1. *Définition, nombre e et signe de l'exponentielle*

Ex. 1 ★☆☆ **Valeurs et signes en un coup d'œil**

(a) $e^0 = 1$ (et non 0), donc $2e^0 - 5 = 2 \times 1 - 5 = -3$.

(b) $e^{-1} = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$.

(c) Comme $e^x > 0$ et $-6 < 0$, on a $-6e^x < 0$ pour tout réel x : l'expression est strictement négative.

(d) Une exponentielle est toujours strictement positive : $e^{-5x} > 0$ pour tout réel x. Le « moins » porte sur l'exposant, pas sur le résultat.

(e) Comme $e^{3x-1} > 0$ pour tout réel x, l'exponentielle ne s'annule jamais : $S = \emptyset$.

(f) $4 + e^{2x} = 1 \iff e^{2x} = -3$. Or $e^{2x} > 0$: c'est impossible, donc $S = \emptyset$.

Ex. 2 ★☆☆ **Les erreurs de Malo**

(a) $e = e^1 \approx 2{,}718$ n'est qu'une valeur approchée : 2{,}7 est seulement un arrondi au dixième. On écrit $e \approx 2{,}718$, jamais $e = 2{,}7$.

(b) $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$: c'est l'inverse d'un nombre strictement positif, donc $e^{-2} > 0$, avec $e^{-2} \approx 0{,}135$. Le « moins » porte sur l'exposant, pas sur le résultat.

(c) e^2 n'est pas $2 \times e$: $e^2 = e \times e \approx 7{,}389$.

(d) $g(0) = e^0 - 3 = 1 - 3 = -2$ est juste, mais $g'(x) = e^x \neq e^x - 3 = g(x)$. La bonne fonction est de la forme $C\,e^x$ avec $C = f(0) = -2$: $f(x) = -2e^x$. En effet, $f'(x) = -2e^x = f(x)$ et $f(0) = -2 \times 1 = -2$.

(e) L'exposant vaut bien $4 + (-4) = 0$, mais $e^0 = 1$ et non 0. En effet, $e^{-4} = \frac{1}{e^4}$, donc $e^4 \times e^{-4} = e^4 \times \frac{1}{e^4} = 1$.

Ex. 3 ★★☆ **Pourquoi l'exponentielle ne s'annule pas, et comment s'en servir**

(a) Par la dérivée d'un produit : $\varphi'(x) = \exp(x)\exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp(-x)) = 0$. Une fonction de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ est constante, donc $\varphi(x) = \varphi(0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1 \times 1 = 1$ pour tout réel x.

(b) On a $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. Un produit égal à 1 n'a aucun facteur nul, donc $\exp(x) \neq 0$. En divisant par $\exp(x)$, on obtient $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Ex. 3 **(suite)**

(c) Comme $e^x > 0$, $f(x)$ a le signe de $x - 2$, qui s'annule en 2.

x	$-\infty$	2	$+\infty$	
x − 2		−	0	+
e^{x}		+		+
f(x)		−	0	+

Conclusion : $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;2[$, $f(2) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $]2\,;+\infty[$.

(d) Comme $e^{-x} > 0$, l'inéquation équivaut à $x^2 - 9 \leqslant 0$, soit $(x-3)(x+3) \leqslant 0$. Ce trinôme a pour racines -3 et 3 et il est négatif entre ses racines (coefficient de x^2 positif).
Donc $S = [-3\,;3]$.

(e) Comme $e^{2x} > 0$, on a $-e^{2x} < 0$: le produit est strictement positif si et seulement si $5 - x < 0$, c'est-à-dire $x > 5$.
Donc $S =]5\,;+\infty[$.

Ex. 4 ★★☆ **Approcher e par la méthode d'Euler**

(a) $y_1 = 1{,}25 \times 1 = 1{,}25$; $y_2 = 1{,}25 \times 1{,}25 = 1{,}5625$; $y_3 = 1{,}25 \times 1{,}5625 = 1{,}953125$; $y_4 = 1{,}25 \times 1{,}953125 = 2{,}44140625$. Avec ce pas, la méthode donne donc $f(1) \approx 2{,}441$.

(b) $e - y_4 \approx 2{,}718 - 2{,}441 \approx 0{,}28$. L'approximation est trop faible et grossière, car le pas 0,25 est grand.

(c) Le programme ajoute h à chaque pas au lieu de $h \times y$: il renvoie $1 + 4 \times 0{,}25 = 2.0$. Or la méthode demande $y_{k+1} = y_k + h\,y_k$. Ligne 5 corrigée : `y = y + h * y`.

(d) Le programme corrigé renvoie $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}7048$. L'écart avec $e \approx 2{,}7183$ vaut environ 0,013 : plus le pas est petit, plus on approche e.

(e) Chaque valeur est multipliée par 4 : $f(1) \approx 4 \times 2{,}44140625 = 9{,}765625 \approx 9{,}766$. C'est une valeur approchée de $4e \approx 10{,}873$.

Ex. 5 ★★★ **Retrouver une fonction égale à sa dérivée**

(a) Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $e^x \neq 0$: h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = \frac{f'(x)\,e^x - f(x)\,e^x}{(e^x)^2}$. Comme $f' = f$, on obtient $h'(x) = \frac{f(x)\,e^x - f(x)\,e^x}{(e^x)^2} = 0$.

Ex. 5 **(suite)**

(b) La dérivée de h est nulle sur $\mathbb{R}$, donc h est constante : $h(x) = h(0) = \frac{f(0)}{e^0} = \frac{3}{1} = 3$. Attention, $e^0 = 1$ et non 0. Donc $\frac{f(x)}{e^x} = 3$, d'où $f(x) = 3e^x$ pour tout réel x.

(c) $f(x) = 3e \iff 3e^x = 3e^1 \iff e^x = e^1 \iff x = 1$, donc $S = \{1\}$. Ensuite, $f(x) = \frac{3}{e} \iff e^x = \frac{1}{e} = e^{-1} \iff x = -1$, donc $S = \{-1\}$.

(d) Faux : la fonction nulle $g(x) = 0$ vérifie $g'(x) = 0 = g(x)$, et elle s'annule partout. En revanche, la condition $f(0) = 3$ change tout : $f(x) = 3e^x$ et, comme $e^x > 0$, $f(x) > 0$ pour tout réel x.
Donc f ne s'annule jamais.

Ex. 6 ★★★ **Euler à reculons et seuil pour approcher e**

(a) Chaque pas multiplie par 0,75, donc $y_k = 0{,}75^k$. Ainsi $y_4 = 0{,}75^4 = 0{,}31640625 \approx 0{,}316$: c'est une valeur approchée de $f(-1) = e^{-1}$.

(b) $1{,}25^4 \times 0{,}75^4 = (1{,}25 \times 0{,}75)^4 = 0{,}9375^4 \approx 0{,}772$. Or $e \times e^{-1} = e \times \frac{1}{e} = 1$. Conclusion : l'écart est important, donc avec le pas 0,25 les deux approximations sont grossières.

(c) $y_1 = (1 + (-2)) \times 1 = -1$. Or $e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0$: une exponentielle est toujours strictement positive. Le « moins » porte sur l'exposant, pas sur le résultat. L'approximation $f(x + h) \approx (1 + h)\, f(x)$ n'est valable que pour h proche de 0, donc le pas -2 ne convient pas.

(d) Le programme augmente n tant que l'écart $e - u_n$ reste supérieur ou égal à 0,1. Comme u_n augmente, pour $n \leqslant 12$ on a $e - u_n \geqslant e - u_{12} \approx 2{,}718 - 2{,}613 = 0{,}105 \geqslant 0{,}1$. Puis $e - u_{13} \approx 2{,}718 - 2{,}621 = 0{,}097 < 0{,}1$. Le programme affiche donc 13 : c'est le plus petit entier n pour lequel u_n approche e à moins de 0,1 près.

Ex. 7 ★★★ **Signes, équations et une inégalité, type DS**

(a) Non. $e^{-5} = \frac{1}{e^5} > 0$: le « moins » porte sur l'exposant, pas sur le résultat. De plus, $f(5) = 8 \times (-3) \times e^{-5} = -24e^{-5} < 0$. Lina se trompe deux fois.

(b) Comme $e^{-x} \neq 0$, $f(x) = 0 \iff x + 3 = 0$ ou $2 - x = 0$, donc $S = \{-3\,;2\}$. Ensuite, en divisant par $e^{-x} \neq 0$: $f(x) = 6e^{-x} \iff (x + 3)(2 - x) = 6 \iff -x^2 - x + 6 = 6 \iff -x(x + 1) = 0$, donc $S = \{-1\,;0\}$.

