Corrigé – Fonction exponentielle : dériver et étudier une fonction

Mathématiques – Première spécialité

Fonction exponentielle · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Dériver ★

Calcule la dérivée de chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$.

a) Avec $a = 3$ et $b = 0$:
$f'(x) = 3e^{3x}$

b) Avec $a = -2$ et $b = 5$:
$g'(x) = -2e^{-2x+5}$

c) $e^{-x} = e^{-1\times x}$, avec $a = -1$:
$h'(x) = 4 \times (-1)\, e^{-x}$
$\quad = -4e^{-x}$

d) La variable est t, avec $a = -0{,}2$:
$N'(t) = 5 \times (-0{,}2)\, e^{-0{,}2t}$
$\quad = -e^{-0{,}2t}$

e) La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et $(e^x)' = e^x$:
$k'(x) = 2x + e^x$

f) Pour e^{1-x} : $a = -1$ et $b = 1$.
$m'(x) = 3 - 2 \times (-1)\, e^{1-x}$
$\quad = 3 + 2e^{1-x}$

g) $\dfrac{e^{4x}}{2} = \dfrac{1}{2}e^{4x}$, avec $a = 4$:
$p'(x) = \dfrac{1}{2} \times 4e^{4x}$
$\quad = 2e^{4x}$

h) $(e^x)' = e^x$ et $(e^{-x})' = -e^{-x}$:
$r'(x) = e^x + (-1)\, e^{-x}$
$\quad = e^x - e^{-x}$

Exercice 2 – Du signe de la dérivée aux variations ★

Une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée. Donne les variations de f.

a) L'exponentielle est strictement positive : $f'(x)$ a le signe de $x - 5$.
$x - 5 = 0 \iff x = 5$; le coefficient de x est 1, donc $x - 5$ est négatif avant 5 et positif après.
f est décroissante sur $]-\infty\,;\,5]$ et croissante sur $[5\,;\,+\infty[$.

b) Une exponentielle est strictement positive et -3 est négatif : $f'(x) < 0$ pour tout réel x.
Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) L'exponentielle est strictement positive : $f'(x)$ a le signe de $1-3x$.
$1-3x=0 \iff x=\dfrac{1}{3}$; le coefficient de x est -3, donc $1-3x$ est positif avant $\dfrac{1}{3}$ et négatif après.
f est croissante sur $]-\infty\,;\,\dfrac{1}{3}]$ et décroissante sur $[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty[$.

d) Une exponentielle est strictement positive et 5 est positif : $f'(x)>0$ pour tout réel x.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

e) L'exponentielle est strictement positive : $f'(x)$ a le signe de $x+4$.
$x+4=0 \iff x=-4$; le coefficient de x est 1, donc $x+4$ est négatif avant -4 et positif après.
f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-4]$ et croissante sur $[-4\,;\,+\infty[$.

f) L'exponentielle est strictement positive : $f'(x)$ a le signe de $-x-1$.
$-x-1=0 \iff x=-1$; le coefficient de x est -1, donc $-x-1$ est positif avant -1 et négatif après.
f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.

g) L'exponentielle est strictement positive : $f'(x)$ a le signe de $6-3x$.
$6-3x=0 \iff x=2$; le coefficient de x est -3, donc $6-3x$ est positif avant 2 et négatif après.
f est croissante sur $]-\infty\,;\,2]$ et décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

h) L'exponentielle est strictement positive : $f'(x)$ a le signe de x.
x s'annule en 0 ; le coefficient de x est 1, donc x est négatif avant 0 et positif après.
f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice 3 – Suites géométriques ★

Pour tout entier naturel n, u_n est donné. Montre que (u_n) est géométrique ; donne sa raison, son premier terme et son sens de variation.

a) $u_{n+1}=5\times e^{0,3(n+1)}=5\times e^{0,3n}\times e^{0,3}=e^{0,3}\times u_n$.
(u_n) est géométrique de raison $q=e^{0,3}$ et de premier terme $u_0=5\times e^0=5$.
$e^{0,3}>1$ (exposant positif) et $u_0>0$: la suite est croissante.

b) $u_{n+1}=2\times e^{-(n+1)}=2\times e^{-n}\times e^{-1}=e^{-1}\times u_n$.
(u_n) est géométrique de raison $q=e^{-1}$ et de premier terme $u_0=2\times e^0=2$.
$e^{-1}<1$ (exposant négatif) et $u_0>0$: la suite est décroissante.

