Fonction exponentielle : calculs, équations, inéquations – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Fonction exponentielle · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$, jamais $e^a + e^b$; une somme $e^a + e^b$ ne se simplifie pas : on peut seulement factoriser.
- $(e^a)^2 = e^{2a}$, et non e^{a^2}.
- Dans un quotient, on met des parenthèses autour de l'exposant qu'on soustrait : $\dfrac{e^a}{e^{b-c}} = e^{a-(b-c)} = e^{a-b+c}$.
- e^{-a} est strictement positif : le « moins » porte sur l'exposant, pas sur le résultat.
- $e^A = c$ n'a aucune solution si $c \leqslant 0$. Pour passer aux exposants, on écrit $1 = e^0$ et $e = e^1$.
- Passer aux exposants garde le sens de l'inégalité ; diviser ensuite par un négatif le change. Après $X = e^x$, on écarte toute racine $X \leqslant 0$.

Exercice 1 – Un seul exposant ★

Écris sous la forme $e^{\cdots}$, avec un exposant réduit. Règles : $e^a \times e^b = e^{a+b}$, $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^n = e^{na}$, $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$.

a) $e^4 \times e^{-7}$

b) $\dfrac{e^5}{e^2}$

c) $\left(e^{-2}\right)^3$

d) $e^x \times e^{3x}$

e) $\dfrac{e^{2x}}{e^{x-3}}$

f) $\left(e^{2x}\right)^2$

g) $e^{-x} \times e^{x+1}$

h) $\dfrac{1}{e^{-3x}}$

Exercice 2 – Développer, factoriser ★

Pour a) à d) : développe et réduis. Pour e) à h) : factorise.

a) $e^x\left(e^x + 3\right)$

b) $e^{-x}\left(e^{2x} - e^x\right)$

c) $\left(e^x + 1\right)^2$

d) $\left(e^x + 2\right)\left(e^x - 2\right)$

e) $e^{2x} - 5e^x$

f) $xe^x + 2e^x$

g) $e^{2x} - 1$

h) $3e^{x+1} - e^x$

Exercice 3 – Équations ★

Résous dans $\mathbb{R}$. Écris chaque membre sous la forme $e^{\cdots}$, puis passe aux exposants.

a) $e^{3x-2} = e^{x+4}$

b) $e^{5-x} = 1$

c) $e^{2x+1} = -3$

d) $e^{x^2} = e^4$

e) $e^{-4x} = e$

f) $e^x \times e^{x+1} = e^5$

g) $\dfrac{e^{3x}}{e^x} = \dfrac{1}{e}$

h) $(e^x)^3 = e^{x-4}$

Exercice 4 – Inéquations ★★

Résous dans $\mathbb{R}$. Justifie le passage aux exposants : « l'exponentielle est strictement croissante ».

a) $e^{3x+1} \leqslant e^{x-5}$

b) $e^{4-2x} > 1$

c) $e^{-x} \geqslant e$

d) $e^{x^2} < e^{3x}$

e) $\dfrac{e^{x+2}}{e^{-x}} \geqslant e^4$

f) $e^{-3x+2} < 0$

Exercice 5 – Étudier un signe ★★

Donne le signe de l'expression selon les valeurs du réel x. Justifie.

a) $-3e^{2x+1}$

b) $(4-x)e^{-x}$

c) $e^{3x-6} - 1$

d) $e^x + e^{-x}$

e) $(2x+5)e^{3x}$

f) $e^{1-x} - e$

Exercice 6 – Simplifier des expressions longues ★★

Simplifie au maximum. *Transforme d'abord les puissances, puis regroupe en un seul exposant.*

a) $\dfrac{(e^x)^3 \times e^{-2x}}{e^{x-1}}$

b) $\dfrac{e^{2x+1} \times e^{-x}}{(e^x)^2}$

c) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

d) $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$, pour $x \neq 0$

e) $e^x\left(e^{-x} + e^x\right) - e^{2x}$

Exercice 7 – Produit nul et changement d'inconnue ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$. Pour b) et c), pose $X = e^x$ (avec $X > 0$).

a) $(2x+3)\left(e^{x-1}-1\right) = 0$

b) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

c) $e^{2x} - \left(e + e^2\right)e^x + e^3 = 0$

d) $e^{2x} - e^x \leqslant 0$

Exercice 8 – Une expression à étudier ★★★

Pour tout réel x, on pose $A(x) = e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e$.

1. Montre que, pour tout réel x, $A(x) = (e^x - 1)(e^x - e)$.
2. Résous l'équation $A(x) = 0$.
3. Dresse le tableau de signes de $A(x)$.
4. Déduis-en l'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{2x} + e \leqslant e^{x+1} + e^x$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque calcul d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris le bon résultat.

a) $e^x \times e^4 = e^{4x}$

b) $\left(e^{-x}\right)^2 = e^{x^2}$

c) $\dfrac{e^{4x}}{e^{x+2}} = e^{3x+2}$

d) $e^{2x} + e^x = e^{3x}$

e) $e^{x+2} = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2$

f) $e^{3-x} \geqslant e^5 \iff 3 - x \geqslant 5 \iff x \geqslant -2$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $\dfrac{e^5 \times e^{-2}}{e}$ est égal à :
   A e^4 **B** e^3 **C** e^2 **D** e^{-11}

2. $\left(e^x\right)^4$ est égal à :
   A e^{4x} **B** e^{x^4} **C** e^{x+4} **D** $4e^x$

3. L'équation $e^{2x-6} = 1$ a pour solution :
   A $x = \dfrac{7}{2}$ **B** $x = 0$ **C** aucune solution **D** $x = 3$

4. L'ensemble des solutions de $e^{-2x} > e^4$ est :
   A $]-2\,;+\infty[$ **B** $]-\infty\,;-2[$ **C** $]-\infty\,;2[$ **D** $]2\,;+\infty[$

5. L'équation $3e^x + 6 = 0$:
   A a pour solution $x = -2$ **B** a pour solution $x = 2$ **C** a pour solution $x = 0$
   D n'a aucune solution

6. $e^{2x} - 9$ se factorise en :
   A $(e^x - 3)(e^x + 3)$ **B** $\left(e^{2x} - 3\right)\left(e^{2x} + 3\right)$ **C** $(e^x - 3)^2$ **D** $e^x(e^x - 9)$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).