Ex. 7 **(suite)**

(c) Comme $e^{-x} > 0$, $f(x)$ a le signe de $(x + 3)(2 - x)$, qui s'annule en -3 et en 2 :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$		
x + 3		−	0	+		+
2 − x		+		+	0	−
e^{-x}		+		+		+
f(x)		−	0	+	0	−

Donc $f(x) > 0$ sur $]-3\,;2[$ et $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

(d) $\frac{(e^x-1)^2}{e^x} = \frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} - 2 + \frac{1}{e^x} = e^x - 2 + e^{-x}$, car $e^{2x-x} = e^x$ et $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.

(e) Un carré est positif ou nul et $e^x > 0$, donc $\frac{(e^x-1)^2}{e^x} \geqslant 0$. Ainsi $e^x + e^{-x} - 2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $e^x + e^{-x} \geqslant 2$. Il y a égalité si et seulement si $e^x - 1 = 0 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$. L'égalité n'a donc lieu que pour $x = 0$.

2. *Propriétés algébriques : simplifier*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : un seul exposant**

(a) $e^4 \times e^{-7} = e^{4-7} = e^{-3}$.

(b) $e^{-2x} \times e^{-2x} = e^{-2x+(-2x)} = e^{-4x}$
(et non e^{4x^2} ni $2e^{-2x}$).

(c) $(e^x)^2 = e^{2x}$, donc $(e^x)^2 \times e^{1-x} = e^{2x+1-x} = e^{x+1}$.

(d) $\frac{e^{x+2}}{e^{3x-1}} = e^{x+2-(3x-1)} = e^{x+2-3x+1} = e^{-2x+3}$.

(e) $\frac{1}{e^{-x}} = e^x$, donc $\frac{1}{e^{-x}} \times e^{-3} = e^{x-3}$.

(f) $(e^{-x})^4 = e^{-4x}$, donc l'expression vaut $e^{-4x+x-2-(-3x)} = e^{-4x+x-2+3x} = e^{-2}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : factoriser, développer**

(a) $e^{2x} = (e^x)^2$, donc $e^{2x} - 5e^x = e^x\,(e^x - 5)$.

(b) $e^{2x} - 9 = (e^x)^2 - 3^2 = (e^x - 3)\,(e^x + 3)$.

(c) $\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2 = e^{4x} + 2 \times e^{2x} \times e^{-2x} + e^{-4x} = e^{4x} + 2 + e^{-4x}$, car $e^{2x} \times e^{-2x} = e^0 = 1$.

(d) $e^x \times e^{-x} + 3e^x \times e^x = 1 + 3e^{2x}$.

(e) $e^{3x} = e^x \times e^{2x}$, donc $4e^{3x} + e^x = e^x\left(4e^{2x} + 1\right)$.

(f) $(e^x - 2)\,(e^x + 3) = e^{2x} + 3e^x - 2e^x - 6 = e^{2x} + e^x - 6$.

Ex. 10 ★★☆ **Les erreurs de Lina**

(a) Pour un produit, on additionne les exposants, on ne les multiplie pas : $e^{3x} \times e^{x} = e^{3x+x} = e^{4x}$.

(b) Pour un quotient, on soustrait les exposants, on ne les divise pas : $\frac{e^{8x}}{e^{2x}} = e^{8x-2x} = e^{6x}$.

(c) Pour $x = 0$: $e^0 + e^0 = 2$ alors que $e^0 = 1$.
Donc l'égalité est fausse : une somme ne se simplifie pas. On peut seulement factoriser : $e^x + e^{2x} = e^x\left(1 + e^x\right)$.

(d) Pour $x = 2$: $\left(e^2\right)^3 = e^6$ alors que $e^{2^3} = e^8$, et $e^6 \neq e^8$ car exp est strictement croissante. L'écriture correcte est $\left(e^x\right)^3 = e^{3x}$.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux pour tout réel ?**

(a) Faux : pour $x = 0$, $e^0 \times e^0 = 1$ alors que $2e^0 = 2$. En fait $e^x \times e^x = e^{2x}$.

(b) Faux : pour $x = 1$, $\frac{e^1}{e^{-1}} = e^{1-(-1)} = e^2$, et $e^2 \neq 1 = e^0$ car exp est strictement croissante. En fait $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$.

(c) Vrai : $e \times \left(e^x\right)^2 = e^1 \times e^{2x} = e^{2x+1}$ pour tout réel x.

(d) Vrai : on divise chaque terme par e^x : $\frac{e^{4x}+e^x}{e^x} = \frac{e^{4x}}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} = e^{4x-x} + 1 = e^{3x} + 1$ pour tout réel x.

(e) Faux : pour $x = 0$, $e^0 + e^0 = 2 \neq 1$. Attention : c'est le produit $e^x \times e^{-x}$ qui vaut 1, pas la somme.

Ex. 12 ★★★ **Deux carrés à développer**

(a) Pour $x = 0$: $\left(e^0 + e^0\right)^2 = (1+1)^2 = 4$, alors que $e^0 + e^0 = 2$. Comme $4 \neq 2$, Noé a tort : il a oublié le double produit.

(b) $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = \left(e^x\right)^2 + 2 \times e^x \times e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2$. Or $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$, donc le double produit vaut 2 : $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$.

(c) De même, $\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = e^{2x} - 2 \times e^x \times e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$.

(d) $A(x) = \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = 2 + 2 = 4$.
Donc pour tout réel x, $A(x) = 4$: $A(x)$ ne dépend pas de x.

(e) Un carré est toujours positif : $\left(e^x - e^{-x}\right)^2 \geqslant 0$, donc $e^{2x} - 2 + e^{-2x} \geqslant 0$, c'est-à-dire $e^{2x} + e^{-2x} \geqslant 2$. On a l'égalité quand $e^x - e^{-x} = 0$, soit $e^x = e^{-x}$, donc $x = -x$, soit $x = 0$. Conclusion : $e^{2x} + e^{-2x} \geqslant 2$ pour tout réel x, avec égalité seulement pour $x = 0$.

Ex. 13 ★★★ **Une fraction qui se simplifie**

(a) Pour $x = 0$: $e^1 - e = 0$, alors que $e^0 = 1$. Comme $0 \neq 1$, Malik a tort. Il a traité une différence comme un quotient : $e^a - e^b$ ne se simplifie pas, seul $\frac{e^a}{e^b}$ vaut e^{a-b}.

(b) $e \times e^{2x} = e^1 \times e^{2x} = e^{2x+1}$, donc $e \times \left(e^{2x} - 1\right) = e^{2x+1} - e$ pour tout réel x.

(c) $e^{2x} = \left(e^x\right)^2$, donc $e^{2x} - 1 = \left(e^x - 1\right)\left(e^x + 1\right)$. Comme $e^x > 0$, $e^x + 1 > 1$, donc $e^x + 1 \neq 0$. Ainsi $h(x) = \frac{e\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = e\left(e^x - 1\right) = e^{x+1} - e$.

(d) $h(x) = 0 \iff e^{x+1} = e^1 \iff x + 1 = 1 \iff x = 0$.
Donc $S = \{0\}$.

(e) $h(x) > 0 \iff e^{x+1} > e^1 \iff x + 1 > 1 \iff x > 0$, car l'exponentielle est strictement croissante. De même $h(x) < 0 \iff x < 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
h(x)		−	0	+

Conclusion : $h(x)$ est négatif sur $]-\infty\,;0]$ et positif sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 14 ★★★ **Comparer deux expressions**

(a) Yanis a oublié les parenthèses autour de ce qu'il soustrait : $-(2x-3) = -2x + 3$. L'écriture correcte est $Q(x) = e^{x+1-(2x-3)} = e^{x+1-2x+3} = e^{-x+4}$.

(b) $\left(e^x\right)^2 = e^{2x}$ (et non e^{x^2}), donc $R(x) = \frac{e^{2x}}{e^{-x}} = e^{2x-(-x)} = e^{3x}$.

(c) $Q(x) = R(x) \iff e^{-x+4} = e^{3x} \iff -x + 4 = 3x \iff x = 1$, donc $S = \{1\}$. Comme l'exponentielle est strictement croissante, $Q(x) < R(x) \iff -x + 4 < 3x \iff 4 < 4x \iff x > 1$, donc $S =]1\,;+\infty[$.

