Événements indépendants – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Indépendance et épreuves répétées · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; incompatibles : $P(A \cap B) = 0$. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont **jamais** indépendants.
- On n'a le droit d'écrire $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ que si l'indépendance est donnée ou démontrée (tirages sans remise : non).
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: ne pas oublier de retirer $P(A \cap B)$.
- Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.
- $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ n'est pas $1 - P(A \cap B)$: c'est $1 - P(A \cup B)$.
- Pour tester, on compare des valeurs **exactes** de $P(A) \times P(B)$ et de $P(A \cap B)$, puis on conclut par une phrase.

Exercice 1 – Le test du produit ★

Dans chaque cas, dis si A et B sont indépendants. Justifie par un calcul.

a) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}2$.

b) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}2$.

c) $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = 0{,}75$, $P(A \cap B) = 0{,}25$.

d) $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}8$, $P(A \cap B) = 0$.

e) $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}625$, $P(A \cap B) = 0{,}2$.

f) $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$, $P_A(B) = 0{,}5$.

g) $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cup B) = 0{,}82$.

h) $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}2$, $P_B(A) = 0{,}8$.

Exercice 2 – Indépendants ou incompatibles ? ★

Dans chaque cas, dis si A et B sont indépendants, incompatibles, les deux ou ni l'un ni l'autre. Justifie.

a) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0$.

b) $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}45$, $P(A \cap B) = 0{,}09$.

c) On lance un dé équilibré à six faces. A : « le résultat est pair », B : « on obtient 5 ».

d) Même dé. A : « le résultat est pair », B : « le résultat est inférieur ou égal à 2 ».

e) A est l'événement impossible et B un événement quelconque.

f) $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cup B) = 1$.

g) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$, $P(A \cup B) = 0{,}65$.

h) $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}05$.

Exercice 3 – Calculer grâce à l'indépendance ★

Dans chaque cas, A et B sont indépendants. Calcule ce qui est demandé.

a) $P(A) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}6$. Calcule $P(A \cap B)$.

b) $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}25$. Calcule $P(A \cup B)$.

c) $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}9$. Calcule $P(\overline{A} \cap B)$.

d) $P(A) = 0{,}35$, $P(B) = 0{,}4$. Calcule $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

e) $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{2}{3}$. Calcule $P(A \cup B)$ de deux façons.

f) $P(A \cap B) = 0{,}12$ et $P(A) = 0{,}4$. Calcule $P(B)$.

g) $P(A) = 0{,}2$ et $P(A \cup B) = 0{,}6$. Calcule $P(B)$, noté p.

Exercice 4 – Le tableau du lycée ★★

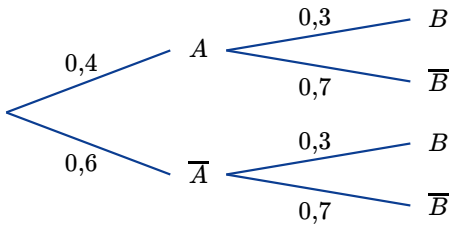
Dans un lycée de 400 élèves, il y a 240 filles. 100 élèves font de la musique, dont 60 filles ; 140 élèves font du sport en club, dont 72 filles. On choisit un élève au hasard. F : « c'est une fille », M : « il fait de la musique », S : « il fait du sport en club ».

1. F et M sont-ils indépendants ?
2. F et S sont-ils indépendants ?
3. Sans nouveau calcul, que peux-tu dire de $\overline{F}$ et M ? Vérifie avec les effectifs.
4. Traduis l'indépendance de F et M par une phrase sur les proportions.

Exercice 5 – Tester sur un arbre ★★

On donne l'arbre pondéré ci-contre.

1. Calcule $P(B)$, puis montre que A et B sont indépendants.
2. Un autre arbre donne $P(A) = 0{,}5$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$. A et B sont-ils indépendants ?
3. On donne $P(A) = 0{,}25$ et $P_A(B) = 0{,}8$. Quelle valeur faut-il donner à $P_{\overline{A}}(B)$ pour que A et B soient indépendants ?



Exercice 6 – Cartes et dés ★★

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes (8 cartes par couleur : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as ; cœur et carreau sont rouges). Les figures sont les valets, dames et rois. Dans chaque cas, les deux événements sont-ils indépendants ?

a) « la carte est un cœur » et « la carte est un roi »

b) « la carte est un roi » et « la carte est une figure »

c) « la carte est une figure » et « la carte est rouge »

d) On lance deux dés équilibrés à six faces. « la somme vaut 7 » et « le premier dé donne 3 », puis « la somme vaut 8 » et « le premier dé donne 3 ».

