Fonction exponentielle : dériver et étudier une fonction – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Fonction exponentielle · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- $\left(e^{ax+b}\right)' = a\,e^{ax+b}$: le coefficient a sort devant, l'exposant ne change pas.
- Produit $u \times e^{\cdots}$: $(uv)' = u'v + uv'$, et non $u' \times v'$.
- On factorise $f'(x)$ par l'exponentielle : comme $e^{\cdots} > 0$, $f'(x)$ a le signe du facteur restant.
- Le signe de f n'est pas celui de f' : les variations se lisent sur le signe de f'.
- Un extremum se donne en valeur exacte (e^2, $-2e^{-1}$ …), sauf si l'énoncé demande un arrondi.
- $u_n = Ke^{an}$ est géométrique de raison e^a (et non a) ; son taux d'évolution est $(e^a - 1) \times 100\,\%$, pas $a \times 100\,\%$.

Exercice 1 – Dériver ★

Calcule la dérivée de chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $g(x) = e^{-2x+5}$

c) $h(x) = 4e^{-x}$

d) $N(t) = 5e^{-0{,}2t}$

e) $k(x) = x^2 + e^x$

f) $m(x) = 3x - 2e^{1-x}$

g) $p(x) = \dfrac{e^{4x}}{2}$

h) $r(x) = e^x + e^{-x}$

Exercice 2 – Du signe de la dérivée aux variations ★

Une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée. Donne les variations de f.

a) $f'(x) = (x - 5)e^x$

b) $f'(x) = -3e^{2x}$

c) $f'(x) = (1 - 3x)e^{-x}$

d) $f'(x) = 5e^{x-1}$

e) $f'(x) = (x + 4)e^{-3x}$

f) $f'(x) = -(x + 1)e^x$

g) $f'(x) = (6 - 3x)e^{0{,}5x}$

h) $f'(x) = x\,e^{2x}$

Exercice 3 – Suites géométriques ★

Pour tout entier naturel n, u_n est donné. Montre que (u_n) est géométrique ; donne sa raison, son premier terme et son sens de variation.

a) $u_n = 5e^{0,3n}$

b) $u_n = 2e^{-n}$

c) $u_n = -4e^{n}$

d) $u_n = e^{1-2n}$

e) $u_n = \dfrac{e^{3n}}{2}$

f) $u_n = 7e^{n+2}$

g) $u_n = -e^{-0,5n}$

h) $u_n = 100e^{-0,05n}$

Exercice 4 – Dériver un produit ou un quotient ★★

Calcule la dérivée, puis factorise-la par l'exponentielle. Formules : $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

a) $f(x) = (x+5)\,e^{x}$

b) $g(x) = (3-x)\,e^{x}$

c) $h(x) = (2x+1)\,e^{-x}$

d) $k(x) = x^2 e^{x}$

e) $m(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

f) $p(x) = \dfrac{x}{e^{x}}$

Exercice 5 – Étudier les variations ★★

Calcule la dérivée, étudie son signe, puis dresse le tableau de variations avec la valeur exacte de l'extremum.

a) $f(x) = (x+1)\,e^{x}$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = (3x-1)\,e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = e^{2x} - 2x$ sur $\mathbb{R}$

d) $k(x) = 5x e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$

e) $m(x) = \dfrac{e^{x}}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 – Tangentes ★★

Détermine une équation de la tangente demandée.

a) À la courbe de $f(x) = e^{x}$ au point d'abscisse 1.

b) À la courbe de $f(x) = e^{2x}$ au point d'abscisse 0.

c) À la courbe de $f(x) = (x+3)e^{x}$ au point d'abscisse 0.

d) À la courbe de $f(x) = e^{2-x}$ au point d'abscisse 2.

e) $f(x) = (x-3)e^{x}$. En quel point la tangente est-elle horizontale ? Donne son équation.

Exercice 7 – Un médicament (calculatrice autorisée) ★★★

On injecte un médicament à un patient. La concentration dans le sang, en mg/L, est $C(t) = 12e^{-0{,}25t}$, où t est le temps en heures ($t \geqslant 0$).

1. Calcule $C'(t)$ et déduis-en le sens de variation de C.
2. Donne la concentration initiale, puis la concentration au bout de 4 heures, en valeur exacte puis arrondie au centième.
3. On pose $u_n = C(n)$. Montre que (u_n) est géométrique. Donne sa raison arrondie au millième, puis interprète-la en pourcentage.
4. Le médicament n'agit plus quand la concentration passe sous 3 mg/L. À l'aide de la calculatrice, détermine au bout de combien d'heures entières cela arrive.

Exercice 8 – Étude complète ★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 3\right)e^{x}$.

1. Montre que $f'(x) = \left(x^2 + 2x - 3\right)e^{x}$.
2. Étudie le signe de $f'(x)$.
3. Dresse le tableau de variations de f, avec les valeurs exactes des extremums.
4. Détermine une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
5. Résous l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque affirmation d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $\left(e^{-4x}\right)' = e^{-4x}$

b) $\left((x-5)e^{x}\right)' = 1 \times e^{x} = e^{x}$

c) $\left(e^{1-2x}\right)' = 2e^{1-2x}$

d) $f'(x) = (x-1)e^{-x}$; « e^{-x} est négatif, donc $f'(x)$ est du signe contraire de $x - 1$. »

e) « $f(x) = (x-2)e^{x}$ est négative sur $]-\infty\,;\,2[$, donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,2]$. »

f) « $u_n = 50e^{0{,}1n}$: la suite augmente de $10\,\%$ par an. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. La dérivée de $x \mapsto e^{-3x+2}$ est :

   A $x \mapsto e^{-3x+2}$ **B** $x \mapsto -3e^{-3x+2}$ **C** $x \mapsto -3x\,e^{-3x+2}$ **D** $x \mapsto -3e^{-3x}$

2. Si $f(x) = x\,e^{2x}$, alors $f'(x)$ est égal à :

   A $2e^{2x}$ **B** $(1+x)e^{2x}$ **C** $2x\,e^{2x}$ **D** $(1+2x)e^{2x}$

3. Si $f'(x) = (3+x)e^{-x}$ pour tout réel x, alors f est :

   A décroissante sur $]-\infty\,;\,-3]$ et croissante sur $[-3\,;\,+\infty[$
   B croissante sur $]-\infty\,;\,-3]$ et décroissante sur $[-3\,;\,+\infty[$ **C** décroissante sur $\mathbb{R}$
   D croissante sur $\mathbb{R}$

4. La tangente à la courbe de $x \mapsto e^{x}$ au point d'abscisse -1 a pour équation :

   A $y = \dfrac{x}{e}$ **B** $y = x + 2$ **C** $y = \dfrac{x+2}{e}$ **D** $y = e^{-1}x - 1$

5. Un café refroidit : sa température, en °C, est $T(t) = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ (t en minutes). Alors $T'(t)$ vaut :

   A $-6e^{-0{,}1t}$ **B** $60e^{-0{,}1t}$ **C** $-0{,}1e^{-0{,}1t}$ **D** $20 - 6e^{-0{,}1t}$

6. Le minimum de $f(x) = (x-4)e^x$ sur $\mathbb{R}$ vaut :

A -4 **B** $-e^4$ **C** -3 **D** $-e^3$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).