(d) $Q(x) \times R(x) = e^{-x+4} \times e^{3x} = e^{2x+4}$.
Donc $Q(x) \times R(x) = 1 \iff e^{2x+4} = e^0 \iff 2x + 4 = 0 \iff x = -2$. Conclusion : $S = \{-2\}$.

3. *Équations avec exp*

Ex. 15 ★☆☆ **Équations : tout sous la forme eˆ...**

(a) L'exponentielle est strictement croissante, donc $e^{3x-1} = e^{x+5} \iff 3x - 1 = x + 5 \iff 2x = 6 \iff x = 3$. $S = \{3\}$.

(b) $1 = e^0$, donc $e^{4-x} = e^0 \iff 4 - x = 0 \iff x = 4$.
$S = \{4\}$.

(c) $\frac{1}{e^2} = e^{-2}$, donc $e^{2x+3} = e^{-2} \iff 2x + 3 = -2 \iff x = -\frac{5}{2}$. $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

(d) $e^x \times e^{x-1} = e^{2x-1}$ et $e = e^1$, donc $e^{2x-1} = e^1 \iff 2x - 1 = 1 \iff x = 1$. $S = \{1\}$.

Ex. 15 **(suite)**

(e) $(e^x)^3 = e^{3x}$, donc $e^{3x} = e^{x+4} \iff 3x = x+4 \iff x = 2$. $S = \{2\}$.

(f) Comme $e^{-x} > 0$, ce facteur n'est jamais nul : $(2x-5)e^{-x} = 0 \iff 2x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$. $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

(g) $4e^x + 12 = 0 \iff e^x = -3$. Or $e^x > 0$ pour tout réel x : il n'y a aucune solution. $S = \emptyset$.

Ex. 16 ★☆☆ **Inéquations en ligne**

(a) $1 = e^0$ et exp est strictement croissante : $e^{2x-6} > e^0 \iff 2x - 6 > 0 \iff x > 3$. $S =]3\,;+\infty[$.

(b) $e^{1-3x} \leqslant e^7 \iff 1 - 3x \leqslant 7 \iff -3x \leqslant 6 \iff x \geqslant -2$ (on divise par $-3 < 0$: le sens change).
$S = [-2\,;+\infty[$.

(c) $e = e^1$, donc $e^{x+2} < e^1 \iff x + 2 < 1 \iff x < -1$.
$S =]-\infty\,;-1[$.

(d) $\frac{1}{e^3} = e^{-3}$, donc $e^{-x} \geqslant e^{-3} \iff -x \geqslant -3 \iff x \leqslant 3$.
$S =]-\infty\,;3]$.

(e) $e^{4x} > e^{\frac{1}{2}} \iff 4x > \frac{1}{2} \iff x > \frac{1}{8}$. $S = \left]\frac{1}{8}\,;+\infty\right[$.

(f) Pour tout réel x, $e^x > 0 > -5$: l'inéquation est toujours vraie. $S = \mathbb{R}$.

(g) $e^{5x} \times e^{-2x} = e^{3x}$, donc $e^{3x} \leqslant e^{x-3} \iff 3x \leqslant x - 3 \iff 2x \leqslant -3 \iff x \leqslant -\frac{3}{2}$. $S = \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right]$.

Ex. 17 ★★☆ **Changement d'inconnue X = e^x**

(a) $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, donc (E) s'écrit $X^2 - (e+1)X + e = 0$, avec $X > 0$ car $e^x > 0$.

(b) $\Delta = (e+1)^2 - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2 > 0$. Les racines sont $\frac{e+1-(e-1)}{2} = 1$ et $\frac{e+1+(e-1)}{2} = e$. Les deux sont strictement positives.

(c) $e^x = 1 = e^0 \iff x = 0$ et $e^x = e = e^1 \iff x = 1$. Conclusion : $S = \{0\,;1\}$.

(d) Avec $X = e^x$: $X^2 + 3X = 0 \iff X(X+3) = 0 \iff X = 0$ ou $X = -3$. Les deux racines sont $\leqslant 0$ et sont donc rejetées, car $e^x > 0$. Conclusion : $S = \emptyset$.

(e) $e^{x+1} = e \times e^x$, donc avec $X = e^x$: $X^2 + eX - 2e^2 = 0$.
$\Delta = e^2 + 8e^2 = 9e^2$, d'où $X = \frac{-e+3e}{2} = e$ ou $X = \frac{-e-3e}{2} = -2e$. La racine $-2e < 0$ est rejetée, car $e^x > 0$. Il reste $e^x = e^1 \iff x = 1$. Conclusion : $S = \{1\}$.

Ex. 18 ★★☆ **Corrige les élèves**

(a) Non : Inès a oublié une solution. $x^2 = 4x + 5 \iff x^2 - 4x - 5 = 0$; $\Delta = 16 + 20 = 36$, d'où $x = \frac{4-6}{2} = -1$ ou $x = \frac{4+6}{2} = 5$. Conclusion : $S = \{-1\,;5\}$.

(b) Non : on ne « simplifie » pas par e dans un exposant. On a $e \times e^{3x} = e^{1+3x}$, donc $e^{1+3x} = e^2 \iff 1 + 3x = 2 \iff x = \frac{1}{3}$. Conclusion : $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

(c) Non : le début est juste ($\frac{1}{e} = e^{-1}$ et exp est strictement croissante), mais en divisant par $-2 < 0$, il faut changer le sens : $-2x < -4 \iff x > 2$. Conclusion : $S =]2\,;+\infty[$.

(d) Non : $e^x > 0$ pour tout x, donc $e^x = 0$ est impossible (et $e^0 = 1 \neq 0$). Seul $x + 6 = 0$ convient. Conclusion : $S = \{-6\}$.

Ex. 19 ★★★ **Inéquation du second degré en e^x**

(a) On développe : $(X-e)(X+1) = X^2 + X - eX - e = X^2 + (1-e)X - e$.

(b) On pose $X = e^x$. Comme $e^{2x} = (e^x)^2$, on obtient $P(x) = (e^x - e)(e^x + 1)$. Comme $e^x > 0$, on a $e^x + 1 > 1 > 0$.

(c) $P(x) = 0 \iff e^x - e = 0$ ou $e^x + 1 = 0$. La seconde égalité donne $e^x = -1$: c'est impossible, car $e^x > 0$. Il reste $e^x = e^1 \iff x = 1$, car l'exponentielle est strictement croissante. $S = \{1\}$.

(d) Comme $e^x + 1 > 0$, $P(x)$ a le signe de $e^x - e$. Or $e^x - e \leqslant 0 \iff e^x \leqslant e^1 \iff x \leqslant 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
e^x − e		−	0	+
e^x + 1		+		+
P(x)		−	0	+

Donc $S =]-\infty\,;1]$.

(e) Sami oublie que $X = e^x > 0$: le cas $X \leqslant -1$ est impossible. Il revient aussi aux x sans repasser par l'exponentielle (la borne -1 porte sur X, pas sur x). Il reste $e^x \geqslant e^1 \iff x \geqslant 1$.
Donc $S = [1\,;+\infty[$.

Ex. 20 ★★★ **Deux courbes exponentielles face à face**

(a) On a $\frac{1}{e^2} = e^{-2}$. L'exponentielle étant strictement croissante, $e^{2x-1} \leqslant e^{-2} \iff 2x - 1 \leqslant -2 \iff x \leqslant -\frac{1}{2}$. $S =]-\infty\,;-\frac{1}{2}]$.

Ex. 20 **(suite)**

(b) $f(x) = g(x) \iff 2x - 1 = x^2 - 4 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$. On a $\Delta = 4 + 12 = 16$, d'où les racines $\frac{2-4}{2} = -1$ et $\frac{2+4}{2} = 3$. Les courbes se coupent aux points d'abscisses -1 et 3.

(c) $f(x) \geqslant g(x) \iff 2x - 1 \geqslant x^2 - 4 \iff x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$. Ce trinôme a un coefficient $1 > 0$: il est négatif entre ses racines, donc $x \in [-1\,;3]$. Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[-1\,;3]$ et en dessous sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]3\,;+\infty[$.

(d) $f(x) \times g(x) = e^{2x-1+x^2-4} = e^{x^2+2x-5}$. Ensuite, $e^{x^2+2x-5} = e^{-5} \iff x^2 + 2x = 0 \iff x(x+2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$. $S = \{-2\,;0\}$.

