Corrigé – Fonction exponentielle : calculs, équations, inéquations

Mathématiques – Première spécialité

Fonction exponentielle · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Un seul exposant ★

Écris sous la forme $e^{\cdots}$, avec un exposant réduit. Règles : $e^a \times e^b = e^{a+b}$, $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^n = e^{na}$, $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$.

a) $e^4 \times e^{-7}$
$= e^{4+(-7)}$
$= e^{-3}$

b) $\dfrac{e^5}{e^2}$
$= e^{5-2}$
$= e^3$

c) $\left(e^{-2}\right)^3$
$= e^{-2\times 3}$
$= e^{-6}$

d) $e^x \times e^{3x}$
$= e^{x+3x}$
$= e^{4x}$

e) $\dfrac{e^{2x}}{e^{x-3}}$
$= e^{2x-(x-3)}$
$= e^{2x-x+3}$
$= e^{x+3}$

f) $\left(e^{2x}\right)^2$
$= e^{2x\times 2}$
$= e^{4x}$

g) $e^{-x} \times e^{x+1}$
$= e^{-x+x+1}$
$= e^1$
$= e$

h) $\dfrac{1}{e^{-3x}}$
$= e^{-(-3x)}$
$= e^{3x}$

Exercice 2 – Développer, factoriser ★

Pour a) à d) : développe et réduis. Pour e) à h) : factorise.

a) $e^x\left(e^x+3\right)$
$= e^x \times e^x + e^x \times 3$
$= e^{2x} + 3e^x$

b) $e^{-x}\left(e^{2x}-e^x\right)$
$= e^{-x} \times e^{2x} - e^{-x} \times e^x$
$= e^{-x+2x} - e^{-x+x}$
$= e^x - e^0$
$= e^x - 1$

c) $\left(e^x+1\right)^2$
$= \left(e^x\right)^2 + 2 \times e^x \times 1 + 1^2$
$= e^{2x} + 2e^x + 1$

d) $\left(e^x+2\right)\left(e^x-2\right)$
$= \left(e^x\right)^2 - 2^2$
$= e^{2x} - 4$

e) $e^{2x} - 5e^x$
$= e^x \times e^x - 5 \times e^x$
$= e^x\left(e^x-5\right)$

f) $xe^x + 2e^x$
$= x \times e^x + 2 \times e^x$
$= \left(x+2\right)e^x$

g) $e^{2x} - 1$
$= \left(e^x\right)^2 - 1^2$
$= \left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)$

h) $3e^{x+1} - e^x$
$= 3e \times e^x - 1 \times e^x$
$= e^x\left(3e-1\right)$

Exercice 3 – Équations ★

Résous dans $\mathbb{R}$. Écris chaque membre sous la forme $e^{\cdots}$, puis passe aux exposants.

a) $e^{3x-2} = e^{x+4}$
$\iff 3x-2 = x+4 \quad$ *($e^A = e^B \iff A = B$)*
$\iff 2x = 6 \quad$ *(on retranche x, on ajoute 2)*
$\iff x = 3 \quad$ *(on divise par 2)*
$S = \{3\}$

b) $e^{5-x} = 1$

$\iff e^{5-x} = e^0 \quad (1 = e^0)$

$\iff 5 - x = 0 \quad (e^A = e^B \iff A = B)$

$\iff x = 5 \quad (\text{on ajoute } x)$

$S = \{5\}$

c) $e^{2x+1} = -3$

Une exponentielle est strictement positive : elle ne peut pas valoir -3.

$S = \varnothing$

d) $e^{x^2} = e^4$

$\iff x^2 = 4 \quad (e^A = e^B \iff A = B)$

$\iff x^2 - 4 = 0 \quad (\text{on retranche } 4)$

$\iff (x-2)(x+2) = 0 \quad (a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : deux solutions, 2 et -2.

