent.

Ex. 46 ★★☆ **Bactéries : un programme de seuil à corriger** — Dans un laboratoire, une culture compte $N(t) = 2\,500e^{0,12t}$ bactéries au bout de t heures. Chloé cherche au bout de combien d'heures entières la population a doublé. Elle écrit ce programme :

```
from math import exp
n = 0
u = 2500
while u >= 5000:
    u = u * exp(0.12)
    n = n + 1
print(n)
```

(a) On pose $u_n = N(n)$. Montre que $u_{n+1} = e^{0,12}u_n$, puis donne le taux d'évolution horaire à 0,1 % près.

(b) Qu'affiche le programme de Chloé ? Explique son erreur et corrige la ligne 4.

(c) Quel nombre affiche le programme corrigé ? Vérifie-le à la calculatrice avec le rang précédent.

(d) Quelle ligne faut-il modifier pour trouver au bout de combien d'heures la population a triplé ? Quel nombre s'affiche alors ?

Ex. 47 ★★★ **Deux chaînes vidéo : qui passe devant ?** — Au bout de t mois, la chaîne de Maëlys compte $A(t) = 12e^{0,05t}$ milliers d'abonnés. Celle de Hugo en compte $B(t) = 18e^{0,02t}$ milliers. Arrondis les raisons au millième et les taux à 0,1 %.

(a) On pose $a_n = A(n)$ et $b_n = B(n)$. Démontre que ces deux suites sont géométriques. Donne la raison de chacune et son taux d'évolution mensuel.

(b) Montre que, pour tout entier naturel n, $A(n) > B(n) \iff e^{0,03n} > 1{,}5$.

(c) On donne ce tableau :

n	12	13	14	15
$e^{0,03n}$	1,433	1,477	1,522	1,568

Qu'affiche le programme ci-dessous ? Justifie, puis interprète le résultat.

```
from math import exp
n = 0
while 12*exp(0.05*n) <= 18*exp(0.02*n):
    n = n + 1
print(n)
```

(d) On pose $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Démontre que (q_n) est géométrique et croissante. Une fois devant, Maëlys peut-elle être rattrapée ? Justifie.

Ex. 48 ★★★ **Échantillon radioactif : demi-vie et disparition** — Un échantillon radioactif a une masse de $m(t) = 80e^{-0,05t}$ grammes au bout de t jours. On pose $u_n = m(n)$. Arrondis la raison au millième et le taux à 0,1 %.

(a) Démontre que (u_n) est une suite géométrique. Donne sa raison et son premier terme, puis déduis-en son sens de variation.

(b) Noah affirme : « La masse diminue de 5 % par jour. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 48 **(suite)**

(c) On donne ce tableau :

n	12	13	14	15
m(n)	43,90	41,76	39,73	37,79

Détermine la demi-vie de l'échantillon en jours entiers. Justifie avec le rang précédent.

(d) Montre que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $m(t+14) = e^{-0{,}7}\, m(t)$. Déduis-en $m(28) = \dfrac{m(14)^2}{80}$, puis une valeur approchée de $m(28)$.

(e) Yanis affirme que la masse vaut exactement 40 g au bout de 13,5 jours. Calcule $m(13{,}5)$ à 0,01 près. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 49 ★★★ **Le café de Lucas refroidit** — Lucas se sert un café dans une pièce à 20 °C. Au bout de t minutes, sa température est $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}08t}$ (en °C). On pose $d_n = T(n) - 20$. Arrondis la raison au millième, le taux à 0,1 % et les températures à 0,01 près.

(a) Démontre que (d_n) est géométrique. Donne sa raison, son premier terme et son taux d'évolution par minute.

(b) Lucas affirme : « La suite $(T(n))$ est géométrique de raison $e^{-0{,}08}$. » A-t-il raison ? Justifie en comparant $T(1)$ à $T(0) \times e^{-0{,}08}$.

(c) Détermine le sens de variation de la suite $(T(n))$. Le café atteindra-t-il un jour 20 °C ? Justifie.

(d) Complète la condition de ce programme pour qu'il affiche le premier entier n tel que $T(n) < 50$.

```
from math import exp
n = 0
T = 90
while ... :
    n = n + 1
    T = 20 + 70*exp(-0.08*n)
print(n)
```

(e) Calcule $T(10)$ et $T(11)$. Déduis-en ce qu'affiche le programme, puis interprète le résultat.