(e) En divisant par $x + 5$, Lina suppose que $x + 5 \neq 0$: elle perd la solution $x = -5$. Il faut écrire $(x + 5)\,(g(x) - f(x)) = 0 \iff x + 5 = 0$ ou $g(x) = f(x)$, soit $x = -5$ ou $x \in \{-1\,;3\}$ (question 2). Conclusion : $S = \{-5\,;-1\,;3\}$.

Ex. 21 ★★★ **Deux cultures de bactéries**

(a) $\frac{B(t)}{A(t)} = \frac{2e^{0,6t-1}}{2e^{0,2t+1}} = e^{0,6t-1-(0,2t+1)} = e^{0,4t-2}$.

(b) Comme $A(t) > 0$, on a $A(t) = B(t) \iff \frac{B(t)}{A(t)} = 1 \iff e^{0,4t-2} = e^0 \iff 0,4t - 2 = 0 \iff t = 5$. Les deux cultures ont le même effectif au bout de 5 heures.

(c) Comme $A(t) > 0$, on a $B(t) > A(t) \iff e^{0,4t-2} > e^0 \iff 0,4t > 2 \iff t > 5$, car l'exponentielle est strictement croissante. La culture B est la plus nombreuse sur $]5\,;12]$.

(d) $B(t) \geqslant e^{\frac{1}{2}} \times A(t) \iff e^{0,4t-2} \geqslant e^{0,5} \iff 0,4t \geqslant 2,5 \iff t \geqslant 6,25$. Cela se produit à partir de 6 h 15 min.

(e) $A(t) \times B(t) = 4e^{0,2t+1+0,6t-1} = 4e^{0,8t}$.
Donc $4e^{0,8t} = 4e^8 \iff 0,8t = 8 \iff t = 10$, et $10 \in [0\,;12]$. $S = \{10\}$.

4. *Inéquations avec exp, signe d'une expression*

Ex. 22 ★☆☆ **Inéquations express**

(a) $1 = e^0$ et l'exponentielle est strictement croissante : $e^{3x-6} > e^0 \iff 3x - 6 > 0 \iff x > 2$. $S =]2\,;+\infty[$.

(b) $e = e^1$, donc $e^{-x} \geqslant e^1 \iff -x \geqslant 1 \iff x \leqslant -1$ (on divise par -1 : le sens change). $S =]-\infty\,;-1]$.

(c) Pour tout réel x, $e^x > 0 > -4$. $S = \mathbb{R}$.

(d) Pour tout réel x, $e^{3x} > 0$: il n'est jamais $\leqslant 0$. $S = \emptyset$.

Ex. 22 **(suite)**

(e) $e^{2x+5} > 0$ est toujours vrai. Ensuite $e^{2x+5} < e^0 \iff 2x + 5 < 0 \iff x < -\frac{5}{2}$. $S =]-\infty\,;-\frac{5}{2}[$.

(f) $e^{7-4x} \leqslant e^3 \iff 7 - 4x \leqslant 3$ (l'exponentielle est strictement croissante, le sens se conserve) $\iff -4x \leqslant -4 \iff x \geqslant 1$ (on divise par -4 : le sens change). $S = [1\,;+\infty[$.

Ex. 23 ★★☆ **Le signe d'un coup d'œil**

(a) $e^{x+2} - 1 > 0 \iff e^{x+2} > e^0 \iff x + 2 > 0 \iff x > -2$. L'expression est négative sur $]-\infty\,;-2[$, nulle en -2 et positive sur $]-2\,;+\infty[$.

(b) $e^{2x} - e > 0 \iff e^{2x} > e^1 \iff 2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}$. Négative sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$, nulle en $\frac{1}{2}$, positive sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

(c) $e^x > 0$ et $-3 < 0$, donc $-3e^x < 0$ pour tout réel x.

(d) $e^{-x} > 0$, donc $e^{-x} + 2 > 2 > 0$: l'expression est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

(e) $e^{5-x} - e^{2x} > 0 \iff e^{5-x} > e^{2x} \iff 5 - x > 2x \iff 5 > 3x \iff x < \frac{5}{3}$. Positive sur $]-\infty\,;\frac{5}{3}[$, nulle en $\frac{5}{3}$, négative sur $]\frac{5}{3}\,;+\infty[$.

(f) $x^2 \geqslant 0$ et $e^x > 0$: l'expression est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en $x = 0$.

Ex. 24 ★★☆ **L'erreur de Léna**

(a) Le passage aux exposants est juste, car l'exponentielle est strictement croissante. L'erreur arrive ensuite : en divisant par -3, il faut changer le sens.
$-3x \geqslant -6 \iff x \leqslant 2$. $S =]-\infty\,;2]$.

(b) Non. Pour $x = 0$, $e^4 \geqslant e^{-2}$ est vrai, donc 0 est solution. Pourtant $0 \notin [2\,;+\infty[$: le test montre que sa réponse est fausse.

(c) L'exponentielle est strictement croissante : $-2x < x + 6 \iff -3x < 6 \iff x > -2$. $S =]-2\,;+\infty[$.

(d) $x^2 \leqslant 4x \iff x^2 - 4x \leqslant 0 \iff x(x-4) \leqslant 0$. Ce trinôme a pour racines 0 et 4. Il est négatif entre ses racines. $S = [0\,;4]$.

Ex. 25 ★★☆ **Tableaux de signes avec exponentielle**

(a) $e^x > 0$, donc $(2-x)e^x$ a le signe de $2-x$, qui s'annule en 2.

x	$-\infty$	2	$+\infty$	
2−x		+	0	−
e^{x}		+		+
(2−x)e^{x}		+	0	−

Le produit est positif sur $]-\infty\,;2[$, nul en 2 et négatif sur $]2\,;+\infty[$.

(b) $x+3>0 \iff x>-3$. $e^x-e>0 \iff e^x > e^1 \iff x>1$.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
x+3		−	0	+		+
e^{x}−e		−		−	0	+
produit		+	0	−	0	+

Le produit est négatif ou nul entre -3 et 1. $S=[-3\,;1]$.

(c) $e^{2x}-1>0 \iff e^{2x}>e^0 \iff 2x>0 \iff x>0$.
$x-4$ s'annule en 4 (valeur interdite).

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
e^{2x}−1		−	0	+		+
x−4		−		−	0	+
quotient		+	0	−	‖	+

Le quotient est strictement négatif sur $]0\,;4[$. $S=]0\,;4[$.

Ex. 26 ★★★ **Inéquations du second degré déguisées**

(a) $(X-e)(X+2)=X^2+2X-eX-2e=X^2+(2-e)X-2e$.

(b) On pose $X=e^x$, avec $X>0$. D'après la question précédente, l'inéquation s'écrit $(e^x-e)(e^x+2)>0$. Comme $e^x+2>0$, elle équivaut à $e^x-e>0$, soit $e^x>e^1$. L'exponentielle est strictement croissante, donc c'est équivalent à $x>1$. Conclusion : $S=]1\,;+\infty[$.

(c) Comme $e^x>0$, multiplier par e^x garde le sens. Avec $e^x\times e^{1-x}=e^1=e$, on obtient $e^{2x}+e\leqslant(e+1)e^x$. On pose $X=e^x$: $X^2-(e+1)X+e\leqslant 0$, soit $(X-1)(X-e)\leqslant 0$. Ce trinôme est négatif entre ses racines : $1\leqslant X\leqslant e$. On a donc $e^0\leqslant e^x\leqslant e^1$, ce qui équivaut à $0\leqslant x\leqslant 1$ (exponentielle strictement croissante). Conclusion : $S=[0\,;1]$.

Ex. 26 **(suite)**

(d) On a $X^2+3X-4=(X+4)(X-1)$, de racines -4 et 1, donc $-4<X<1$ est juste. Première erreur : $X=e^x>0$, il faut donc garder $0<e^x<1$. Deuxième erreur : Mathis a conclu sur X et non sur x. Or $0<e^x<1=e^0$ équivaut à $x<0$. Conclusion : $S=]-\infty\,;0[$.

Ex. 27 ★★★ **Signes croisés de deux expressions**

(a) Comme $e^{-x}>0$, $A(x)$ a le signe de $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. Ce trinôme a pour racines -1 et 3 et il est négatif entre ses racines.
Donc $A(x)<0 \iff -1<x<3$. Conclusion : $S=]-1\,;3[$.