$S = \{-2\,;\,2\}$

e) $e^{-4x} = e$

$\iff e^{-4x} = e^1 \quad (e = e^1)$

$\iff -4x = 1 \quad (e^A = e^B \iff A = B)$

$\iff x = -\dfrac{1}{4} \quad (\text{on divise par } -4)$

$S = \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$

f) $e^x \times e^{x+1} = e^5$

$\iff e^{2x+1} = e^5 \quad (\text{produit : on additionne les exposants})$

$\iff 2x + 1 = 5 \quad (e^A = e^B \iff A = B)$

$\iff x = 2 \quad (\text{on retranche } 1, \text{ on divise par } 2)$

$S = \{2\}$

g) $\dfrac{e^{3x}}{e^x} = \dfrac{1}{e}$

$\iff e^{2x} = e^{-1} \quad (\text{quotient : } 3x - x = 2x \text{ ; et } \dfrac{1}{e} = e^{-1})$

$\iff 2x = -1 \quad (e^A = e^B \iff A = B)$

$\iff x = -\dfrac{1}{2} \quad (\text{on divise par } 2)$

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

h) $(e^x)^3 = e^{x-4}$

$\iff e^{3x} = e^{x-4} \quad ((e^x)^3 = e^{3x})$

$\iff 3x = x - 4 \quad (e^A = e^B \iff A = B)$

$\iff x = -2 \quad (\text{on retranche } x, \text{ on divise par } 2)$

$S = \{-2\}$

Exercice 4 – Inéquations ★★

Résous dans $\mathbb{R}$. Justifie le passage aux exposants : « l'exponentielle est strictement croissante ».

a) $e^{3x+1} \leqslant e^{x-5}$

$\iff 3x+1 \leqslant x-5$ *(l'exponentielle est strictement croissante : le sens ne change pas)*

$\iff 2x \leqslant -6$ *(on retranche x et 1)*

$\iff x \leqslant -3$ *(on divise par $2 > 0$)*

$S =]-\infty\,;\,-3]$

b) $e^{4-2x} > 1$

$\iff e^{4-2x} > e^0$ *($1 = e^0$)*

$\iff 4-2x > 0$ *(l'exponentielle est strictement croissante)*

$\iff -2x > -4$ *(on retranche 4)*

$\iff x < 2$ *(on divise par $-2 < 0$: le sens change)*

$S =]-\infty\,;\,2[$

c) $e^{-x} \geqslant e$

$\iff e^{-x} \geqslant e^1$ *($e = e^1$)*

$\iff -x \geqslant 1$ *(l'exponentielle est strictement croissante)*

$\iff x \leqslant -1$ *(on multiplie par -1 : le sens change)*

$S =]-\infty\,;\,-1]$

d) $e^{x^2} < e^{3x}$

$\iff x^2 < 3x$ *(l'exponentielle est strictement croissante)*

$\iff x^2 - 3x < 0$ *(on retranche $3x$)*

$\iff x(x-3) < 0$ *(on factorise par x)*

Le trinôme $x(x-3)$ a pour racines 0 et 3 ; il est négatif entre ses racines (coefficient de x^2 positif).

$S =]0\,;\,3[$

e) $\dfrac{e^{x+2}}{e^{-x}} \geqslant e^4$

$\iff e^{2x+2} \geqslant e^4$ *(quotient : $x+2-(-x) = 2x+2$)*

$\iff 2x+2 \geqslant 4$ *(l'exponentielle est strictement croissante)*

$\iff 2x \geqslant 2$ *(on retranche 2)*

$\iff x \geqslant 1$ *(on divise par 2)*

$S = [1\,;\,+\infty[$

f) $e^{-3x+2} < 0$

Une exponentielle est strictement positive : elle n'est jamais négative.

$S = \varnothing$

Exercice 5 – Étudier un signe ★★

Donne le signe de l'expression selon les valeurs du réel x. Justifie.

a) $e^{2x+1} > 0$ (une exponentielle est strictement positive) et $-3 < 0$.

Un négatif fois un positif est négatif : $-3e^{2x+1} < 0$ pour tout réel x.

b) $e^{-x} > 0$: le produit a le signe de $4 - x$.
$4 - x = 0 \iff x = 4$.
Le coefficient de x est -1, négatif : $4 - x$ est positif avant 4 et négatif après.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$4 - x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$	$\vert$	$+$	
$(4 - x)e^{-x}$		$+$	0	$-$	

c) $e^{3x-6} - 1 > 0$
$\iff e^{3x-6} > e^0$ *(on ajoute* 1*, et* $1 = e^0$*)*
$\iff 3x - 6 > 0$ *(l'exponentielle est strictement croissante)*
$\iff 3x > 6$ *(on ajoute* 6*)*
$\iff x > 2$ *(on divise par* 3*)*

De même, $e^{3x-6} - 1 = 0 \iff 3x - 6 = 0 \iff x = 2$.
Donc $e^{3x-6} - 1$ est négatif sur $]-\infty\,;\,2[$, nul en 2 et positif sur $]2\,;\,+\infty[$.