c) *Attention : le premier terme est négatif.*
$u_{n+1}=-4\times e^{n+1}=-4\times e^n\times e=e\times u_n$.
(u_n) est géométrique de raison $q=e$ et de premier terme $u_0=-4\times e^0=-4$.
$e>1$ (exposant positif) et $u_0<0$: la suite est décroissante.

d) $u_n=e^1\times e^{-2n}=e\times e^{-2n}$.
$u_{n+1}=e\times e^{-2(n+1)}=e\times e^{-2n}\times e^{-2}=e^{-2}\times u_n$.
(u_n) est géométrique de raison $q=e^{-2}$ et de premier terme $u_0=e\times e^0=e$.
$e^{-2}<1$ (exposant négatif) et $u_0>0$: la suite est décroissante.

e) $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\times e^{3(n+1)}=\dfrac{1}{2}\times e^{3n}\times e^3=e^3\times u_n$.
(u_n) est géométrique de raison $q=e^3$ et de premier terme $u_0=\dfrac{1}{2}\times e^0=\dfrac{1}{2}$.
$e^3>1$ (exposant positif) et $u_0>0$: la suite est croissante.

f) $u_n = 7e^2 \times e^n$.
$u_{n+1} = 7e^2 \times e^{n+1} = 7e^2 \times e^n \times e = e \times u_n$.
(u_n) est géométrique de raison $q = e$ et de premier terme $u_0 = 7e^2 \times e^0 = 7e^2$.
$e > 1$ (exposant positif) et $u_0 > 0$: la suite est croissante.

g) $u_n = (-1) \times e^{-0{,}5n}$.
$u_{n+1} = (-1) \times e^{-0{,}5(n+1)} = (-1) \times e^{-0{,}5n} \times e^{-0{,}5} = e^{-0{,}5} \times u_n$.
(u_n) est géométrique de raison $q = e^{-0{,}5}$ et de premier terme $u_0 = (-1) \times e^0 = -1$.
$e^{-0{,}5} < 1$ (exposant négatif) et $u_0 < 0$: la suite est croissante.

h) $u_{n+1} = 100 \times e^{-0{,}05(n+1)} = 100 \times e^{-0{,}05n} \times e^{-0{,}05} = e^{-0{,}05} \times u_n$.
(u_n) est géométrique de raison $q = e^{-0{,}05}$ et de premier terme $u_0 = 100 \times e^0 = 100$.
$e^{-0{,}05} < 1$ (exposant négatif) et $u_0 > 0$: la suite est décroissante.

Exercice 4 – Dériver un produit ou un quotient ★★

Calcule la dérivée, puis factorise-la par l'exponentielle. Formules : $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

a) On pose $u(x) = x + 5$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.
$f'(x) = 1 \times e^x + (x + 5)\, e^x$
$\quad = (x + 6)\, e^x$

b) On pose $u(x) = 3 - x$, $u'(x) = -1$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.
$g'(x) = -1 \times e^x + (3 - x)\, e^x$
$\quad = (2 - x)\, e^x$

c) On pose $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$.
$h'(x) = 2e^{-x} + (2x + 1) \times (-e^{-x})$
$\quad = (2 - (2x + 1))\, e^{-x}$
$\quad = (1 - 2x)\, e^{-x}$

d) On pose $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.
$k'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x$
$\quad = \left(x^2 + 2x\right) e^x$
$\quad = x\,(x + 2)\, e^x$

e) On pose $u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$.
$m'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$
$\quad = \dfrac{(x - 1)\, e^x}{x^2}$

f) On pose $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.
$p'(x) = \dfrac{1 \times e^x - x \times e^x}{\left(e^x\right)^2}$
$\quad = \dfrac{(1 - x)\, e^x}{e^x \times e^x}$
$\quad = \dfrac{1 - x}{e^x}$

Exercice 5 – Étudier les variations ★★

Calcule la dérivée, étudie son signe, puis dresse le tableau de variations avec la valeur exacte de l'extremum.

a) On pose $u(x) = x + 1$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.
$f'(x) = 1 \times e^x + (x+1)\,e^x$
$\quad = (x+2)\,e^x$

$e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x + 2$, négatif avant -2 et positif après.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	

Minimum : $f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}$.

b) On pose $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$.
$g'(x) = 3e^{-x} + (3x-1)\,(-e^{-x})$
$\quad = (3 - (3x-1))\,e^{-x}$
$\quad = (4 - 3x)\,e^{-x}$

$e^{-x} > 0$: $g'(x)$ a le signe de $4 - 3x$, qui s'annule en $\dfrac{4}{3}$; positif avant, négatif après (coefficient -3).