(b) $B(x)\geqslant 0 \iff e^x\geqslant e^{3-x} \iff x\geqslant 3-x$ (l'exponentielle est strictement croissante) $\iff 2x\geqslant 3 \iff x\geqslant\frac{3}{2}$. $S=[\frac{3}{2}\,;+\infty[$. Conclusion : $B(x)$ est négatif sur $]-\infty\,;\frac{3}{2}[$, nul en $\frac{3}{2}$ et positif sur $]\frac{3}{2}\,;+\infty[$.

(c) La valeur -1 est interdite (le dénominateur s'annule).

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
e^{x}−e^{3−x}		−		−	0	+
x+1		−	0	+		+
quotient		+	‖	−	0	+

Le quotient est strictement positif sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]\frac{3}{2}\,;+\infty[$. Conclusion : $S=]-\infty\,;-1[\cup]\frac{3}{2}\,;+\infty[$.

(d) Faux. D'après les questions 1 et 2, $A(x)<0$ sur $]-1\,;3[$ et $B(x)<0$ sur $]-\infty\,;\frac{3}{2}[$. Les deux sont donc strictement négatifs sur $]-1\,;\frac{3}{2}[$. Contre-exemple : pour $x=0$, $A(0)=-3<0$ et $B(0)=1-e^3<0$. Conclusion : l'affirmation est fausse.

Ex. 28 ★★★ **Vrai ou faux sur les inéquations**

(a) Faux. Si $a<b$, alors $-a>-b$ (on multiplie par -1, le sens change), donc $e^{-a}>e^{-b}$ (l'exponentielle est strictement croissante, le sens se conserve). Contre-exemple : $a=0$ et $b=1$ donnent $e^0=1$ et $e^{-1}\approx 0{,}368$, donc $e^{-a}>e^{-b}$.

(b) Faux. $e^{2x}+1>2e^x \iff e^{2x}-2e^x+1>0$. Avec $X=e^x$: $X^2-2X+1=(X-1)^2$, donc l'inéquation s'écrit $(e^x-1)^2>0$. Ce carré est nul quand $e^x=1=e^0$, soit $x=0$. Contre-exemple : pour $x=0$, $e^0+1=2=2e^0$, donc l'inégalité stricte est fausse. Conclusion : $S=]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Ex. 28 **(suite)**

(c) Faux. $(e^x)^3 = e^{3x}$, donc l'inéquation s'écrit $e^{3x} \geqslant e^{5-x} \iff 3x \geqslant 5 - x$ (l'exponentielle est strictement croissante) $\iff 4x \geqslant 5 \iff x \geqslant \frac{5}{4}$. Contre-exemple : 0 est dans l'intervalle proposé, mais $1 \geqslant e^5$ est faux. Conclusion : $S = [\frac{5}{4} ; +\infty[$.

(d) Vrai. $e^x - 1 > 0 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$, et de même $e^x - 1 < 0 \iff x < 0$. En $x = 0$, les deux sont nuls. Conclusion : $e^x - 1$ et x ont toujours le même signe.

(e) Faux. $e^{2x} \geqslant e^x \iff 2x \geqslant x \iff x \geqslant 0$, donc l'inégalité est fausse pour $x < 0$. Contre-exemple : pour $x = -1$, $e^{-2} - e^{-1} \approx -0{,}233 < 0$.

5. *Variations, courbe, tangente et dérivée de e^(ax + b)*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : dériver une exponentielle**

(a) $(e^{-x})' = -e^{-x}$ (le signe « − » sort devant) et e^2 est une constante, de dérivée nulle.
Donc $f'(x) = -2e^{-x}$.

(b) $g'(t) = 10 \times (-0{,}1)\, e^{-0{,}1t} = -e^{-0{,}1t}$.

(c) $h'(x) = 5e^{5x+2}$: l'exposant reste $5x + 2$.

(d) $k'(x) = 3 \times (-2)\, e^{-2x+4} = -6e^{-2x+4}$.

(e) $m'(x) = 4 \times 0{,}5\, e^{0{,}5x} = 2e^{0{,}5x}$.

(f) $p'(x) = 1 - 3e^{-3x}$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : sens de variation et comparaisons**

(a) La dérivée vaut $0{,}7e^{0{,}7t}$. Comme $e^{0{,}7t} > 0$, elle est strictement positive : la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) La dérivée vaut $2 \times (-1{,}5)\, e^{-1{,}5t} = -3e^{-1{,}5t}$. Comme $e^{-1{,}5t} > 0$, elle est strictement négative : la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

(c) $0{,}3 < 0{,}5$ et exp est strictement croissante, donc $e^{0{,}3} < e^{0{,}5}$.

(d) $-1{,}2 < -0{,}8$ et exp est strictement croissante, donc $e^{-1{,}2} < e^{-0{,}8}$.

(e) $e^1 \approx 2{,}718 < 3 < 4{,}482 \approx e^{1{,}5}$. Comme exp est strictement croissante, $1 < x < 1{,}5$.

(f) $\frac{e^2}{e^{0{,}5}} = e^{2-0{,}5} = e^{1{,}5} \approx 4{,}482$ d'après le tableau.

Ex. 31 ★★☆ **L'erreur d'Inès et la tangente à e^(2x)**

(a) Inès a dérivé comme une puissance. Pour e^{ax+b}, le coefficient a sort devant et l'exposant ne change pas : $f'(x) = 2e^{2x}$.

(b) $f(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = 2e^0 = 2$.
Donc $T : y = 2(x - 0) + 1$, c'est-à-dire $y = 2x + 1$.

(c) $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = e^0 = 1$, donc la tangente est $y = x + 1$. Son coefficient directeur vaut 1, alors que celui de T vaut $f'(0) = 2$: ce ne sont pas les mêmes droites.

(d) Avec $X = 2x$: $e^{2x} \geqslant 2x + 1$ pour tout réel x.
Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$.

(e) $f(1) = e^2$ et $f'(1) = 2e^2$, donc $y = 2e^2(x - 1) + e^2$, c'est-à-dire $y = 2e^2x - e^2$.

Ex. 32 ★★☆ **Étude de (2x + 1)e^(−x)**

(a) $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$.
Donc $f'(x) = 2e^{-x} - (2x + 1)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}$.

(b) Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - 2x$, qui s'annule en $x = \frac{1}{2}$: $f'(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

x	−∞	0{,}5	+∞	
f'(x)		+	0	−
f(x)		↗ 2e^{-0{,}5}	↘	

Donc f est croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

(c) f admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = (1 + 1)e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}}$.

(d) Faux. Comme $e^{-x} > 0$, $f(x)$ a le signe de $2x + 1$: f est positive sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$. Pourtant f est croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$. Contre-exemple : $f(-1) = -e < 0$ alors que f est croissante en -1. Le signe de f n'est pas celui de f'.

Ex. 33 ★★★ **Concentration d'un antibiotique**

(a) On pose $u(t) = 5t$, $u'(t) = 5$, $v(t) = e^{-0{,}2t}$, $v'(t) = -0{,}2\, e^{-0{,}2t}$ (le coefficient sort devant).
Donc $C'(t) = 5e^{-0{,}2t} + 5t \times (-0{,}2)e^{-0{,}2t} = 5e^{-0{,}2t} - t\, e^{-0{,}2t} = (5 - t)e^{-0{,}2t}$.

Ex. 33 **(suite)**

(b) Comme $e^{-0,2t} > 0$, $C'(t)$ a le signe de $5 - t$: positif sur $[0\,;5]$, négatif sur $[5\,;24]$.

t	0		5		24
C'(t)		+	0	−	
C(t)	0	↗	25e^{-1}	↘	120e^{-4,8}

On a $C(0) = 0$, $C(24) = 120e^{-4,8} \approx 0{,}99$. La concentration est maximale au bout de 5 h : $C(5) = 25e^{-1} \approx 9{,}20$ mg/L.

(c) C est croissante sur $[0\,;5]$, avec $C(1) \approx 4{,}09 < 6$ et $C(2) \approx 6{,}70 > 6$. Elle atteint donc 6 entre 1 h et 2 h, et reste au-dessus de 6 jusqu'à 5 h. C est décroissante sur $[5\,;24]$, avec $C(11) \approx 6{,}09 > 6$ et $C(12) \approx 5{,}44 < 6$. Elle repasse donc sous 6 entre 11 h et 12 h. Conclusion : l'antibiotique commence à agir entre 1 h et 2 h, et s'arrête entre 11 h et 12 h.

(d) L'action dure plus que $11 - 2 = 9$ h et moins que $12 - 1 = 11$ h. Conclusion : la durée d'action est comprise entre 9 h et 11 h.