d) $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$: c'est une somme de deux nombres strictement positifs.
Donc $e^x + e^{-x} > 0$ pour tout réel x.

e) $e^{3x} > 0$: le produit a le signe de $2x + 5$.
$2x + 5 = 0 \iff 2x = -5 \iff x = -\dfrac{5}{2}$.
Le coefficient de x est 2, positif : $2x + 5$ est négatif avant $-\dfrac{5}{2}$ et positif après.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x + 5$		$-$	0	$+$	
e^{3x}		$+$	$\vert$	$+$	
$(2x + 5)e^{3x}$		$-$	0	$+$	

f) $e^{1-x} - e > 0$
$\iff e^{1-x} > e^1$ *(on ajoute* e*, et* $e = e^1$*)*
$\iff 1 - x > 1$ *(l'exponentielle est strictement croissante)*
$\iff -x > 0$ *(on retranche* 1*)*
$\iff x < 0$ *(on multiplie par* -1 *: le sens change)*

Et $e^{1-x} - e = 0 \iff 1 - x = 1 \iff x = 0$.
Donc $e^{1-x} - e$ est positif sur $]-\infty\,;\,0[$, nul en 0 et négatif sur $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 6 – Simplifier des expressions longues ★★

Simplifie au maximum. *Transforme d'abord les puissances, puis regroupe en un seul exposant.*

a) $\dfrac{(e^x)^3 \times e^{-2x}}{e^{x-1}}$
$= \dfrac{e^{3x} \times e^{-2x}}{e^{e^{x-1}}}$
$= \dfrac{e^{x}}{e^{x-1}}$
$= e^{x-(x-1)}$
$= e^{1}$
$= e$

b) $\dfrac{e^{2x+1} \times e^{-x}}{(e^x)^2}$
$= \dfrac{e^{2x+1-x}}{e^{2x}}$
$= \dfrac{e^{x+1}}{e^{2x}}$
$= e^{x+1-2x}$
$= e^{1-x}$

c) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
$= \left(e^{2x} + 2e^x \times e^{-x} + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2e^x \times e^{-x} + e^{-2x}\right)$
$= \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)$
$= e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}$
$= 4$

d) Le dénominateur s'annule pour $e^x = 1 = e^0$, c'est-à-dire $x = 0$, d'où la condition.
$\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$
$= \dfrac{(e^x)^2 - 1^2}{e^x - 1}$
$= \dfrac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1}$
$= e^x + 1$
On a simplifié par $e^x - 1 \neq 0$.

e) $e^x\left(e^{-x} + e^x\right) - e^{2x}$
$= e^x \times e^{-x} + e^x \times e^x - e^{2x}$
$= e^0 + e^{2x} - e^{2x}$
$= 1$

Exercice 7 – Produit nul et changement d'inconnue ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$. Pour b) et c), pose $X = e^x$ (avec $X > 0$).

a) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Premier facteur : $2x + 3 = 0 \iff 2x = -3 \iff x = -\dfrac{3}{2}$.
Second facteur : $e^{x-1} - 1 = 0 \iff e^{x-1} = e^0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$ (on a écrit $1 = e^0$).
$S = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,1\right\}$.

b) On pose $X = e^x$, avec $X > 0$.
Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation devient $X^2 + 2X - 3 = 0$.
$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2$.
$X_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $X_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$.
$X_1 = -3$ *est impossible :* $X = e^x > 0$.
Reste $e^x = 1 = e^0$, soit $x = 0$.
$S = \{0\}$.

c) On pose $X = e^x$, avec $X > 0$: $X^2 - \left(e + e^2\right) X + e^3 = 0$.
On remarque que $X = e$ est racine : $e^2 - \left(e + e^2\right) \times e + e^3 = e^2 - e^2 - e^3 + e^3 = 0$.
Le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a} = e^3$, donc l'autre racine est $X = \dfrac{e^3}{e} = e^2$.
(Vérification : $(X - e)(X - e^2) = X^2 - e^2X - eX + e^3 = X^2 - \left(e + e^2\right) X + e^3$.)
Les deux racines sont strictement positives : on les garde toutes les deux.
$e^x = e = e^1 \iff x = 1$; $e^x = e^2 \iff x = 2$.
$S = \{1\,;\,2\}$.

