Corrigé – Événements indépendants

Mathématiques – Première spécialité

Indépendance et épreuves répétées · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Le test du produit ★

Dans chaque cas, dis si A et B sont indépendants. Justifie par un calcul.

a) $P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$.
C'est égal à $P(A \cap B)$: A et B sont indépendants.

b) $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$.
$P(A \cap B) = 0{,}2 \neq 0{,}18$: A et B ne sont pas indépendants.

c) $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}75 = 0{,}25$.
C'est égal à $P(A \cap B)$: A et B sont indépendants.

d) $P(A) \times P(B) = 0{,}25 \times 0{,}8 = 0{,}2$.
$P(A \cap B) = 0 \neq 0{,}2$: A et B ne sont pas indépendants (ils sont incompatibles).

e) $P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}625 = 0{,}25$.
$P(A \cap B) = 0{,}2 \neq 0{,}25$: A et B ne sont pas indépendants.

f) Autre forme du test : A et B (avec $P(A) \neq 0$) sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
Ici $P_A(B) = 0{,}5 = P(B)$: A et B sont indépendants.

g) On calcule d'abord $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}82 = 0{,}28$.
$P(A) \times P(B) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$: c'est égal, A et B sont indépendants.

h) $P_B(A) = 0{,}8 \neq P(A) = 0{,}9$: savoir que B est réalisé change la probabilité de A.
A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 2 – Indépendants ou incompatibles ? ★

Dans chaque cas, dis si A et B sont indépendants, incompatibles, les deux ou ni l'un ni l'autre. Justifie.

a) $P(A \cap B) = 0$: A et B sont incompatibles.
$P(A) \times P(B) = 0{,}15 \neq 0$: ils ne sont pas indépendants.

b) $P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}45 = 0{,}09 = P(A \cap B)$: indépendants.
$P(A \cap B) \neq 0$: pas incompatibles.

c) $A \cap B = \varnothing$ (5 est impair) : A et B sont incompatibles.
$P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12} \neq 0$: pas indépendants.

d) $A \cap B = \{2\}$, donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$: pas incompatibles.
$P(A) \times P(B) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$: indépendants.

e) $A \cap B = \varnothing$: incompatibles.
$P(A) \times P(B) = 0 \times P(B) = 0 = P(A \cap B)$: indépendants aussi.
C'est possible parce que $P(A) = 0$: la règle « jamais les deux » ne vaut que pour des probabilités non nulles.

f) $P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}6 - 1 = 0$: incompatibles.
$P(A) \times P(B) = 0{,}24 \neq 0$: pas indépendants.

g) $P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}65 = 0{,}15$: pas incompatibles.
$P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15$: indépendants.

h) $P(A \cap B) \neq 0$: pas incompatibles.
$P(A) \times P(B) = 0{,}1 \neq 0{,}05$: pas indépendants.
Ni l'un ni l'autre.

Exercice 3 – Calculer grâce à l'indépendance ★

Dans chaque cas, A et B sont indépendants. Calcule ce qui est demandé.

a) Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}45 \times 0{,}6 = 0{,}27$.

b) Par indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}25 = 0{,}2$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}85$.

c) A et B indépendants, donc $\overline{A}$ et B aussi.
$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$.

d) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1 - 0{,}35)(1 - 0{,}4) = 0{,}65 \times 0{,}6 = 0{,}39$.

e) Formule : $P(A \cup B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{12} + \dfrac{8}{12} - \dfrac{2}{12} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.
Contraire : $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

f) Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$.

g) Par indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}2p$, donc $P(A \cup B) = 0{,}2 + p - 0{,}2p$.
$0{,}2 + p - 0{,}2p = 0{,}6$
$\iff 0{,}2 + 0{,}8p = 0{,}6$ *(on réduit)*
$\iff 0{,}8p = 0{,}4$ *(on retranche* $0{,}2$*)*
$\iff p = 0{,}5$ *(on divise par* $0{,}8$*)*
$S = \left\{ \dfrac{1}{2} \right\}$

Exercice 4 – Le tableau du lycée ★★

1. $P(F) = \dfrac{240}{400} = 0{,}6$, $P(M) = \dfrac{100}{400} = 0{,}25$, $P(F \cap M) = \dfrac{60}{400} = 0{,}15$.
   $P(F) \times P(M) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15 = P(F \cap M)$: F et M sont indépendants.

2. $P(S) = \dfrac{140}{400} = 0{,}35$ et $P(F \cap S) = \dfrac{72}{400} = 0{,}18$.
   $P(F) \times P(S) = 0{,}6 \times 0{,}35 = 0{,}21 \neq 0{,}18$: F et S ne sont pas indépendants.

3. F et M sont indépendants, donc $\overline{F}$ et M aussi.
   Vérification : 40 garçons font de la musique, $P(\overline{F} \cap M) = \dfrac{40}{400} = 0{,}1$ et $P(\overline{F}) \times P(M) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$.