Exercice 7 – Trancher et justifier ★★

Réponds à chaque question par une phrase justifiée.

a) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ et A, B incompatibles. Calcule $P(A \cup B)$. A et B sont-ils indépendants ?

b) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ et A, B indépendants. Calcule $P(A \cup B)$. A et B sont-ils incompatibles ?

c) Un élève affirme : « A et B sont indépendants et incompatibles, avec $P(A) = 0{,}2$ et $P(B) = 0{,}5$. » Est-ce possible ?

d) $P(A) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}6$. A et B peuvent-ils être incompatibles ? indépendants ?

Exercice 8 – L'urne à numéros ★★★

Une urne contient 3 boules rouges marquées 1, 2 boules rouges marquées 2, 6 boules bleues marquées 1 et n boules bleues marquées 2 (n entier naturel). On tire une boule au hasard. R : « la boule est rouge », U : « la boule est marquée 1 ».

1. Dans cette question, $n = 1$. R et U sont-ils indépendants ?
2. Dans le cas général, exprime $P(R)$, $P(U)$ et $P(R \cap U)$ en fonction de n.
3. Détermine n pour que R et U soient indépendants.
4. Avec cette valeur de n, vérifie que $\overline{R}$ et $\overline{U}$ sont indépendants.

Exercice 9 – Deux détecteurs ★★★

Un entrepôt est protégé par deux détecteurs de fumée qui fonctionnent indépendamment l'un de l'autre. En cas d'incendie, le détecteur A se déclenche avec une probabilité de 0,9, le détecteur B avec une probabilité de 0,8.

1. Calcule la probabilité qu'au moins un détecteur se déclenche.
2. Calcule la probabilité qu'un seul détecteur se déclenche.
3. On ajoute un troisième détecteur, indépendant des deux autres, qui se déclenche avec une probabilité p. Quelle valeur minimale de p garantit une alerte avec une probabilité d'au moins 0,999 ?
4. Avec les deux détecteurs seulement : l'alerte a été donnée. Quelle est la probabilité que A se soit déclenché ?

Exercice 10 – Le bon paramètre ★★★

On sait que $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$. On note $x = P(B)$.

1. Détermine x pour que A et B soient incompatibles.
2. Détermine x pour que A et B soient indépendants.
3. Pour la valeur trouvée à la question 2, A et B sont-ils incompatibles ? Pouvait-on avoir les deux à la fois ?

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) « A et B sont incompatibles, avec $P(A) = 0{,}2$ et $P(B) = 0{,}3$. Donc $P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$. »

b) « A et B sont indépendants, $P(A) = 0{,}6$ et $P(B) = 0{,}7$, donc $P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}7 = 1{,}3$. »

c) « A et B sont indépendants, $P(A) = 0{,}7$ et $P(B) = 0{,}5$, donc $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}65$. »

d) Une urne contient 4 rouges et 2 bleues ; on tire deux boules sans remise. « $P(\text{deux rouges}) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{4}{9}$. »

e) « A et B sont indépendants, $P(A) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}15$, donc $P_A(B) = P(A \cap B) = 0{,}06$. »

f) « $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$: A et B sont indépendants car ils ont la même probabilité. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. A et B sont indépendants, $P(A) = 0{,}7$ et $P(B) = 0{,}2$. Alors $P(A \cap B)$ vaut :

   A 0,14 **B** 0,9 **C** 0 **D** 0,5

2. A et B sont incompatibles, $P(A) = 0{,}15$ et $P(B) = 0{,}45$. Alors $P(A \cup B)$ vaut :

   A 0,5325 **B** 0,0675 **C** 0,6 **D** 0,3

3. Deux événements incompatibles, de probabilités non nulles :

   A sont toujours indépendants **B** ne sont jamais indépendants

   C sont indépendants s'ils ont la même probabilité **D** sont toujours contraires

4. A et B sont indépendants, $P(A) = 0{,}6$ et $P(\overline{B}) = 0{,}15$. Alors $P(A \cap \overline{B})$ vaut :

   A 0,51 **B** 0,85 **C** 0,45 **D** 0,09

5. On lance un dé équilibré à six faces. Quels événements sont indépendants ?

   A « pair » et « impair » **B** « 1 » et « impair » **C** « multiple de 3 » et « impair »

   D « pair » et « au moins 4 »

6. A et B sont indépendants, $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0{,}9$. Alors $P(B)$ vaut :

   A 0,8 **B** 0,4 **C** 0,45 **D** 0,9

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).