d) $e^{2x} - e^x \leqslant 0$
$\iff e^x\,(e^x - 1) \leqslant 0$ *(on factorise par e^x)*
Or e^x est strictement positif : diviser par e^x ne change pas le sens.
$\iff e^x - 1 \leqslant 0$ *(on divise par $e^x > 0$)*
$\iff e^x \leqslant e^0$ *($1 = e^0$)*
$\iff x \leqslant 0$ *(l'exponentielle est strictement croissante)*
$S =]-\infty\,;\,0]$

Exercice 8 – Une expression à étudier ★★★

1. On développe le membre de droite (double distributivité) et on compare.
   $(e^x - 1)\,(e^x - e)$
   $= e^x \times e^x - e^x \times e - 1 \times e^x + 1 \times e$
   $= e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e$
   On a utilisé $e^x \times e = e^x \times e^1 = e^{x+1}$.
   On retrouve $A(x)$: l'égalité est vraie pour tout réel x.

2. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
   $e^x - 1 = 0 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$.
   $e^x - e = 0 \iff e^x = e^1 \iff x = 1$.
   $S = \{0\,;\,1\}$.

3. Signe de $e^x - 1$: $e^x - 1 > 0 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$ (l'exponentielle est strictement croissante).
   Signe de $e^x - e$: $e^x - e > 0 \iff e^x > e^1 \iff x > 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$e^x - e$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   $A(x)$ est négatif sur $]0\,;\,1[$ et positif ailleurs (nul en 0 et en 1).

4. On regroupe tout à gauche : $e^{2x} + e \leqslant e^{x+1} + e^x \iff e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e \leqslant 0 \iff A(x) \leqslant 0$.
   D'après le tableau, $A(x) \leqslant 0$ entre 0 et 1, bornes comprises.
   $S = [0\,;\,1]$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque calcul d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris le bon résultat.

a) *Produit : on additionne les exposants, on ne les multiplie pas.*

$e^x \times e^4$
$= e^{x+4}$

b) $(e^a)^2 = e^{2a}$ *: on multiplie l'exposant par* 2*, on ne l'élève pas au carré.*

$(e^{-x})^2$
$= e^{-x\times 2}$
$= e^{-2x}$

c) *Il fallait des parenthèses : on soustrait tout l'exposant* $x+2$.

$\dfrac{e^{4x}}{e^{x+2}}$
$= e^{4x-(x+2)}$
$= e^{4x-x-2}$
$= e^{3x-2}$

d) *Une somme d'exponentielles ne se simplifie pas : on peut seulement factoriser par* e^x.

$e^{2x} + e^x$
$= e^x \times e^x + e^x \times 1$
$= e^x\,(e^x + 1)$

e) 0 *n'est pas une exponentielle : on ne peut pas « passer aux exposants ».*

Une exponentielle est strictement positive : $e^{x+2} = 0$ n'a aucune solution.
$S = \varnothing$.

f) *En multipliant par* -1*, il fallait changer le sens de l'inégalité.*

$e^{3-x} \geqslant e^5$
$\iff 3 - x \geqslant 5$ *(l'exponentielle est strictement croissante)*
$\iff -x \geqslant 2$ *(on retranche* 3*)*
$\iff x \leqslant -2$ *(on multiplie par* -1 *: le sens change)*
$S =]-\infty\,;\,-2]$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $\dfrac{e^5 \times e^{-2}}{e}$ est égal à :

Réponse C : e^2

$e^5 \times e^{-2} = e^3$, puis $\dfrac{e^3}{e^1} = e^{3-1} = e^2$.

2. $\left(e^{x}\right)^{4}$ est égal à :

Réponse A : e^{4x}
$\left(e^{a}\right)^{n} = e^{na}$: on multiplie l'exposant par 4.

3. L'équation $e^{2x-6} = 1$ a pour solution :

Réponse D : $x = 3$
$1 = e^{0}$, donc $2x - 6 = 0$, soit $x = 3$.

4. L'ensemble des solutions de $e^{-2x} > e^{4}$ est :

Réponse B : $]-\infty\,;\,-2[$
$-2x > 4$, puis on divise par $-2 < 0$: le sens change, $x < -2$.

5. L'équation $3e^{x} + 6 = 0$:

Réponse D : n'a aucune solution
Elle équivaut à $e^{x} = -2$: impossible, une exponentielle est strictement positive.

6. $e^{2x} - 9$ se factorise en :

Réponse A : $\left(e^{x} - 3\right)\left(e^{x} + 3\right)$
$e^{2x} = \left(e^{x}\right)^{2}$: c'est $a^{2} - b^{2} = (a-b)(a+b)$ avec $a = e^{x}$ et $b = 3$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).