(e) $C(0) = 0$ et $C'(0) = (5 - 0)e^0 = 5$. La tangente a pour équation $y = 5(t - 0) + 0$, soit $y = 5t$. Son coefficient directeur, 5, est la vitesse à laquelle la concentration augmente au moment de l'injection : 5 mg/L par heure.

Ex. 34 ★★★ **Une courbe au-dessus de ses tangentes**

(a) $\varphi'(x) = e^x - 1$. Or $e^x - 1 > 0 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$, car exp est strictement croissante.
Donc $\varphi'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et $\varphi'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

x	−∞		0		+∞
ϕ'(x)		−	0	+	
ϕ(x)		↘	0	↗	

Le minimum de φ est $\varphi(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
Donc $\varphi(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, c'est-à-dire $e^x \geqslant x + 1$.

(b) Pour tout réel x, $e^x - (x + 1) = \varphi(x) \geqslant 0$, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de T. D'après le tableau, φ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\varphi(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Conclusion : $\mathcal{C}$ et T n'ont que le point $(0\,;1)$ en commun.

(c) $\exp(1) = e$ et $\exp'(1) = e^1 = e$, donc T' : $y = e(x - 1) + e$, soit $y = ex$. Avec $X = x - 1$ dans $e^X \geqslant X + 1$: $e^{x-1} \geqslant x$. Comme $e > 0$, $e \times e^{x-1} \geqslant ex$, soit $e^x \geqslant ex$. Conclusion : $\mathcal{C}$ est au-dessus de T'.

Ex. 34 **(suite)**

(d) Avec $X = -x$: $e^{-x} \geqslant 1 - x$, et $1 - x > 0$ car $x < 1$. Les deux nombres sont strictement positifs, et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{e^{-x}} \leqslant \frac{1}{1-x}$. Comme $\frac{1}{e^{-x}} = e^x$, on obtient $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$. Pour $x = 0{,}1$: $0{,}1 + 1 \leqslant e^{0,1} \leqslant \frac{1}{0,9}$. Conclusion : $\frac{11}{10} \leqslant e^{0,1} \leqslant \frac{10}{9}$.

Ex. 35 ★★★ **Étude de (x − 1)²e^(−x), type DS**

(a) Hugo a oublié le coefficient : $(e^{-x})' = -e^{-x}$, pas e^{-x}. La bonne dérivée est $f'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2e^{-x} = (x-1)\left[2 - (x-1)\right]e^{-x}$, soit $f'(x) = (x-1)(3-x)e^{-x}$.

(b) Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $(x-1)(3-x)$.

x	]−∞;1[	1	]1;3[	3	]3;+∞[
x − 1	−	0	+	+	+
3 − x	+	+	+	0	−
f'(x)	−	0	+	0	−
f(x)	↘	0	↗	4e^{-3}	↘

f est décroissante sur $]-\infty\,;1]$, croissante sur $[1\,;3]$ et décroissante sur $[3\,;+\infty[$. Elle a un minimum local $f(1) = 0$ et un maximum local $f(3) = 2^2e^{-3} = 4e^{-3}$.

(c) $f(0) = (-1)^2e^0 = 1$ et $f'(0) = (-1) \times 3 \times e^0 = -3$. La tangente a pour équation $y = -3(x - 0) + 1$, soit $y = -3x + 1$.

(d) Pour tout réel x, $(x-1)^2 \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $f(x) \geqslant 0 = f(1)$. Conclusion : oui, $f(1) = 0$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

(e) Sur $[0\,;1]$, f est décroissante donc $f(x) \leqslant f(0) = 1$. Sur $[1\,;+\infty[$, d'après le tableau, $f(x) \leqslant f(3) = \frac{4}{e^3}$. Or $e > 2$, donc $e^3 > 8$, et $\frac{4}{e^3} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1$. Conclusion : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 1$.

6. *Étudier une fonction avec exp*

Ex. 36 ★☆☆ **Dériver et factoriser par l'exponentielle**

(a) $f'(x) = 2x\,e^x + (x^2 - 5)e^x = (x^2 + 2x - 5)e^x$.

(b) $g'(x) = 3e^{-x} + (3x + 2) \times (-e^{-x}) = (3 - 3x - 2)e^{-x} = (1 - 3x)e^{-x}$.

(c) $h'(x) = 1 \times e^{2x} + (x - 4) \times 2e^{2x} = (2x - 7)e^{2x}$.

(d) $k'(t) = 6 \times (-0{,}3)e^{-0,3t} = -1{,}8\,e^{-0,3t}$: le coefficient sort devant.

(e) $m'(x) = \frac{e^x(x+3) - e^x \times 1}{(x+3)^2} = \frac{(x+2)e^x}{(x+3)^2}$.

(f) $p'(x) = 2x\,e^{-2x+1} + (x^2 + 1) \times (-2)e^{-2x+1} = (-2x^2 + 2x - 2)e^{-2x+1}$.

Ex. 37 ★☆☆ **Du signe de f′ aux variations**

(a) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $4 - x$, positif pour $x \leqslant 4$. f est croissante sur $]-\infty\,;4]$.

(b) Comme $e^{-3x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2x + 5$, négatif pour $x \leqslant -\frac{5}{2}$. f est décroissante sur $]-\infty\,;-\frac{5}{2}]$.

(c) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x^2 - x - 6$: $\Delta = 25$, racines -2 et 3, $a = 1 > 0$ donc positif à l'extérieur des racines. f est croissante sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[3\,;+\infty[$.

(d) $x^2 + 4 > 0$ et $e^{x+1} > 0$, donc $f'(x) < 0$ pour tout x : f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

(e) Comme $e^x > 0$, $f(x)$ a le signe de $x - 3$: f est négative sur $]-\infty\,;3]$. $f'(x)$ a le signe de $x - 2$: f est décroissante seulement sur $]-\infty\,;2]$.

Ex. 38 ★★☆ **Étude complète avec e^{-x}**

(a) $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+4) \times (-e^{-x}) = (1 - x - 4)e^{-x} = (-x-3)e^{-x}$.

(b) Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-x - 3$: positif sur $]-\infty\,;-3]$, négatif sur $[-3\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)		↗	e^{3}	↘	

f est croissante sur $]-\infty\,;-3]$ et décroissante sur $[-3\,;+\infty[$.

(c) f admet un maximum en $x = -3$: $f(-3) = (-3+4)e^3 = e^3 \approx 20{,}09$.

(d) $f(0) = 4e^0 = 4$ et $f'(0) = (-0-3)e^0 = -3$. La tangente a pour équation $y = -3(x-0) + 4$, soit $y = -3x + 4$.

Ex. 39 ★★☆ **Concentration d'un antidouleur**

(a) $c'(t) = 8e^{-0{,}25t} + 8t \times (-0{,}25)e^{-0{,}25t} = (8 - 2t)e^{-0{,}25t}$.

(b) Comme $e^{-0{,}25t} > 0$, $c'(t)$ a le signe de $8 - 2t$, nul en $t = 4$. $c(0) = 0$, $c(4) = 32e^{-1}$, $c(12) = 96e^{-3}$.

t	0		4		12
c'(t)		+	0	−	
c(t)	0	↗	32e^{-1}	↘	96e^{-3}

(c) La concentration est maximale au bout de 4 h : $c(4) = 32e^{-1} \approx 11{,}77$ mg/L.

(d) $c(8) = 64e^{-2} \approx 8{,}66$ mg/L < 10 mg/L. Inès a tort : à 8 h, la concentration est déjà retombée sous 10 mg/L.

Ex. 40 ★★★ **Un trinôme devant e^x : minimum sur tout $\mathbb{R}$**

(a) $f'(x) = (2x-1)e^x + (x^2 - x - 1)e^x = (x^2 + x - 2)e^x$.
Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x^2 + x - 2$.
$\Delta = 1 + 8 = 9$, d'où les racines $\frac{-1-3}{2} = -2$ et $\frac{-1+3}{2} = 1$.
Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines.
Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]1\,;+\infty[$, et $f'(x) < 0$ sur $]-2\,;1[$.

(b)

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
f'(x)		+	0	−	0	+
f(x)		↗ 5e^{-2}	↘ −e	↗		

$f(-2) = (4 + 2 - 1)e^{-2} = 5e^{-2} \approx 0{,}68$ et $f(1) = (1 - 1 - 1)e^1 = -e \approx -2{,}72$. f a un maximum local $5e^{-2}$ en -2 et un minimum local $-e$ en 1.