4. $P_M(F) = \dfrac{60}{100} = 0{,}6 = P(F)$: il y a autant de filles, en proportion, parmi les musiciens que dans tout le lycée.

Exercice 5 – Tester sur un arbre ★★

1. A et $\overline{A}$ forment une partition ; formule des probabilités totales :
   $P(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}3$.
   $P_A(B) = 0{,}3 = P(B)$: A et B sont indépendants.
   Sur un arbre, c'est le cas quand les deux nœuds portent les mêmes probabilités.

2. $P(B) = 0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.
   $P_A(B) = 0{,}6 \neq 0{,}4$: A et B ne sont pas indépendants.

3. On note $y = P_{\overline{A}}(B)$.
   Indépendance : $P_A(B) = P(B)$, avec $P(B) = 0{,}25 \times 0{,}8 + 0{,}75y = 0{,}2 + 0{,}75y$.
   $0{,}2 + 0{,}75y = 0{,}8$
   $\iff 0{,}75y = 0{,}6$ *(on retranche* $0{,}2$*)*
   $\iff y = 0{,}8$ *(on divise par* $0{,}75$*)*

   Il faut $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}8$: les deux nœuds portent la même probabilité.

Exercice 6 – Cartes et dés ★★

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes (8 cartes par couleur : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as ; cœur et carreau sont rouges). Les figures sont les valets, dames et rois. Dans chaque cas, les deux événements sont-ils indépendants ?

a) $P(\text{cœur}) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$, $P(\text{roi}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$, $P(\text{roi de cœur}) = \dfrac{1}{32}$.
$\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{32}$: indépendants.

b) Un roi est une figure : $P(\text{roi} \cap \text{figure}) = P(\text{roi}) = \dfrac{1}{8}$.
$P(\text{roi}) \times P(\text{figure}) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{64} \neq \dfrac{1}{8}$: pas indépendants.

c) 6 figures rouges : $P(\text{figure} \cap \text{rouge}) = \dfrac{6}{32} = \dfrac{3}{16}$.
$\dfrac{12}{32} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{16}$: indépendants.

d) 36 issues équiprobables.
Somme 7 : 6 issues ; premier dé 3 : 6 issues ; les deux : $(3\,;4)$ seulement.
$\dfrac{6}{36} \times \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{36}$: « somme 7 » et « premier dé 3 » sont indépendants.
Somme 8 : 5 issues ; avec « premier dé 3 » : $(3\,;5)$ seulement.
$\dfrac{5}{36} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{216} \neq \dfrac{1}{36}$: pas indépendants.

Exercice 7 – Trancher et justifier ★★

Réponds à chaque question par une phrase justifiée.

a) Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$, donc $P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$.
$P(A) \times P(B) = 0{,}12 \neq 0$: pas indépendants.

b) Indépendants : $P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$.
$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}58$.
$P(A \cap B) \neq 0$: pas incompatibles.

c) Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$.
Indépendants : $P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$.
On ne peut pas avoir les deux : c'est impossible.

d) Incompatibles, on aurait $P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}6 = 1{,}1 > 1$: impossible.
Indépendants, c'est possible : il faut $P(A \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$.

Exercice 8 – L'urne à numéros ★★★

1. 12 boules.
   $P(R) = \dfrac{5}{12}$, $P(U) = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$, $P(R \cap U) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.
   $P(R) \times P(U) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{16} \neq \dfrac{1}{4}$: pas indépendants.

2. Il y a $11 + n$ boules.
   $P(R) = \dfrac{5}{11+n}$, $P(U) = \dfrac{9}{11+n}$, $P(R \cap U) = \dfrac{3}{11+n}$.

3. On veut $\dfrac{5}{11+n} \times \dfrac{9}{11+n} = \dfrac{3}{11+n}$, soit $\dfrac{45}{(11+n)^2} = \dfrac{3}{11+n}$.
   On multiplie par $(11+n)^2 > 0$:
   $45 = 3\,(11+n)$
   $\iff 45 = 33 + 3n$ *(on développe)*
   $\iff 12 = 3n$ *(on retranche 33)*
   $\iff n = 4$ *(on divise par 3)*
   $S = \{4\}$

   4 est bien un entier naturel : il faut 4 boules bleues marquées 2.

4. 15 boules.
   $P(\overline{R}) = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$, $P(\overline{U}) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.
   $\overline{R} \cap \overline{U}$: bleues marquées 2, il y en a 4, donc $P = \dfrac{4}{15}$.
   $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$: indépendants, comme le prévoit la propriété des contraires.