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
g		$\nearrow$	$3e^{-\frac{4}{3}}$	$\searrow$	

Maximum : $g\left(\dfrac{4}{3}\right) = \left(3 \times \dfrac{4}{3} - 1\right) e^{-\frac{4}{3}} = 3e^{-\frac{4}{3}}$.

c) $h'(x) = 2e^{2x} - 2$
$\quad = 2\left(e^{2x} - 1\right)$

$h'(x) > 0 \iff e^{2x} > 1 = e^0 \iff 2x > 0 \iff x > 0$ (l'exponentielle est strictement croissante) ; de même $h'(0) = 0$ et $h'(x) < 0$ pour $x < 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Minimum : $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

d) On pose $u(x) = 5x$, $u'(x) = 5$, $v(x) = e^{-2x}$, $v'(x) = -2e^{-2x}$.
$k'(x) = 5e^{-2x} + 5x \times \left(-2e^{-2x}\right)$
$= (5 - 10x)\, e^{-2x}$
$= 5\,(1 - 2x)\, e^{-2x}$

$5e^{-2x} > 0$: $k'(x)$ a le signe de $1 - 2x$, positif avant $\dfrac{1}{2}$ et négatif après.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
k		↗	$\frac{5}{2}e^{-1}$	↘	

Maximum : $k\left(\dfrac{1}{2}\right) = 5 \times \dfrac{1}{2} \times e^{-1} = \dfrac{5}{2}e^{-1} = \dfrac{5}{2e}$.

e) On pose $u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$, $v(x) = x^2 + 1$, $v'(x) = 2x$.
$m'(x) = \dfrac{e^x\left(x^2+1\right) - e^x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$
$= \dfrac{\left(x^2 - 2x + 1\right)e^x}{\left(x^2+1\right)^2}$
$= \dfrac{(x-1)^2 \times e^x}{\left(x^2+1\right)^2}$

$e^x > 0$, $(x^2+1)^2 > 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$: $m'(x) \geqslant 0$, nul seulement en $x = 1$.
Une dérivée qui s'annule en un seul point sans changer de signe ne donne pas d'extremum.

x	$-\infty$		$+\infty$
m		↗	

m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: pas d'extremum.

Exercice 6 – Tangentes ★★

Détermine une équation de la tangente demandée.

a) Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
$f(1) = e^1 = e$ et $f'(x) = e^x$, donc $f'(1) = e$.
$y = e(x-1) + e = ex - e + e$, soit $y = ex$.

b) Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
$f(0) = e^0 = 1$; $f'(x) = 2e^{2x}$, donc $f'(0) = 2$.
$y = 2(x - 0) + 1$, soit $y = 2x + 1$.

c) Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
$f(0) = 3e^0 = 3$.
$f'(x) = 1 \times e^x + (x+3)e^x = (x+4)e^x$, donc $f'(0) = 4$.
$y = 4(x - 0) + 3$, soit $y = 4x + 3$.

d) Tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
$f(2) = e^0 = 1$; $f'(x) = -e^{2-x}$ ($a = -1$), donc $f'(2) = -e^0 = -1$.
$y = -1 \times (x-2) + 1 = -x + 2 + 1$, soit $y = -x + 3$.

e) Tangente horizontale : coefficient directeur nul, donc $f'(a) = 0$.
$f'(x) = 1 \times e^x + (x-3)e^x = (x-2)e^x$.
$f'(a) = 0 \iff (a-2)e^a = 0 \iff a = 2$, car $e^a > 0$.
$f(2) = (2-3)e^2 = -e^2$: la tangente au point $(2\,;\,-e^2)$ a pour équation $y = -e^2$.

Exercice 7 – Un médicament (calculatrice autorisée) ★★★

1. $C'(t) = 12 \times (-0{,}25)e^{-0{,}25t} = -3e^{-0{,}25t}$ (le coefficient $-0{,}25$ sort devant).
   $e^{-0{,}25t} > 0$, donc $C'(t) < 0$: C est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. $C(0) = 12e^0 = 12$ mg/L.
   $C(4) = 12e^{-0{,}25\times 4} = 12e^{-1} = \dfrac{12}{e} \approx 4{,}41$ mg/L.