(c) Comme $e^x > 0$, $f(x) < 0 \iff x^2 - x - 1 < 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5$, d'où les racines $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines : $S = \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$. Attention, cet intervalle n'est pas celui où f décroît, qui est $[-2\,;1]$. Par exemple, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}e^{3/2} < 0$ alors que f est croissante en ce point.

(d) Sur $]-\infty\,;-2]$: $x^2 \geqslant 4$ et $-x \geqslant 2$, donc $x^2 - x - 1 \geqslant 5 > 0$. Comme $e^x > 0$, on a $f(x) > 0 > -e$. Sur $[-2\,;1]$, f est décroissante, donc $f(x) \geqslant f(1) = -e$. Sur $[1\,;+\infty[$, f est croissante, donc $f(x) \geqslant f(1) = -e$. Conclusion : pour tout réel x, $f(x) \geqslant -e$.
Donc $-e$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en 1.

(e) $f(0) = (0 - 0 - 1)e^0 = -1$ et $f'(0) = (0 + 0 - 2)e^0 = -2$. La tangente a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = -2x - 1$.

Ex. 41 ★★★ **Bénéfice d'un atelier de céramique**

(a) Théo a dérivé $e^{-0{,}5x}$ en $e^{-0{,}5x}$. Or $\left(e^{-0{,}5x}\right)' = -0{,}5e^{-0{,}5x}$: le coefficient sort devant. Avec $u(x) = 4x - 2$ et $v(x) = e^{-0{,}5x}$: $B'(x) = 4e^{-0{,}5x} + (4x-2) \times (-0{,}5)e^{-0{,}5x} = (4 - 2x + 1)e^{-0{,}5x} = (5 - 2x)e^{-0{,}5x}$.

(b) Comme $e^{-0{,}5x} > 0$, $B'(x)$ a le signe de $5 - 2x$: positif sur $[0\,;2{,}5[$, nul en 2,5, négatif sur $]2{,}5\,;5]$. On calcule $B(0) = -2$, $B(2{,}5) = 8e^{-1{,}25}$ et $B(5) = 18e^{-2{,}5}$.

x	0	2{,}5	5	
B'(x)		+	0	−
B(x)	−2	↗ 8e^{-1{,}25}	↘ 18e^{-2{,}5}	

B est croissante sur $[0\,;2{,}5]$ et décroissante sur $[2{,}5\,;5]$.

Ex. 41 (suite)

(c) Le maximum est atteint en $x = 2{,}5$, soit pour 250 bols. Il vaut $B(2{,}5) = (10-2)e^{-1{,}25} = 8e^{-1{,}25} \approx 2{,}292$ milliers d'euros. Le bénéfice maximal est donc d'environ $2\,292$ €.

(d) Comme $e^{-0{,}5x} > 0$, $B(x) \geqslant 0 \iff 4x - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 0{,}5$. L'atelier ne perd pas d'argent dès qu'il fabrique au moins 50 bols.

(e) Non. B décroît sur $[2{,}5\,;5]$, donc pour tout x de cet intervalle, $B(x) \geqslant B(5) = 18e^{-2{,}5} \approx 1{,}478 > 0$. Pour 500 bols, le bénéfice baisse mais reste positif : environ $1\,478$ €. Une fonction décroissante n'est pas forcément négative.

Ex. 42 ★★★ Un quotient avec e^{2x} et une inégalité

(a) Sur I, on a $x+1>0$: le dénominateur ne s'annule pas. g est le quotient de deux fonctions dérivables, donc elle est dérivable sur I. On utilise $\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$: $g'(x) = \frac{2e^{2x}(x+1) - e^{2x}\times 1}{(x+1)^2} = \frac{(2x+1)e^{2x}}{(x+1)^2}$.

(b) Comme $e^{2x} > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ sur I, $g'(x)$ a le signe de $2x+1$: négatif sur $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$, nul en $-\frac{1}{2}$, positif sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

x	−1	−\frac{1}{2}	+∞	
g'(x)		−	0	+
g(x)		↘ 2e^{-1}	↗	

Le minimum de g sur I vaut $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-1}}{\frac{1}{2}} = 2e^{-1} \approx 0{,}74$.

(c) Pour tout $x > -1$, $g(x) \geqslant 2e^{-1}$, donc $\frac{e^{2x}}{x+1} \geqslant 2e^{-1}$. On multiplie par $x+1>0$: $e^{2x} \geqslant 2e^{-1}(x+1)$. On multiplie par $e>0$: $e^{2x}\times e^{1} \geqslant 2(x+1)$, c'est-à-dire $e^{2x+1} \geqslant 2x+2$. Il y a égalité pour $x = -\frac{1}{2}$.

(d) Le programme affiche 3. En effet, $g(0) = 1$, $g(1) = \frac{e^2}{2} \approx 3{,}69$ et $g(2) = \frac{e^4}{3} \approx 18{,}20$: ces valeurs sont toutes $\leqslant 100$. Puis $g(3) = \frac{e^6}{4} \approx 100{,}86 > 100$. Comme g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, on a $g(x) \geqslant g(3) > 100$ pour tout $x \geqslant 3$. Conclusion : 3 est le plus petit entier naturel n tel que $g(n) > 100$.

7. *Suites géométriques, modèles exponentiels et seuils*

Ex. 43 ★☆☆ Raison, taux et sens de variation

(a) $u_{n+1} = 5e^{0{,}2n}\times e^{0{,}2} = e^{0{,}2}u_n$: la raison est $e^{0{,}2} \approx 1{,}221$. Le taux est $(e^{0{,}2}-1)\times 100 \approx +22{,}1\,\%$, et non $+20\,\%$.

Ex. 43 (suite)

(b) La raison est $e^{-0{,}1} \approx 0{,}905$, donc le taux est $(e^{-0{,}1}-1)\times 100 \approx -9{,}5\,\%$. La suite baisse d'environ $9{,}5\,\%$ par rang, pas de $10\,\%$.

(c) $p_0 = 2e^1 = 2e \approx 5{,}437$. De plus, $p_{n+1} = 2e^{1-0{,}3n}\times e^{-0{,}3} = e^{-0{,}3}p_n$: la raison est $e^{-0{,}3} \approx 0{,}741$.

(d) La raison vaut $e^{0{,}05} \approx 1{,}051 > 1$ et le premier terme $0{,}4$ est positif, donc la suite (w_n) est croissante.

(e) Non. $r_{n+1} - r_n = -6e^{0{,}3n}(e^{0{,}3}-1)$. Or $e^{0{,}3n} > 0$ et $e^{0{,}3} - 1 > 0$, donc $r_{n+1} - r_n < 0$: la suite est décroissante, parce que $K = -6 < 0$.

(f) $s_n = e^{2n-(n+1)} = e^{n-1} = e^{-1}\times e^n$.
Donc $K = e^{-1}$ et la raison vaut $e^1 = e$.

Ex. 44 ★★☆ Vrai ou faux sur les suites Ke^{an}

(a) Faux. $u_{n+1} = 4e^{0{,}7n}\times e^{0{,}7} = e^{0{,}7}u_n$: la raison est $e^{0{,}7} \approx 2{,}014$, pas $0{,}7$.

(b) Vrai. D'après la relation fonctionnelle, $e^{-1{,}5n-1{,}5} = e^{-1{,}5n}\times e^{-1{,}5}$.

(c) Faux. $u_{50} = 12e^{-0{,}02\times 50} = 12e^{-1} \approx 4{,}415$, donc $\frac{u_{50}}{u_0} = e^{-1} \approx 0{,}368$. La suite a perdu environ $63{,}2\,\%$ de sa valeur, et non $100\,\%$: les baisses successives se multiplient, elles ne s'additionnent pas.

(d) Faux. Pour tout t, $e^{-0{,}4t} > 0$, donc $g(t) > 0$. Par exemple, $g(10) = 50e^{-4} \approx 0{,}916$: la grandeur ne s'annule jamais.

(e) Faux. On a $u_0 = 2$, $u_1 = e+1$ et $u_2 = e^2+1$. Or $\frac{u_1}{u_0} \approx 1{,}859$ et $\frac{u_2}{u_1} \approx 2{,}256$: le quotient n'est pas constant.

Ex. 45 ★★☆ Médicament : baisse horaire et réinjection

(a) $u_{n+1} = 18e^{-0{,}15n}\times e^{-0{,}15} = e^{-0{,}15}u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $e^{-0{,}15} \approx 0{,}861$ et de premier terme $u_0 = 18$.