Exercice 9 – Deux détecteurs ★★★

1. Le contraire est « aucun ne se déclenche » : $\overline{A} \cap \overline{B}$.
   A et B indépendants, donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi :
   $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$.
   $P(A \cup B) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

2. Deux cas incompatibles : A seul ($A \cap \overline{B}$) ou B seul ($\overline{A} \cap B$).
   $P = 0{,}9 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}18 + 0{,}08 = 0{,}26$.

3. Aucune alerte : les trois restent muets, probabilité $0{,}02(1-p)$.
   On veut $1 - 0{,}02(1-p) \geqslant 0{,}999$.
   $1 - 0{,}02\,(1-p) \geqslant 0{,}999$
   $\iff 0{,}02\,(1-p) \leqslant 0{,}001$ *(on retranche* 1*, puis on multiplie par* -1 *: le sens change)*
   $\iff 1 - p \leqslant 0{,}05$ *(on divise par* $0{,}02$*)*
   $\iff p \geqslant 0{,}95$ *(on isole* p*)*

   Il faut un détecteur qui se déclenche au moins 95 fois sur 100 : $p \in [0{,}95\,;\,1]$.

4. A est inclus dans $A \cup B$, donc $P(A \cap (A \cup B)) = P(A) = 0{,}9$.
   $P_{A \cup B}(A) = \dfrac{0{,}9}{0{,}98} = \dfrac{45}{49} \approx 0{,}92$.

Exercice 10 – Le bon paramètre ★★★

1. Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$, donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   $0{,}4 + x = 0{,}7$
   $\iff x = 0{,}3$ *(on retranche* $0{,}4$*)*
   $S = \left\{ \dfrac{3}{10} \right\}$

2. Indépendants : $P(A \cap B) = 0{,}4x$, donc $P(A \cup B) = 0{,}4 + x - 0{,}4x$.
   $0{,}4 + x - 0{,}4x = 0{,}7$
   $\iff 0{,}4 + 0{,}6x = 0{,}7$ *(on réduit)*
   $\iff 0{,}6x = 0{,}3$ *(on retranche* $0{,}4$*)*
   $\iff x = 0{,}5$ *(on divise par* $0{,}6$*)*
   $S = \left\{ \dfrac{1}{2} \right\}$

3. $P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2 \neq 0$: pas incompatibles.
   Les deux à la fois demanderaient $x = 0{,}3$ et $x = 0{,}5$: impossible.
   Avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on n'a jamais les deux.

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) *Incompatibles ne veut pas dire indépendants.*
Incompatibles : $A \cap B = \varnothing$, donc $P(A \cap B) = 0$.

b) *On a oublié de retirer* $P(A \cap B)$ *; une probabilité ne dépasse pas* 1*.*
$P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$.
$P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$.

c) $1 - P(A \cap B)$ *est la probabilité de* $\overline{A \cap B}$*, pas de* $\overline{A} \cap \overline{B}$*.*
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$.

d) *Sans remise, les deux tirages ne sont pas indépendants : la composition de l'urne change.*
$P = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$.

e) $P_A(B)$ *se divise par* $P(A)$.
$P_A(B) = \dfrac{0{,}06}{0{,}4} = 0{,}15 = P(B)$: c'est l'indépendance.

f) *Avoir la même probabilité ne dit rien de l'indépendance : il faut le test du produit.*
$P(A) \times P(B) = 0{,}25 \neq 0{,}3$: A et B ne sont pas indépendants.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. A et B sont indépendants, $P(A) = 0{,}7$ et $P(B) = 0{,}2$. Alors $P(A \cap B)$ vaut :

Réponse A : 0,14
Par indépendance : $0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$.

2. A et B sont incompatibles, $P(A) = 0{,}15$ et $P(B) = 0{,}45$. Alors $P(A \cup B)$ vaut :

Réponse C : 0,6
Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$, donc $P(A \cup B) = 0{,}15 + 0{,}45 = 0{,}6$.

3. Deux événements incompatibles, de probabilités non nulles :

Réponse B : ne sont jamais indépendants
$P(A \cap B) = 0$ alors que $P(A) \times P(B) > 0$.

4. A et B sont indépendants, $P(A) = 0{,}6$ et $P(\overline{B}) = 0{,}15$. Alors $P(A \cap \overline{B})$ vaut :

Réponse D : 0,09
A et $\overline{B}$ sont indépendants : $0{,}6 \times 0{,}15 = 0{,}09$.

5. On lance un dé équilibré à six faces. Quels événements sont indépendants ?

Réponse C : « multiple de 3 » et « impair »
« multiple de 3 » et « impair » : $\{3\}$, $P = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}$. Pour « pair » et « au moins 4 » : $\dfrac{2}{6} \neq \dfrac{1}{4}$.

6. A et B sont indépendants, $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0{,}9$. Alors $P(B)$ vaut :

Réponse A : 0,8
On note $x = P(B)$: $0{,}5 + x - 0{,}5x = 0{,}9 \iff 0{,}5x = 0{,}4 \iff x = 0{,}8$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).