3. $u_{n+1} = 12e^{-0{,}25(n+1)} = 12e^{-0{,}25n} \times e^{-0{,}25} = e^{-0{,}25}\,u_n$.
   (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-0{,}25} \approx 0{,}779$ et de premier terme $u_0 = 12$.
   Taux : $(0{,}779 - 1) \times 100 = -22{,}1$.
   La concentration baisse d'environ $22{,}1\,\%$ par heure (et non de $25\,\%$).

4. (u_n) est décroissante (raison comprise entre 0 et 1, premier terme positif) : on calcule les termes jusqu'à passer sous 3.
   $u_5 = 12e^{-1{,}25} \approx 3{,}44$ et $u_6 = 12e^{-1{,}5} \approx 2{,}68$.
   La concentration passe sous 3 mg/L entre la 5^{e} et la 6^{e} heure : le médicament n'agit plus au bout de 6 heures.

Exercice 8 – Étude complète ★★★

1. On pose $u(x) = x^2 - 3$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.
   $f'(x) = 2x\,e^x + \left(x^2 - 3\right)e^x$
   $f'(x) = \left(x^2 + 2x - 3\right)e^x$ (on factorise par e^x).

2. $e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe du trinôme $x^2 + 2x - 3$.
   $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$; racines $x_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$.
   Le coefficient de x^2 est positif : le trinôme est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $f(-3) = \left((-3)^2 - 3\right)e^{-3} = 6e^{-3}$ et $f(1) = \left(1^2 - 3\right)e^{1} = -2e$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	$6e^{-3}$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	

Maximum local $6e^{-3}$ en -3, minimum local $-2e$ en 1.

4. $f(0) = (0-3)e^0 = -3$ et $f'(0) = (0+0-3)e^0 = -3$.
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit $y = -3x - 3$.

5. $e^x > 0$, donc $f(x) = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 3$.
$x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$: $S = \left\{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\right\}$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque affirmation d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Le coefficient -4 doit sortir devant.*
$\left(e^{-4x}\right)' = -4e^{-4x}$.

b) *On ne multiplie pas les dérivées : $(uv)' = u'v + uv'$.*
$\left((x-5)e^x\right)' = 1 \times e^x + (x-5)e^x = (x-4)e^x$.

c) *Erreur de signe : le coefficient de x est -2.*
$\left(e^{1-2x}\right)' = -2e^{1-2x}$.

d) *e^{-x} est strictement positif : le « moins » porte sur l'exposant.*
$f'(x)$ a le signe de $x - 1$: f est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$ et croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

e) *Le signe de f ne donne pas ses variations : il faut le signe de f'.*
$f'(x) = 1 \times e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$, du signe de $x - 1$.
f est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$ seulement, puis croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

f) *Le taux n'est pas le coefficient de l'exposant.*
La raison est $q = e^{0{,}1} \approx 1{,}105$, donc le taux est $(1{,}105 - 1) \times 100 = 10{,}5$: hausse d'environ $10{,}5\,\%$ par an.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. La dérivée de $x \mapsto e^{-3x+2}$ est :

Réponse B : $x \mapsto -3e^{-3x+2}$
$\left(e^{ax+b}\right)' = a\,e^{ax+b}$ avec $a = -3$: l'exposant ne change pas.

2. Si $f(x) = x\,e^{2x}$, alors $f'(x)$ est égal à :

Réponse D : $(1+2x)e^{2x}$
$f'(x) = 1 \times e^{2x} + x \times 2e^{2x} = (1+2x)e^{2x}$.

3. Si $f'(x) = (3+x)e^{-x}$ pour tout réel x, alors f est :

Réponse A : décroissante sur $]-\infty\,;\,-3]$ et croissante sur $[-3\,;\,+\infty[$
$e^{-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $3 + x$, négatif avant -3 et positif après.

4. La tangente à la courbe de $x \mapsto e^x$ au point d'abscisse -1 a pour équation :

Réponse C : $y = \dfrac{x+2}{e}$
$f(-1) = f'(-1) = e^{-1}$: $y = e^{-1}(x+1) + e^{-1} = e^{-1}(x+2)$.

5. Un café refroidit : sa température, en °C, est $T(t) = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ (t en minutes). Alors $T'(t)$ vaut :

Réponse A : $-6e^{-0{,}1t}$
La constante 20 a pour dérivée 0, et $60 \times (-0{,}1) = -6$.

6. Le minimum de $f(x) = (x-4)e^x$ sur $\mathbb{R}$ vaut :

Réponse D : $-e^3$
$f'(x) = (x-3)e^x$: f décroît puis croît, minimum $f(3) = (3-4)e^3 = -e^3$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).