(b) On a $0 < e^{-0{,}15} < 1$ et $u_0 > 0$, donc (u_n) est décroissante. Le taux est $(e^{-0{,}15}-1)\times 100 \approx -13{,}9\,\%$: la concentration baisse d'environ $13{,}9\,\%$ par heure, et non de $15\,\%$.

(c) Elle a tort. D'après le tableau, $u_3 - u_4 \approx 11{,}48 - 9{,}88 = 1{,}60$, mais $u_5 - u_6 \approx 8{,}50 - 7{,}32 = 1{,}18$: la baisse n'est pas la même chaque heure. C'est le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-0{,}15}$ qui est constant : la baisse est d'environ $13{,}9\,\%$ par heure, pas d'une quantité fixe.

(d) $u_8 = 18e^{-1{,}2} \approx 5{,}42 \geqslant 5$ et $u_9 = 18e^{-1{,}35} \approx 4{,}67 < 5$. La nouvelle injection a lieu au bout de 9 heures.

Ex. 46 ★★☆ **Bactéries : un programme de seuil à corriger**

(a) $u_{n+1} = 2\,500e^{0{,}12n} \times e^{0{,}12} = e^{0{,}12}u_n$. Le taux est $(e^{0{,}12} - 1) \times 100 \approx +12{,}7\,\%$ par heure.

(b) Le programme affiche 0 : la condition $2\,500 \geqslant 5\,000$ est fausse dès le départ, donc la boucle ne tourne jamais. La boucle doit continuer tant que la population n'a pas doublé. On écrit donc la ligne 4 ainsi : `while u < 5000:`.

(c) Le programme corrigé affiche 6. En effet, $u_5 = 2\,500e^{0{,}6} \approx 4\,555{,}3 < 5\,000$ et $u_6 = 2\,500e^{0{,}72} \approx 5\,136{,}1 \geqslant 5\,000$. La population a doublé au bout de 6 heures.

(d) On modifie la ligne 4 : `while u < 7500:`. Le programme affiche 10, car $u_9 = 2\,500e^{1{,}08} \approx 7\,361{,}7 < 7\,500$ et $u_{10} = 2\,500e^{1{,}2} \approx 8\,300{,}3 \geqslant 7\,500$.

Ex. 47 ★★★ **Deux chaînes vidéo : qui passe devant ?**

(a) $a_{n+1} = 12e^{0{,}05(n+1)} = 12e^{0{,}05n} \times e^{0{,}05} = e^{0{,}05}\,a_n$. La suite (a_n) est donc géométrique de raison $e^{0{,}05} \approx 1{,}051$: elle augmente d'environ 5,1 % par mois, et non de 5 %. De même, $b_{n+1} = 18e^{0{,}02n} \times e^{0{,}02} = e^{0{,}02}\,b_n$: la suite (b_n) est géométrique de raison $e^{0{,}02} \approx 1{,}020$, donc une hausse d'environ 2,0 % par mois.

(b) $A(n) > B(n) \iff 12e^{0{,}05n} > 18e^{0{,}02n}$. On divise par $12e^{0{,}02n}$, qui est strictement positif : $\iff \frac{e^{0{,}05n}}{e^{0{,}02n}} > \frac{18}{12} \iff e^{0{,}05n - 0{,}02n} > 1{,}5 \iff e^{0{,}03n} > 1{,}5$.

(c) La boucle continue tant que $A(n) \leqslant B(n)$ et s'arrête au premier n tel que $A(n) > B(n)$, c'est-à-dire tel que $e^{0{,}03n} > 1{,}5$. Pour $n = 13$, $e^{0{,}39} \approx 1{,}477 \leqslant 1{,}5$. Pour $n = 14$, $e^{0{,}42} \approx 1{,}522 > 1{,}5$. Le programme affiche donc 14. Conclusion : la chaîne de Maëlys dépasse celle de Hugo au bout de 14 mois.

(d) $q_n = \frac{12e^{0{,}05n}}{18e^{0{,}02n}} = \frac{2}{3}e^{0{,}03n}$, donc $q_{n+1} = \frac{2}{3}e^{0{,}03n} \times e^{0{,}03} = e^{0{,}03}\,q_n$. La suite (q_n) est géométrique de raison $e^{0{,}03} \approx 1{,}030 > 1$ et de premier terme $q_0 = \frac{2}{3} > 0$, donc elle est strictement croissante. Or $q_{14} = \frac{2}{3}e^{0{,}42} \approx 1{,}015 > 1$, donc $q_n > 1$, c'est-à-dire $a_n > b_n$, pour tout $n \geqslant 14$. Conclusion : Maëlys ne peut plus être rattrapée.

Ex. 48 ★★★ **Échantillon radioactif : demi-vie et disparition**

(a) Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 80e^{-0{,}05(n+1)} = 80e^{-0{,}05n} \times e^{-0{,}05} = e^{-0{,}05}\,u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $e^{-0{,}05} \approx 0{,}951$ et de premier terme $u_0 = 80$. Comme $u_0 > 0$ et $0 < e^{-0{,}05} < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Ex. 48 (suite)

(b) Le taux d'évolution journalier vaut $(e^{-0{,}05} - 1) \times 100\,\% \approx -4{,}9\,\%$. Noah a donc tort : la masse diminue d'environ 4,9 % par jour, et non de 5 %. Le taux n'est pas le coefficient de l'exposant.

(c) On cherche le premier entier n tel que $m(n) \leqslant 40$, soit la moitié de 80. On a $m(13) \approx 41{,}76 > 40$ et $m(14) \approx 39{,}73 \leqslant 40$. Comme la suite est décroissante, la demi-vie est d'environ 14 jours : c'est au bout de 14 jours que la masse passe sous 40 g.

(d) $m(t + 14) = 80e^{-0{,}05t - 0{,}7} = 80e^{-0{,}05t} \times e^{-0{,}7} = e^{-0{,}7}\,m(t)$. Avec $t = 0$: $m(14) = 80e^{-0{,}7}$, donc $e^{-0{,}7} = \frac{m(14)}{80}$. Avec $t = 14$: $m(28) = e^{-0{,}7}\,m(14) = \frac{m(14)^2}{80} \approx \frac{39{,}73^2}{80} \approx 19{,}73$. Au bout de 28 jours, il reste donc moins de 20 g.

(e) $m(13{,}5) = 80e^{-0{,}675} \approx 40{,}73 > 40$: au bout de 13,5 jours, il reste plus de 40 g. Yanis a tort. Comme $m'(t) = -4e^{-0{,}05t} < 0$, la fonction m est décroissante : la masse atteint 40 g entre 13,5 et 14 jours.

Ex. 49 ★★★ **Le café de Lucas refroidit**

(a) $d_n = 70e^{-0{,}08n}$, donc $d_{n+1} = 70e^{-0{,}08n} \times e^{-0{,}08} = e^{-0{,}08}\,d_n$. La suite (d_n) est donc géométrique de raison $e^{-0{,}08} \approx 0{,}923$ et de premier terme $d_0 = 70$. Son taux est $(e^{-0{,}08} - 1) \times 100\,\% \approx -7{,}7\,\%$: l'écart avec la température de la pièce baisse d'environ 7,7 % par minute, et non de 8 %.

(b) On a $T(0) = 90$ et $T(1) = 20 + 70e^{-0{,}08} \approx 84{,}62$. Or $T(0) \times e^{-0{,}08} = 90e^{-0{,}08} \approx 83{,}08$, donc $T(1) \neq e^{-0{,}08}\,T(0)$. Lucas a tort : c'est l'écart d_n qui est géométrique, pas la température.

(c) $d_0 = 70 > 0$ et $0 < e^{-0{,}08} < 1$, donc (d_n) est strictement décroissante. Comme $T(n) = 20 + d_n$, la suite $(T(n))$ est elle aussi strictement décroissante. De plus, $e^{-0{,}08n} > 0$, donc $d_n > 0$ et $T(n) > 20$. Le café refroidit sans cesse mais n'atteint jamais 20 °C.

(d) La boucle doit tourner tant que le seuil n'est pas atteint. La condition est donc la négation de $T < 50$: `while T >= 50 :`

(e) $T(10) = 20 + 70e^{-0{,}8} \approx 51{,}45 \geqslant 50$ et $T(11) = 20 + 70e^{-0{,}88} \approx 49{,}03 < 50$. Comme $(T(n))$ est décroissante, le programme affiche 11. Conclusion : le café passe sous 50 °C au bout de 11 minutes.